Untersuchungen über die kovariante Ableitung in Linienelementräumen.

Herrn Professor O. Varga zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von ARTHUR MOÓR (Szeged).

Einleitung.

Die Grundelemente der n-dimensionalen Linienelementräume $\mathfrak{L}_n$ sind die sog. Linienelemente, die aus einem Punkte des n-dimensionalen Raumes X_n mit Koordinaten x^i und aus einer Richtung mit Bestimmungszahlen v^i bestehen. Selbstverständlich müssen bei den v^i nur ihre Verhältnisse beachtet werden. Vom geometrischen Standpunkt aus ist also das Wertsystem $(0, \ldots, 0)$ für die v^i ausgeschlossen. Bei einer zulässigen Koordinatentransformation

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \ldots, x^n) \tag{0. 1}$$

transformieren sich die v^i wie die Komponenten eines kontravarianten Vektors, d. h.

$$\bar{v}^i = \bar{A}^i_r v^r, \quad \bar{A}^i_r \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}. \tag{0. 2}$$

Im folgenden wollen wir in den $\mathfrak{L}_n$-Räumen die kovariante Ableitung der Skalare und der Vektoren aus gewissen Forderungen — die den allgemeinen Begriff der kovarianten Ableitung der geometrischen Objekte in den $\mathfrak{L}_n$-Räumen bestimmen — ableiten. Der Begriff der kovarianten Ableitung der geometrischen Objekte in Punkträumen wurde von J. A. SCHOUTEN eingeführt[1]), und S. GOŁĄB, J. ACZÉL und A. MOÓR haben die explizite Form der kovarianten Ableitung gewisser geometrischen Objekte bestimmt[2]).

Für die kovariante Ableitung der geometrischen Objekte werden zunächst im § 1 drei Forderungen gestellt. Ähnlich, wie in einem Punktraum definieren wir ein Objekt in einem $\mathfrak{L}_n$-Raume in folgender Weise:

---

[1]) Vgl. [5], insb. s. 74—75

[2]) Vgl. [1]—[4].

Definition 1. *Ein geometrisches Objekt in einem Linienelement* (x^i, v^i) *eines* $\mathfrak{L}_n$*-Raumes ist ein Zahlen-m-tupel*

$$\Omega(x^i, v^i) = (\Omega_1(x^i, v^i), \ldots, \Omega_m(x^i, v^i))$$

das bei einer Koordinatentransformation $\mathfrak{T}$ *der Koordinaten laut einer Transformationsformel von der Form*

$$\overline{\Omega}_\varrho(\overline{x}^i, \overline{v}^i) = \mathfrak{F}_\varrho(\Omega_1(x^i, v^i), \ldots, \Omega_m(x^i, v^i); \mathfrak{T}), \qquad \varrho = 1, \ldots, m$$

transformiert wird.

In § 1 wollen wir die Definition der kovarianten Ableitung angeben. Von den Forderungen, die die kovariante Ableitung erfüllen soll, besagt F1. von welchen Elementen bei gegebenen Objekten die kovariante Ableitung überhaupt abhängig sein kann. Die Forderung F2. bestimmt näher den Charakter der kovarianten Ableitung des zu differenzierenden Objektes, und schließlich drückt die Forderung F3. eine gewisse Regularität (Stetigkeit) der kovarianten Ableitung aus.

In § 2—3 bestimmen wir die Form der kovarianten Ableitung der Skalare und der Vektoren.

Durch die Forderungen F1.—F3. wird die kovariante Ableitung der geometrischen Objekte noch nicht eindeutig festgesetzt, sogar ist die kovariante Ableitung auch für Skalare und Vektoren noch nicht bestimmt, doch muss sie nach unserem Satz 5 durch gewisse Grundoperationen, nämlich durch die sog. fundamentalen kovarianten Ableitungen ausdrückbar sein.

In § 4 werden wir durch eine neue Forderung F4*. die allgemeinste Form der kovarianten Ableitung bestimmen, die den Forderungen F1.—F4*. genügt.

§ 1. Definition der kovarianten Ableitung.

In dieser Arbeit wird die kovariante Ableitung in den $\mathfrak{L}_n$-Räumen nur für die Skalare und Vektoren bestimmt; wir bemerken aber, daß eine Erweiterung auf die allgemeineren geometrischen Objekte, ebenso wie in den Punkträumen auch hier möglich ist. Die im folgenden vorkommenden Größen und Objekte sollen immer — in den v^i homogene (Exponent 0) — Funktionen der Linienelemente (x^i, v^i) sein. Wir werden in dieser Arbeit kurz über Objekte sprechen, obwohl es sich um Objektenfelder handeln wird.

Nun geben wir die Definition der kovarianten Ableitung der Skalaren und der Vektoren.

Definition 2. *Für die Objekte* $\Omega(x^i, v^i)$ *die Skalare bzw. Vektoren sind, ist die kovariante Ableitung* $\nabla\Omega(x^i, v^i)$ *ein Objekt, das den folgenden Forderungen genügen soll:*

F1. $\nabla\Omega$ *ist eine von dem Koordinatensystem unabhängige Funktion von*[3]) v^i, Ω, $\partial_j\Omega$, $\partial_{v^i}\Omega$ *und von einem Hilfsobjekt* $\Gamma^{*j}_{i\ k}(x^t, v^t)$ *deren Komponente bei einer zulässigen Koordinatentransformation* (0.1) *dem Transformationsgesetz*

$$(1.1)\qquad \overline{\Gamma}^{*j}_{i\ k} = A^r_i \overline{A}^j_s A^t_k \Gamma^{*s}_{r\ t} + A^r_{ik}\overline{A}^j_r$$

mit

$$(1.2)\qquad A^r_i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^i},\quad \overline{A}^j_s \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^s},\quad A^r_{ik} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 x^r}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^k}$$

genügen; über $\Gamma^{*j}_{i\ k}$ *setzen wir voraus, daß sie in i, k symmetrisch ist.*

F2. $\nabla\Omega$ *soll ein Tensor sein, der einen kovarianten Index mehr als* Ω *hat, d. h.:*

a) *ist* Ω *ein Skalar, so ist* $\nabla\Omega$ *ein kovarianter Vektor;*

b) *ist* Ω *ein kontravarianter Vektor, so ist* $\nabla\Omega$ *ein gemischter Tensor zweiter Stufe;*

c) *ist* Ω *ein kovarianter Vektor, so ist* $\nabla\Omega$ *ein reinkovarianter Tensor zweiter Stufe.*

F3. $\nabla\Omega$ *soll in allen Veränderlichen stetig sein.*

§ 2. Kovariante Ableitung der Skalare.

Bedeutet $\sigma(x^i, v^i)$ einen Skalar, so hat man nach einer zulässigen Koordinatentransformation (0.1)

$$(2.1)\qquad \overline{\sigma}(\overline{x}^i, \overline{v}^i) = \sigma(x^i, v^i).$$

Jetzt und im folgenden bezeichnen wir die Komponenten der Objekte im Koordinatensystem $\overline{x}^i$ durch einen Strich. Nach den Forderungen F1. und F2. ist die kovariante Ableitung von σ:

$$\nabla_j\sigma = S_j(v^k, \sigma, \partial_k\sigma, \partial_{v^k}\sigma, \Gamma^{*k}_{i\ m})$$

ein kovarianter Vektor. Die Funktionen S_j sind nach F3. in allen ihren Veränderlichen stetig. Nach dem Transformationsgesetz für die kovarianten Vektoren besteht somit

$$(2.2)\qquad \overline{\nabla_j\sigma} \equiv S_j(\overline{v}^k, \overline{\sigma}, \partial_{\overline{k}}\overline{\sigma}, \partial_{\overline{v}^k}\overline{\sigma}, \overline{\Gamma}^{*k}_{i\ m}) = A^r_j S_r(v^k, \sigma, \partial_k\sigma, \partial_{v^k}\sigma, \Gamma^{*k}_{i\ m}),$$

wo $\partial_{\overline{k}}$ bzw. $\partial_{\overline{v}^k}$ die partiellen Ableitungen nach $\overline{x}^k$ bzw. $\overline{v}^k$ bedeuten.[4]) Die Transformationsformeln von v^k, $\Gamma^{*k}_{i\ m}$ und σ sind durch (0.2), (1, 1) und (2.1)

---

[3]) ∂_j bzw. ∂_{v^i} bedeuten die partiellen Ableitungen nach x^j bzw. v^i.

[4]) $\overline{\nabla_k\sigma}$ bedeutet selbstverständlich die kovariante Ableitung im Koordinatensystem $\overline{x}^k$.

angegeben. Aus (0. 2) folgt nach einer Überschiebung mit A_i^j wegen der Relationen

$$A_i^j \bar{A}_r^i = \delta_r^j = \begin{cases} 1, & \text{für } i = r \\ 0, & \text{für } i \neq r \end{cases} \tag{2. 3}$$

die mit (0. 2) äquivalente Transformationsformel

$$v^j = A_t^j \bar{v}^t. \tag{2. 4}$$

Auf Grund dieser Relation erhält man für $\partial_k \sigma$, $\partial_{v^k} \sigma$ aus (2. 1) nach partieller Ableitung nach $\bar{x}^k$ und $\bar{v}^k$ die folgenden Transformationsformeln:

$$\partial_{\bar{k}} \bar{\sigma} = A_k^r \partial_r \sigma + A_{sk}^r \bar{A}_t^s v^t \partial_{v^r} \sigma, \tag{2. 5}$$

$$\partial_{\bar{v}^k} \bar{\sigma} = A_k^r \partial_{v^r} \sigma. \tag{2. 6}$$

(Vgl. die Formeln (1. 2). Bei der Herleitung der Transformationsformeln (2. 5) und (2. 6) haben wir

$$\partial_{\bar{k}} = A_k^r \partial_r + A_{sk}^r \bar{A}_t^s v^t \partial_{v^r}, \quad \partial_{\bar{v}^k} = A_k^r \partial_{v^r}$$

benützt.)

Die Formel (2. 6) zeigt, daß $\partial_{v^k} \sigma$ ein kovarianter Vektor ist; wir wollen hier bemerken, daß die Operation ∂_{v^k} eine tensorielle Operation ist, die die kovariante Stufenzahl um eins erhöht. Dagegen ist im allgemeinen nach (2. 5) $\partial_k \sigma$ kein Vektor. $\partial_k \sigma$ bestimmt dann und nur dann einen Vektor, falls $\partial_{v^i} \sigma = 0$, d. h. σ von den v^i unabhängig ist.

Beachten wir in (2. 2) die entsprechenden Transformationsformeln, d. h. (0. 2), (1. 1), (2. 1), (2. 5) und (2. 6), so bekommt man das folgende Funktionalgleichungssystem:

$$\begin{aligned} S_j(\bar{A}_t^k v^t, \sigma, A_k^t \partial_t \sigma + A_{sk}^r \bar{A}_t^s v^t \partial_{v^r} \sigma, A_k^t \partial_{v^t} \sigma, A_k^r \bar{A}_s^i A_m^t \Gamma^{*s}_{r\ t} + A_{km}^r \bar{A}_r^i) = \\ = A_j^r S_r(v^k, \sigma, \partial_k \sigma, \partial_{v^k} \sigma, \Gamma^{*i}_{k\ m}), \end{aligned} \tag{2. 7}$$

wo für die A_k^t

$$\operatorname{Det}(A_k^t) \neq 0 \tag{2. 7a}$$

bestehen soll.

In einem beliebigen Linienelement $(\overset{(0)}{x^i}, \overset{(0)}{v^i})$ können $\sigma, \partial_t \sigma, \partial_{v^t} \sigma, A_{sk}^r$ einen beliebigen Wert haben, da (2. 7) für jeden Skalar σ bestehen soll. Abgesehen von der Bedingung (2. 7a), können auch die A_k^t beliebig gewählt werden. Die Größen $\sigma, \partial_t \sigma, \partial_{v^t} \sigma, A_k^t$ und A_{sk}^r sollen also in (2. 7) als unabhängige Veränderliche betrachtet werden.

Jetzt substituieren wir in die Gleichung (2. 7) $A_k^t = \delta_k^t$ und $A_{sk}^r = -\Gamma^{*r}_{s\ k}$. Offenbar ist diese Substitution zugelassen, da in einem bestimmten Linienelement $(\underset{(0)}{x^i}, \underset{(0)}{v^i})$ $\Gamma^{*k}_{i\ m}$ ebensoviel Komponenten wie A^r_{sk} hat und (2.7a) erfüllt ist. Die Substitution ergibt wegen $\overline{A}^t_k = \delta^t_k$:

$$S_j(v^k, \sigma, \sigma|_k, \partial_{v^k}\sigma, 0) = S_j(v^k, \sigma, \partial_k\sigma, \partial_{v^k}\sigma, \Gamma^{*i}_{k\ m}) \tag{2.8}$$

mit

$$\sigma|_k \overset{\text{def}}{=} \partial_k\sigma - \Gamma^{*r}_{s\ k} v^s \partial_{v^r}\sigma. \tag{2.9}$$

Die Gleichung (2.8) zeigt, daß die kovariante Ableitung $\nabla_j\sigma$ von den $\Gamma^{*i}_{k\ m}$ nur durch $\sigma|_k$ abhängig sein kann. Auf Grund der Definitionsgleichung (2.9) kann leicht bewiesen werden, daß $\sigma|_k$ ein kovarianter Vektor ist. Führen wir die Bezeichnung

$$F_j(v^k, \sigma, \sigma|_k, \partial_{v^k}\sigma) \overset{\text{def}}{=} S_j(v^k, \sigma, \sigma|_k, \partial_{v^k}\sigma, 0)$$

ein, so wird aus (2.8)

$$S_j(v^k, \sigma, \partial_k\sigma, \partial_{v^k}\sigma, \Gamma^{*i}_{k\ m}) = F_j(v^k, \sigma, \sigma|_k, \partial_{v^k}\sigma)$$

und (2.7) geht in das Funktionalgleichungssystem

$$F_j(\overline{A}^k_r v^r, \sigma, A^r_k\sigma|_r, A^r_k\partial_{v^r}\sigma) = A^r_j F_r(v^k, \sigma, \sigma|_k, \partial_{v^k}\sigma) \tag{2.10}$$

über.

Aus (2.10) folgt nach der Forderung F3. der

Satz 1. *Die kovariante Ableitung eines Skalars σ ist nur von σ, $\sigma|_k$, $\partial_{v^k}\sigma$ und von v^k abhängig.*

$$\nabla_j\sigma = F_j(v^k, \sigma, \sigma|_k, \partial_{v^k}\sigma).$$

Die Funktionen F_j sind Lösungen des Funktionalgleichungssystems (2.10).

Eine genauere explizite Form der kovarianten Ableitung der Skalare kann leicht bestimmt werden, wenn noch die folgende Bedingung gestellt wird:

B) *Die kovariante Ableitung eines Skalars σ ist von den v^i nur durch $\sigma|_k$ abhängig.*

Die Bedingung B) ist offenbar von den Forderungen F1.—F3. unabhängig, da z. B.

$$\nabla_j\sigma \overset{\text{def}}{=} \sigma|_t v^t \sigma|_j$$

eine kovariante Ableitung definiert, die den Forderungen F1.—F3. genügt, die aber B) nicht befriedigt. Statt $\sigma|_t v^t$ könnte selbstverständlich eine beliebige Funktion der Skalare σ und $\sigma|_t v^t$ gesetzt werden.

Nach der Annahme B) geht (2.10) in die Gleichung

$$F_j(\sigma, A^r_k\sigma|_r, A^r_k\partial_{v^r}\sigma) = A^r_j F_r(\sigma, \sigma|_k, \partial_{v^k}\sigma) \tag{2.11}$$

über.

Da die Gleichung (2.11) bezüglich der Veränderlichen $\sigma|_t$, $\partial_{\dot{v}^t}\sigma$ eine Identität sein muß[5]), bekommt man aus (2.11) nach der Substitution

$$\sigma|_t = \delta^1_t, \quad \partial_{\dot{v}^t}\sigma = \delta^2_t$$

die Formel

$$F_j(\sigma, A^1_k, A^2_k) = c_r(\sigma) A^r_j, \quad c_r(\sigma) \overset{\text{def}}{=} F_r(\sigma, \delta^1_k, \delta^2_k). \tag{2.12}$$

Da aber die linke Seite dieser Identität A^r_j nicht enthält, falls $r \neq 1, 2$, so muß $c_r \equiv 0$ $(r \neq 1, 2)$ bestehen. Schreiben wir jetzt in (2.12) $\sigma|_k$ bzw. $\partial_{\dot{v}^k}\sigma$ statt A^1_k bzw. A^2_k, so erhält man

$$\nabla_j \sigma = F_j(\sigma, \sigma|_k, \partial_{\dot{v}^k}\sigma) = c_1(\sigma)\sigma|_j + c_2(\sigma)\partial_{\dot{v}^j}\sigma. \tag{2.13}$$

$c_1(\sigma)$ und $c_2(\sigma)$ sind beliebige stetige Funktionen von σ und selbstverständlich sind sie selbst Skalare. Man kann sich leicht überzeugen, daß die durch die Formel (2.13) bestimmte kovariante Ableitung den Funktionalgleichungen (2.10) bzw. den Forderungen F1.—F3. und der Bedingung B) genügt. Aus (2.13) folgt also der

Satz 2. *Bestehen die Forderungen* F1.—F3. *und* B), *so bestimmt* (2.13) *die allgemeinste Form von* $\nabla_j \sigma$.

In einem Punktraum ist $\partial_{\dot{v}^k}\sigma \equiv 0$ und auch B) ist selbstverständlich immer erfüllt. Nach dem Satz 2 ist in den Punkträumen die allgemeinste Form der kovarianten Ableitung der Skalare

$$\nabla_k \sigma = c(\sigma)\partial_k \sigma. \tag{2.14}$$

§ 3. Kovariante Ableitung der Vektoren.

In diesem Paragraphen bestimmen wir die Form der kovarianten Ableitung der kontravarianten und der kovarianten Vektoren. Bezeichnen wir die kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors B^i mit $\nabla_j B^i$, so ist nach F1.

$$\nabla_j B^i \overset{\text{def}}{=} T^i_{\ j}(v^k, B^k, \partial_h B^k, \partial_{\dot{v}^h} B^k, \Gamma^{*k}_{h\ m}). \tag{3.1}$$

Nach einer zulässigen Koordinatentransformation (0.1) haben wir:

$$\overline{\nabla_j B^i} = T^i_{\ j}(\bar{v}^k, \bar{B}^k, \partial_{\bar{h}} \bar{B}^k, \partial_{\dot{\bar{v}}^h} \bar{B}^k, \bar{\Gamma}^{*k}_{h\ m}), \tag{3.2}$$

da die Funktionen $T^i_{\ j}$ vom Koordinatensystem unabhängig sind. Nach F3. sind die Funktionen $T^i_{\ j}$ in allen Veränderlichen stetig.

---

[5]) Die unabhängigen Veränderlichen in (2.11) sind $\partial_k \sigma$ und $\partial_{\dot{v}^t}\sigma$. Da aber nach (2.9) $\sigma|_k$ eine lineare Funktion von $\partial_k \sigma$ ist, kann in (2.11) statt $\partial_k \sigma$ der Vektor $\sigma|_k$ als unabhängige Veränderliche betrachtet werden.

Nach der Forderung F2. ist $\nabla_j B^i$ ein gemischter Tensor zweiter Stufe. Somit hat $\nabla_j B^i$ die Transformationsformel:

$$\overline{\nabla_j \overline{B}^i} = \overline{A}^i_r A^s_j \nabla_s B^r. \tag{3.3}$$

Aus (3.2) und (3.3) erhält man für die Funktionen $T^i_{\ j}$ das charakteristische Funktionalgleichungssystem, wenn $\overline{v}^k$, $\overline{B}^k$, $\partial_{\overline{h}} \overline{B}^k$, $\partial_{\overline{v}^h} \overline{B}^k$ und $\overline{\Gamma}^{*k}_{h\ m}$ mittels v^k, B^k, $\partial_h B^k$, $\partial_{v^h} B^k$ und $\Gamma^{*k}_{h\ m}$ ausgedrückt werden. Die Transformationsformel von $\overline{B}^k$ stimmt mit der von $\overline{v}^k$ überein (vgl. die Formel (0.2)), d. h.

$$\overline{B}^k = \overline{A}^k_r B^r. \tag{3.4}$$

Nach einer partiellen Ableitung auf beiden Seiten von (3.4) nach $\overline{x}^h$ wird:

$$\partial_{\overline{h}} \overline{B}^k = \overline{A}^k_r A^s_h \partial_s B^r + \overline{A}^k_r \partial_{\overline{h}} v^t \partial_{v^t} B^r + \partial_{\overline{h}} \overline{A}^k_r B^r. \tag{3.5}$$

Aus der Formel (2.4) folgt im Hinblick auf (0.2)

$$\partial_{\overline{h}} v^t = A^t_{sh} \overline{v}^s = A^t_{sh} \overline{A}^s_p v^p, \tag{3.6}$$

wo A^t_{sh} durch die dritte Formel von (1.2) bestimmt ist. Schreiben wir jetzt (2.3) in der Form

$$\overline{A}^k_t A^t_p = \delta^k_p,$$

so bekommt man nach einer partiellen Ableitung nach $\overline{x}^h$ und dann nach einer Überschiebung mit $\overline{A}^p_r$:

$$\partial_{\overline{h}} \overline{A}^k_r = -\overline{A}^k_t A^t_{hp} \overline{A}^p_r. \tag{3.7}$$

Substituieren wir nun die entsprechenden Werte aus (3.6) und (3.7) in (3.5), so wird:

$$\partial_{\overline{h}} \overline{B}^k = \overline{A}^k_r A^s_h \partial_s B^r + \overline{A}^k_r A^t_{sh} \overline{A}^s_p v^p \partial_{v^t} B^r - A^t_{hp} \overline{A}^k_t \overline{A}^p_r B^r. \tag{3.8}$$

Nach einer partiellen Ableitung von (3.4) nach $\overline{v}^h$ wird

$$\partial_{\overline{v}^h} \overline{B}^k = \overline{A}^k_r A^s_h \partial_{v^s} B^r. \tag{3.9}$$

Aus (3.2) und (3.3) bekommt man:

$$T^i_{\ j}(\overline{v}^k, \overline{B}^k, \partial_{\overline{h}} \overline{B}^k \partial_{\overline{v}^h} \overline{B}^k, \overline{\Gamma}^{*k}_{h\ m}) = \overline{A}^i_r A^s_j T^r_{\ s}(v^k, B^k, \partial_h B^k, \partial_{v^h} B^k, \Gamma^{*k}_{h\ m}).$$

Beachten wir nun die Transformationsformeln (0.2), (1.1), (3.4), (3.8) und (3.9), so bekommen wir aus unserer letzten Gleichung:

$$\begin{aligned} &T^i_{\ j}(\overline{A}^k_r v^r, \overline{A}^k_r B^r, \overline{A}^k_r A^s_h \partial_s B^r + \overline{A}^k_r A^t_{sh} \overline{A}^s_p v^p \partial_{v^t} B^r - \\ &- A^t_{hp} \overline{A}^k_t \overline{A}^p_r B^r, \overline{A}^k_r A^s_h \partial_{v^s} B^r, \Gamma^{*s}_{r\ t} A^r_h \overline{A}^k_s A^t_m + A^r_{hm} \overline{A}^k_r) = \\ &= \overline{A}^i_r A^s_j T^r_{\ s}(v^k, B^k, \partial_h B^k, \partial_{v^h} B^k, \Gamma^{*k}_{h\ m}). \end{aligned} \tag{3.10}$$

(3. 10) bildet eben das charakteristische Funktionalgleichungssystem für die gesuchten Funktionen $T^i_{\ j}$.

Substituieren wir jetzt in (3. 10) $A^t_k = \delta^t_k$, $A^k_{hm} = -\Gamma^{*k}_{h\ m}$ (diese Substitution ist zulässig, da (2. 7a) erfüllt ist), so geht (3. 10) in die Formel

$$T^i_{\ j}(v^k, B^k, \partial_h B^k, \partial_{v^h} B^k, \Gamma^{*k}_{h\ m}) = T^i_{\ j}(v^k, B^k, B^k|_h, \partial_{v^h} B^k, 0) \tag{3. 11}$$

über, wo $B^k|_h$ durch

$$B^k|_h \overset{\text{def}}{=} \partial_h B^k - \partial_{v^t} B^k \Gamma^{*t}_{s\ h} v^s + \Gamma^{*k}_{r\ h} B^r \tag{3. 12}$$

definiert ist. Man kann leicht verifizieren, daß $B^k|_h$ ein gemischter Tensor zweiter Stufe ist. Mit der Bezeichnung

$$F^i_{\ j}(v^k, B^k, B^k|_h, \partial_{v^h} B^k) \overset{\text{def}}{=} T^i_{\ j}(v^k, B^k, B^k|_h, \partial_{v^h} B^k, 0)$$

bekommt man nach (3. 11) aus (3. 10) und aus (3. 1)

$$\nabla_j B^i = F^i_{\ j}(v^k, B^k, B^k|_h, \partial_{v^h} B^k)$$

und

$$\begin{aligned} &F^i_{\ j}(\bar{A}^k_r v^r, \bar{A}^k_r B^r, \bar{A}^k_r A^s_h B^r|_s, \bar{A}^k_r A^s_h \partial_{v^s} B^r) = \\ &\qquad = \bar{A}^i_r A^s_j F^r_{\ s}(v^k, B^k, B^k|_h, \partial_{v^h} B^k), \end{aligned} \tag{3. 13}$$

wo $F^i_{\ j}$ eben die kovariante Ableitung von B^i bedeutet (vgl. (3. 1) und (3. 11)).

Nehmen wir jetzt an, daß die Bedingung B) die im § 2 für Skalare bedingt war, auch für die kontravarianten Vektoren gültig ist, d. h.

B*) *Die kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors B^i ist von den v^j nur durch $B^i|_k$ abhängig.*

In der Formel (3. 13) sind also nach der Bedingung B*) die Funktionen $F^i_{\ j}$ von den v^k unabhängig. Wenn wir jetzt in diese Formel

$$A^r_k = \varrho \delta^r_k$$

einsetzen, so wird nach (2. 3)

$$\bar{A}^k_t = \varrho^{-1} \delta^k_t$$

und aus (3. 13) wird man die Relation

$$F^i_{\ j}(\varrho^{-1} B^k, B^k|_h, \partial_{v^h} B^k) = F^i_{\ j}(B^k, B^k|_h, \partial_{v^h} B^k) \tag{3. 14}$$

bekommen. Diese Relation beweist aber die Homogenität nullter Dimension von $F^i_{\ j}$ in bezug auf die Veränderlichen B^k. Da aber $F^i_{\ j}$ nach der Forderung F3. in den Veränderlichen B^k stetig ist, folgt aus (3. 14), daß $F^i_{\ j}$ von den B^k überhaupt unabhängig ist. (Vgl. das Lemma von [4] Seite 241.)

Das Funktionalgleichungssystem (3. 13) geht also in das Funktionalgleichungssystem

$$F^i_{\ j}(\overline{A}^k_r A^s_h B^r|_s, \overline{A}^k_r A^s_h \partial_{v^s} B^r) = \overline{A}^i_r A^s_j F^r_s (B^k|_h, \partial_{v^h} B^k) \tag{3.15}$$

über, wo $B^r|_s$ durch (3. 12) bestimmt ist. Unsere Resultate über die kovariante Ableitung der kontravarianten Vektoren in den $\mathfrak{L}_n$-Räumen können wir im folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 3. *Die kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors B^i ist allein von $B^a|_b$ und $\partial_{v^b} B^a$ abhängig:*

$$\nabla_j B^i = F^i_{\ j}(B^a|_b, \partial_{v^b} B^a). \tag{3.16}$$

$B^a|_b$, $\partial_{v^b} B^a$ und $\nabla_j B^i$ sind gemischte Tensoren zweiter Stufe und für $F^i_{\ j}$ besteht das Funktionalgleichungssystem (3. 15).

Der Fall der kovarianten Vektoren C_i kann in vollständig ähnlicher Weise behandelt werden, nur die Transformationsformel von C_i und die Transformationsformeln der partiellen Ableitungen $\partial_k C_i$ und $\partial_{v^k} C_i$ werden eine andere Form haben, als im kontravarianten Fall. Aus

$$\overline{C}_i = A^r_i C_r \tag{3.17}$$

folgt im Hinblick auf (3. 6) nach einer partiellen Ableitung nach $\overline{x}^k$ bzw. $\overline{v}^k$:

$$\partial_{\overline{k}} \overline{C}_i = A^r_i A^s_k \partial_s C_r + A^r_i A^t_{sk} \overline{A}^s_p v^p \partial_{v^t} C_r + A^r_{ik} C_r, \tag{3.18}$$

$$\partial_{\overline{v}^k} \overline{C}_i = A^r_i A^s_k \partial_{v^s} C_r. \tag{3.19}$$

Nach den Forderungen F1.—F3. wird die kovariante Ableitung von C_i von v^j, C_j, $\partial_k C_j$, $\partial_{v^k} C_j$ und $\Gamma^{*k}_{j\ m}$ abhängig sein:

$$\nabla_j C_i = T_{ij}(v^k, C_k, \partial_h C_k, \partial_{v^h} C_k, \Gamma^{*h}_{k\ m}).$$

Das dem (3. 10) entsprechende Funktionalgleichungssystem für T_{ij} ist:

$$\begin{aligned} T_{ij}(\overline{A}^k_t v^t, A^t_k C_t, A^t_k A^s_h \partial_s C_t + A^r_h A^t_{sk} \overline{A}^s_p v^p \partial_{v^t} C_r + A^r_{hk} C_r, A^t_k A^s_h \partial_{v^s} C_t, \\ \Gamma^{*s}_{r\ t} A^r_h \overline{A}^k_s A^t_m + A^t_{hm} \overline{A}^k_t) = A^t_i A^s_j T_{ts}(v^k, C_k, \partial_h C_k, \partial_{v^h} C_k, \Gamma^{*k}_{h\ m}). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Nach der Substitution $A^t_k = \delta^t_k$, $A^k_{tm} = -\Gamma^{*k}_{t\ m}$ bekommt man wieder, daß T_{ij} von $\partial_h C_k$ und $\Gamma^{*k}_{h\ m}$ nur durch

$$C_k|_h \overset{\text{def}}{=} \partial_h C_k - \partial_{v^r} C_k \Gamma^{*r}_{s\ h} v^s - \Gamma^{*r}_{k\ h} C_r \tag{3.20}$$

abhängig sein kann. Man kann leicht verifizieren, daß die $C_k|_h$ zweimal kovariante Tensoren sind. Es besteht der folgende

Satz 4. *Die kovariante Ableitung eines kovarianten Vektors ist von* v^k, C_k, $C_k|_h$ *und* $\partial_{v^h} C_k$ *abhängig:*

$$\nabla_j C_i = F_{ij}(v^k, C_k, C_k|_h, \partial_{v^h} C_k). \tag{3.21}$$

Es sind $\nabla_j C_i$, $\partial_{v^i} C_j$ *und* $C_k|_h$ *rein kovariante Tensoren zweiter Stufe; für* F_{ij} *besteht das folgende Funktionalgleichungssystem:*

$$\begin{aligned} &F_{ij}(\bar{A}^k_r v^r, A^r_k C_r, A^r_k A^s_h C_r|_s, A^r_k A^s_h \partial_{v^s} C_r) = \\ &\qquad = A^r_i A^s_j F_{rs}(v^k, C_k, C_k|_h, \partial_{v^h} C_k). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Die Annahme, daß eine der Bedingung B*) analoge Bedingung auch für den kovarianten Fall gültig ist, besagt, daß die Funktionen F_{ij} in (3.21) von den v^k unabhängig sind. Die Abhängigkeit von C_k ist aber noch möglich, wie das durch das Beispiel

$$\nabla_j C_i = C_i|_j - C_i C_j \tag{3.23}$$

unmittelbar verifiziert werden kann[6]).

Die Sätze 1.—4. drücken aus, daß die allgemeinste kovariante Ableitung aus gewissen Grundoperationen zusammengesetzt ist. Diese Grundoperationen sind die partiellen Ableitungen nach v^k und die durch (2.9), (3.12) und (3.20) bestimmten Operationen, die wir kurz mit „$|_k$" bezeichnen wollen. ∂_{v^k} und $|_k$ sind tensorielle Operationen, sie erhöhen die kovariante Stufenzahl um 1. Diese Operationen sind die fundamentalen kovarianten Ableitungen im $\mathfrak{L}_n$-Raum. Diese Resultate fassen wir im folgenden Satz zusammen.

Satz 5. *Die den Forderungen* F1.—F3. *genügende kovariante Ableitung der Skalare und Vektoren ist durch die fundamentalen kovarianten Ableitungen* „∂_{v^k}" *und* „$|_k$" *ausdrückbar. Diese fundamentalen kovarianten Ableitungen nennen wir die einfachsten kovarianten Ableitungen des* $\mathfrak{L}_n$*-Raumes, die den Forderungen* F1.—F3. *genügen.*

§ 4. Das Multiplikationsgesetz der kovarianten Ableitung.

Bisher haben wir bei der Bestimmung der kovarianten Ableitung der Skalare und der Vektoren die Forderungen F1.—F3. und die Bedingung B) bzw. B*) benützt. Die Sätze 3 und 4, die aus F1.—F3. und B*) abgeleitet wurden, bestimmen die kovariante Ableitung der Vektoren noch nicht vollständig. Wenn wir noch fordern, daß die kovarianten Ableitungen einem gewissen Multiplikationsgesetz genügen sollen, so kann in manchen Fällen auf

[6]) Die Formel (3.23) gibt auch in den Punkträumen eine kovariante Ableitung. Vgl. [4], letzte Formel der Seite 242.

Grund des Multiplikationsgesetzes die allgemeinste Form der kovarianten Ableitung bestimmt werden. Unsere Forderung ist:

F4. *Die kovariante Ableitung des Skalars $B^i C_i$ (B^i und C_i bedeuten einen kontra- bzw. einen kovarianten Vektor) soll durch*

$$B^i,\ C_i,\ \bigtriangledown_k B^i,\ \bigtriangledown_k C_i,\ \partial_{\dot{v}k} B^i,\ \partial_{\dot{v}k} C_i,\ B^i|_k,\ C_i|_k$$

ausdrückbar sein.

Aus F4. folgt also, daß

$$(4.1) \qquad \bigtriangledown_k (B^i C_i) = G_k(B^a, C_a, \bigtriangledown_b B^a, \bigtriangledown_b C_a, \partial_{\dot{v}b} B^a, \partial_{\dot{v}b} C_a, B^a|_b, C_a|_b)$$

besteht und $\bigtriangledown_k (B^i C_i)$ nach F2. ein kovarianter Vektor ist, da $B^i C_i$ einen Skalar bedeutet.

Das Multiplikationsgesetz der fundamentalen kovarianten Ableitungen ist — wie das leicht bewiesen werden kann, das Leibnizsche Gesetz, d. h.

$$(B^i C_i)|_k = B^i|_k C_i + C_i|_k B^i,$$
$$\partial_{\dot{v}k}(B^i C_i) = C_i \partial_{\dot{v}k} B^i + B^i \partial_{\dot{v}k} C_i.$$

Wir wollen im folgenden die allgemeinste kovariante Ableitung bestimmen, deren Multiplikationsgesetz das Leibnizsche Gesetz ist. Hier werden wir also den folgenden einfachen Fall von F4. untersuchen:

F4*. *Die kovariante Ableitung des Skalars $B^i C_i$ soll*

$$(4.2) \qquad \bigtriangledown_k (B^i C_i) = C_i \bigtriangledown_k B^i + B^i \bigtriangledown_k C_i$$

sein.

Die Gleichung (4.2) hat offenbar die Form (4.1). Nach der Formel (2.13) ist $\bigtriangledown_k (B^i C_i)$ von der Form:

$$(4.3) \qquad \bigtriangledown_k (B^i C_i) = c_1 (B^i C_i)|_k + c_2 \partial_{\dot{v}k} (B^i C_i),$$

wo c_1 und c_2 nach (2.13) noch zu bestimmende Funktionen des skalaren Produkts $B^i C_i$ sind.

Da die fundamentalen kovarianten Ableitungen $|_k$ und $\partial_{\dot{v}k}$ dem Leibnizschen Multiplikationsgesetz genügen, bekommt man auf Grund von (4.2) aus der Formel (4.3):

$$(4.4) \qquad C_i \bigtriangledown_k B^i + B^i \bigtriangledown_k C_i = c_1 (B^i|_k C_i + C_i|_k B^i) + c_2 (C_i \partial_{\dot{v}k} B^i + B^i \partial_{\dot{v}k} C_i).$$

Beachten wir jetzt die Definitionsgleichungen (3.12) und (3.20), so bekommen wir von der Relation (4.4):

$$(4.5) \qquad \begin{aligned} C_i \bigtriangledown_k B^i + B^i \bigtriangledown_k C_i &= c_1 [C_i (\partial_k B^i - \overset{*}{\Gamma}{}^{s}_{r\,k} v^r \partial_{\dot{v}s} B^i) + \\ &+ B^i (\partial_k C_i - \overset{*}{\Gamma}{}^{s}_{r\,k} v^r \partial_{\dot{v}s} C_i)] + c_2 [C_i \partial_{\dot{v}k} B^i + B^i \partial_{\dot{v}k} C_i], \end{aligned}$$

wo

(4. 5a) $$c_\alpha = c_\alpha(\sigma), \quad \sigma = B^t C_t, \qquad (\alpha = 1, 2)$$

bedeutet.

(4. 5) ist ein Funktionalgleichungssystem für die Funktionen $\nabla_k B^i$ und $\nabla_k C_i$ mit den Veränderlichen:

$$v^i, B^i, C_i, \partial_k B^i, \partial_k C_i, \partial_{\dot{v}^k} B^i, \partial_{\dot{v}^k} C_i.$$

Wählen wir jetzt für C_i den Vektor $C_i = \delta_i^j$ (j: fix), so werden nach (4. 5a) c_α $(\alpha = 1, 2)$ allein von B^j abhängig sein, und (4. 5) geht in das Gleichungssystem

(4. 6) $$\nabla_k B^j = c_1(B^j)(\partial_k B^j - \Gamma^{*s}_{r\ k} v^r \partial_{\dot{v}^s} B^j) + c_2(B^j)\partial_{\dot{v}^k} B^j - B^i \nabla_k \delta_i^j$$

(nicht summieren auf j)

über.

Bemerkung. Selbstverständlich bedeutet in (4. 6) das Glied $\nabla_k \delta_i^j$ nicht die kovariante Ableitung des Kroneckerschen Symbols, sondern $\nabla_k \delta_i^j$ soll die kovariante Ableitung von C_i bedeuten, wenn nachträglich $C_i = \delta_i^j$ (j: fix) gesetzt wird.

Nun ist aber nach dem Satz 3 $\nabla_k B^j$ von B^j nur durch $B^j|_k$ abhängig, d. h. B^j kann nur in einem Glied von der Form $\Gamma^{*j}_{i\ k} B^i$ vorkommen. Das bedeutet aber, daß in (4. 6) die Glieder

(4. 7) $$c_1(B^j)\partial_k B^j, \quad c_2(B^j)\partial_{\dot{v}^k} B^j$$

nur dann figurieren können, wenn die c_α von B^j unabhängig sind. c_1 und c_2 sind also Konstanten. (4. 6) können wir somit auf Grund von (3. 12) in der Form

$$\nabla_k B^j = c_1 B^j|_k + c_2 \partial_{\dot{v}^k} B^j - B^i(c_1 \Gamma^{*j}_{i\ k} + \nabla_k \delta_i^j)$$

bestimmen. Nach dem Satz 3 muss aber dann

(4. 8) $$\nabla_k \delta_i^j = -c_1 \Gamma^{*j}_{i\ k}$$

bestehen, und für $\nabla_k B^j$ bekommt man die Formel:

(4. 9) $$\nabla_k B^j = c_1 B^j|_k + c_2 \partial_{\dot{v}^k} B^j \qquad c_\alpha = konst.$$

Substituieren wir jetzt die Formel (4. 9) in (4. 4), so bekommt man für $B^i = \delta_j^i$ (j: fix):

(4. 10) $$\nabla_k C_j = c_1 C_j|_k + c_2 \partial_{\dot{v}^k} C_j \qquad c_\alpha = konst.$$

Es kann unmittelbar verifiziert werden, daß die kovarianten Ableitungen (4. 9) und (4. 10) die Gleichungen (3. 10), (3. 10a) und (4. 4) und selbstverständlich auch die Forderungen F1.—F4*. erfüllen. Für $C_i = \delta_i^j$ (j: fix) bekommt man nach (3. 20) und (4. 10) die Relation (4. 8). Es ist somit der folgende Satz gültig:

Satz 6. *Die allgemeinste Form der kovarianten Ableitungen der Vektoren mit dem Multiplikationsgesetz* (4. 2) *ist durch die Formeln* (4. 9) *und* (4. 10) *bestimmt.*

Die Formel (4. 9) bestimmt nicht die allgemeinste kovariante Ableitung die homogen linear in den Veränderlichen $B^j|_k, \partial_{\dot{e}^k} B^j$ ist und die die Forderungen F1.—F3. und B*) befriedigt. Das kann durch das Beispiel (Vgl. [4] Satz 7 auf S. 246)

$$(4.11) \qquad \nabla_k B^j = c_1 B^j|_k + c_2 \partial_{\dot{e}^k} B^j + \delta_k^j (c_3 B^t|_t + c_4 \partial_{\dot{e}^t} B^t) \qquad c_\varrho = konst.$$

unmittelbar verifiziert werden, da (4. 11) in den $B^i, \partial_k B^i, \partial_{\dot{e}^k} B^i$ linear ist.

Das Bestehen der Relation (4. 2) *ist also eine stärkere Forderung als die Linearität.*

Wir wollen noch bemerken, daß ein Multiplikationsgesetz von der Form (4. 1) die kovariante Ableitungen $\nabla_j B^i$ und $\nabla_j C_i$ miteinander verknüpft, d. h. $\nabla_j B^i$ und $\nabla_j C_i$ können nicht voneinander unabhängig bestimmt werden. Das zeigt sich auch in den Formeln (4. 9) und (4. 10), denn die Konstanten c_1 und c_2 müssen in diesen Formeln übereinstimmen.

Literatur.

[1] J. Aczél, Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte V, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **8** (1957), 53—64.

[2] S. Gołąb, Über den Begriff der kovarianten Ableitung, *Nieuw Arch. vor Wisk.* (3) **2** (1954), 90—96.

[3] S. Gołąb, Dérivée covariante des objets géométriques, *Ann. Polon. Math.* **1** (1955), 107—113.

[4] A. Moór, Über die kovariante Ableitung der Vektoren, *Acta Sci. Math. Szeged* **19** (1958), 237—246.

[5] J. A. Schouten und D. J. Struik, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie I. *Groningen*, 1935.

(Eingegangen am 17 Dezember, 1958.)