Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale. I.

Herrn Professor O. Varga zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von F. SZÁSZ (Budapest).

§ 1. Einleitung.

Wir werden die im Titel erwähnten (assoziativen) Ringe kurz *MHR*-Ringe nennen.* Diese Note ist der Untersuchung der einfachsten Eigenschaften der *MHR*-Ringe gewidmet. Es wird hier bewiesen, daß das (Jacobsonsche) Radikal eines *MHR*-Ringes stets ein Nilideal[1]) ist, und daß ein halbeinfacher *MHR*-Ring sowohl eine direkte Zerlegung in minimale Rechtsideale, als auch eine in sich gegenseitig annullierende einfache *MHR*-Ringe zuläßt. Ein einfacher *MHR*-Ring ist entweder ein Zeroring der Ordnung p (für eine Primzahl p), oder ist einem dichten Unterringe des Ringes aller linearen Transformationen von endlichem Rang eines Vektorraumes über einem Schiefkörper isomorph. Dies ist eine Verallgemeinerung des Struktursatzes von WEDDERBURN—ARTIN (vgl. z. B. [6] S. 145), und ein Sonderfall eines Satzes von JACOBSON [3] über die primitiven Ringe mit von Null verschiedenem Sockel.[2])

Wir verallgemeinern einen Satz unserer Note [5], der eine Verallgemeinerung eines Satzes von L. FUCHS und T. SZELE ist. Diese beiden Autoren haben in der Arbeit [2] bewiesen, daß ein Ring A dann und nur dann ein halbeinfacher Ring mit Minimalbedingung für Rechtsideale ist, wenn jedes Rechtsideal R von A ein linksseitiges Einselement besitzt. Bekanntlich ist jedes Rechtsideal R eines Ringes A mit Minimalbedingung für Rechtsideale als eine direkte Summe

$$R = eA + R_1$$

*) Der Stoff dieser Arbeit stimmt mit einem Teil der Dissertation des Verfassers überein.

1) Ein Nilring ist ein Ring mit lauter nilpotenten Elementen, und ein Zeroring A ist ein Ring mit $A^2 = 0$.

2) Die Nummern in eckigen Klammern verweisen auf die Literatur am Ende dieser Note.

darstellbar, wobei $e^2 = e$ (nicht notwendig $\neq 0$) und R_1 ein nilpotentes Rechtsideal von A ist [1]. Wir haben in der Note [5] alle Ringe mit dieser Eigenschaft bestimmt, und wir werden hier noch allgemeinere Sätze beweisen. Aus diesen Sätzen erhält man als Spezialfall Satz 4 von [5] und Satz 1 von [2].

Ich möchte meinen herzlichen Dank Herrn Professor Dr. L. FUCHS für seine wertvollen Bemerkungen aussprechen. Herrn Dr. A. KERTÉSZ danke ich dafür, daß er meine Aufmerksamkeit auf die Untersuchung der *MHR*-Ringe gelenkt hat.

§ 2. Vorbereitungen.

Unter einem Ring verstehen wir in dieser Note stets einen assoziativen Ring. Ein halbeinfacher Ring sei, wie üblich, als ein Ring ohne Radikal erklärt, wobei wir unter dem Radikal eines Ringes stets das Jacobsonsche Radikal verstehen. Ein *MHR*-Ring ist ein Ring mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale. Offenbar ist jeder Faktorring eines *MHR*-Ringes ebenfalls ein *MHR*-Ring.

Das folgende Beispiel zeigt die Existenz eines *MHR*-Ringes, in dem die Minimalbedingung für Rechtsideale nicht gilt.

Beispiel 1. Der Ring A sei isomorph der Algebra A_1 über dem rationalen Zahlenkörper K_0 mit den Basiselementen f_{ij} $(i = 1, 2, 3, \ldots;\ j = 1, 2, 3, \ldots)$ und mit $f_{ij}, f_{jk} = f_{ik}$, $f_{ij} \cdot f_{kl} = 0$ für $j \neq k$. Wir betrachten A als einen Ring ohne den Operatorenbereich K_0. Wir zeigen, daß A ein einfacher (und halbeinfacher) *MHR*-Ring ist. Es sei $I \neq 0$ ein zweiseitiges Ideal von A und

$$0 \neq s = \sum_{i,j} s_{ij} f_{ij} \in I, \quad s_{ij} \in K_0.$$

Mit einem $s_{kl} \neq 0$ erhält man $s_{kl}^{-1} f_{mk} s f_{ln} = f_{mn} \in I$ für alle m, n d. h. $I = A$. Die Elemente $s_{\alpha_1} f_{i\alpha_1} + \cdots + s_{\alpha_n} f_{i\alpha_n}$ bilden für jeden festen Index i ein minimales Rechtsideal R_i von A, und aus $A = \sum_{i=1}^{\infty} R_i$ folgt, dass A rechtsseitig vollständig reduzibel ist. A ist also ein *MRH*-Ring. Es sei $K_i = \sum_{j=i}^{\infty} R_j$. Dann ist $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$ eine unendliche absteigende Kette von Rechtsidealen in A, und A ist somit ein *MHR*-Ring ohne Minimalbedingung für Rechtsideale.

Wir zeigen nun die Existenz eines *MHR*-Ringes, in dem weder die Minimalbedingung für Rechtsideale, noch die Minimalbedingung für Hauptlinksideale gilt.

Beispiel 2. Es sei S der durch die f_{ij} mit $1 \leqq j \leqq n$ erzeugten Teilalgebra von A_1 isomorph, wobei n eine feste natürliche Zahl ist. Dann gilt in S weder die Minimalbedingung für Rechtsideale, noch die Minimalbedingung für Linksideale. Die Hauptlinksideale $(2^k f_{n+1\,j})_l$ von S bilden nämlich für $k = 1, 2, 3, \ldots$ eine unendliche absteigende Kette, denn wir betrachten A und S ohne den Operatorenbereich K_0. Da S die direkte Summe der minimalen Rechtsideale $R_i' = (f_{i_1}, \ldots, f_{i_n})_r$ ist, ist S rechtsseitig vollständig reduzibel. S ist also ein *MHR*-Ring mit einem rechtsseitigen Einselement $f = f_{11} + \cdots + f_{nn}$ und mit dem Radikal $J = (\ldots, f_{ij}, \ldots)_r$ wobei $i \geqq n+1$ und $j \leqq n$ besteht. Jedes Rechtsideal von S ist in Bezug auf K_0 zulässig.[3])

Wir betrachten nun auch einen nichtnilpotenten Nilring A und einen Unterring S von A. Der Unterring S ist ein nichtnilpotenter *MHR*-Ring.

Beispiel 3. Die Erzeugenden des Ringes A sind die Elemente a_{ij} ($i = 1, 2, 3, \ldots;\ j = 1, 2, 3, \ldots$) mit $a_{ij} + a_{ij} = a_{ij}^2 + a_{i-1\,j} = a_{1j}^{j+1} = a_{ij} \cdot a_{kl} = a_{kl} \cdot a_{ij} = 0$ $(j \neq l)$. Der kommutative Nilring A ist wegen $0 \neq a_{1n}^n \in A^n$ kein nilpotenter Ring und wegen $(a_{1j})_r \supset (a_{1j}a_{2j})_r \supset (a_{1j}a_{2j}a_{3j})_r \supset \cdots$ kein *MHR*-Ring. Der Unterring S sei durch die Elemente $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots$ erzeugt. Dann ist $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots)_r^S \supset (a_{12}, a_{13}, \ldots)_r^S \supset (a_{13}, \ldots)_r^S \supset \cdots$ eine unendliche absteigende Kette von Rechtsidealen des Ringes S, der wegen $0 \neq a_{1n}^n \in S^n$ ebenfalls kein nilpotenter Ring ist. Jedes Element des Ringes S hat die Gestalt $a_{1i_1}^{kj} + \cdots + a_{1i_n}^{k_n}$ $(k_n < i_n)$. S ist also ein *MHR*-Ring, der gleichzeitig ein nichtnilpotenter Nilring ist.

Hilfssatz 1. *Ein MHR-Ring A besitzt minimale Rechtsideale.*

BEWEIS. Ist R ein minimales Hauptrechtsideal von A, so ist R ein minimales Rechtsideal von A, da aus $R \supset R_1 \neq 0$ und $0 \neq r_1 \in R_1$ offenbar $0 \subset (r_1)_r \subset R$ folgt, wobei R_1 ein Rechtsideal von A ist.

Hilfssatz 2. *Ein minimales Rechtsideal R eines Ringes A ist entweder nilpotent und zwar ist dann schon $R^2 = (0)_r$, oder wird durch ein idempotentes Element $e \neq 0$ erzeugt ($R = eA$).*

Beweis ist wohlbekannt (vgl. [6], [3]).

Satz 1. *Das Radikal J eines MHR-Ringes A ist ein Nilideal.*

BEWEIS. Aus $e^2 = e \in J$ folgt die Existenz eines Elementes $x \in A$ mit $e + x - ex = 0$. Da $e = e^2 = e^2 + (e - e^2)x = e(e + x - ex) = 0$ ist, enthält J

---

[3]) Der Ring S ist eine Verallgemeinerung des Koethe'schen—Hopkins'schen Beispieles. Es sei $m > n$. Ist der Unterring S_1 von S der durch die f_{ij} erzeugten Teilalgebra von A_1 ($i \leqq n$; $j \leqq m$) isomorph, so gilt in S_1 die Minimalbedingung für Rechtsideale, aber nicht die Minimalbedingung für Hauptlinksideale.

kein von Null verschiedenes idempotentes Element. Ist nun R ein minimales Rechtsideal von A, so besteht $RJ=0$. Aus $RJ \subseteq R$ folgt nämlich entweder $RJ=R$ oder $RJ=0$. Ist aber $RJ=R$, so gibt es ein $r \in R$ mit $rJ=R \neq 0$ und ein $j \in J$ mit $rj=r$. Nimmt man ein $y \in A$ mit $j+y-jy=0$, so erhält man $r=rj=rj+(r-rj)y=r(j+y-jy)=0$ und $rJ=R=0$, was unmöglich ist. Somit besteht $RJ=0$.

Es sei N die Summe aller zweiseitigen Nilideale von A. Dann ist N ebenfalls ein Nilideal von A, da die Summe zweier Nilideale wiederum ein Nilideal ist. (Vgl. z. B. [3].) Dann besteht $N \subseteq J$. Das Radikal von A/N ist offenbar J/N. Ist $J \neq N$, so hat A/N minimale Rechtsideale $R/N \leqq J/N$. Das Rechtsideal $x(R/N)$ ist für jedes $x \in A$ entweder ein minimales Rechtsideal von A/N, oder besteht $x(R/N)=N/N=\overline{0}$. Die Summe N_1/N aller in J/N liegenden minimalen Rechtsideale R/N von A/N ist wegen des Hilfssatzes 2 ein zweiseitiges Nilideal, für das wegen der obigen Bemerkung offenbar $(R/N)(J/N)=\overline{0}$ und somit auch $N_1^2 \subseteq N$ gilt. Aus $J \neq N$ folgt also die Existenz eines grösseren Nilideales $N_1 \neq N$, was der Maximalität von N widerspricht. Das Radikal $J(=N)$ ist also ein Nilideal.

§ 3. Struktursätze für *MHR*-Ringe.

Wir werden in diesem § die halbeinfachen und die einfachen *MHR*-Ringe untersuchen.

Satz 2. *Ein halbeinfacher MHR-Ring A ist die direkie Summe minimaler Rechtsideale. A ist die direkte Summe sich gegenseitig annullierender einfacher (und auch halbeinfacher) MHR-Ringe.*

BEWEIS. Der Ring A besitzt minimale Rechtsideale, und diese sind von der Gestalt eA mit $e^2=e\neq 0$. Es gilt offenbar $A=\bigcup_{a_\alpha \in A} (a_\alpha)_r$. Ist $(a_\alpha)_r$ kein minimales Rechtsideal in A, so enthält $(a_\alpha)_r$ ein minimales Rechtsideal e_1A mit $e_1^2=e_1\neq 0$. Aus einer linksseitigen Peirceschen Zerlegung erhält man $(a_\alpha)_r=e_1A+(1-e_1)(a_\alpha)_r$. Hier läßt sich $(1-e_1)(a_\alpha)_r=\{y-e_1y \mid y \in (a_\alpha)_r\}$ als ein Hauptrechtsideal $(b_\alpha)_r=(a_\alpha-e_1a_\alpha)_r$ darstellen. Ist $(b_\alpha)_r$ kein minimales Rechtsideal von A, so enthält $(b_\alpha)_r$ ein minimales Hauptrechtsideal e_2A mit $e_2^2=e_2\neq 0$ und mit $(b_\alpha)_r=e_2A+(c_\alpha)_r$. Die absteigende Kette $(a_\alpha)_r \supset (b_\alpha)_r \supset \supset (c_\alpha)_r \supset \cdots$ bricht nach endlich vielen Gliedern ab, und somit ist $(a_\alpha)_r$ die direkte Summe endlich vieler minimaler Rechtsideale $e_1A, \ldots, e_nA$, d. h. $A=\bigcup_{a_\alpha \in A} (a_\alpha)_r$ stimmt mit seinem Sockel überein. Also läßt sich A als die direkte Summe seiner minimalen Rechtsideale darstellen. Die Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ der minimalen Rechtsideale, die in einer direkten Zerlegung von A als direkte

Summanden vorkommen, ist eine Invariante von A. $\mathfrak{m}$ wird die Dimension des rechtsseitig vollständig reduziblen Ringes A genannt. (Vgl. [3] und [4].)

Bekanntlich wird ein minimales Rechtsideal R von A bei einem Operatorhomomorphismus entweder auf $(0)_r$ oder auf ein zu R operatorisomorphes Rechtsideal R_1 abgebildet, wobei der Operatorenbereich A ist. Teilen wir die minimalen Rechtsideale von A in Klassen K_α $(\alpha \in \Gamma)$ A-isomorpher minimaler Rechtsideale ein, so bilden bekanntlich die Summen S_α aller in einer bestimmten Klasse K_α liegenden minimalen Rechtsideale einfache Ringe, die sich gegenseitig annullieren (vgl. z. B. [3] oder [6]). Diese einfachen Ringe S_α sind ebenfalls rechtsseitig vollständig reduzible MHR-Ringe, und es gilt $A = \sum_{\alpha \in \Gamma} S_\alpha$, w. z. b. w.

Satz 3. *Ein einfacher MHR-Ring A ist entweder ein Zeroring von Primzahlordnung, oder isomorph einem dichten Unterringe des Ringes aller linearen Transformationen von endlichem Rang eines Vektorraumes V über einem Schiefkörper*[4]) *S.*

Beweis. Es sei A ein einfacher MHR-Ring, und J das Radikal von A. Ist $J = A$, so ist A wegen des Satzes 1 ein Nilideal. Die Summe aller minimalen Rechtsideale des Ringes A ist, wie wir bei dem Beweis des Satzes 1 sahen, ein zweiseitiges Ideal $N_0 \neq 0$, und somit gilt $A = N_0$. Aus $A = J = N_0$ und aus $N_0 J = 0$ folgt $A^2 = 0$ und $O(A) = p$, wobei p eine geeignete Primzahl ist.

Es sei nun A ein einfacher MHR-Ring, der kein Radikalring ist. Dann ist A halbeinfach. Der Ring A besitzt von Null verschiedene echte primitive Ideale.[5]) Ein echtes primitives Ideal P von A ist $(0)_r$, und A ist somit ein primitiver Ring. Aus dem Hauptsatz von Jacobson (s. S. 28. von [3]) folgt, daß der primitive Ring A einem dichten Unterringe aller linearen Transformationen eines Vektorraumes V über einem Schiefkörper S isomorph ist. Wir identifizieren A mit diesem dichten Endomorphismenring des Vektorraumes V. Der Bildraum Va besitzt für jedes $a \in A$ einem endlichen Rang.

[4]) Die Dimension $\mathfrak{m}$ des Vektorraumes V über S ist nicht notwendig endlich. Wir können nachweisen, daß jedem Elemente $a \in A$ eine unendliche Matrix $(k_{\alpha\beta})$ mit nur endlich viel von Null verschiedenen Spaltenvektoren entspricht, und dass die Abbildung $a \to (k_{\alpha\beta})$, $(k_{\alpha\beta} \in S)$ ein Ringisomorphismus ist. Diese Darstellung hängt natürlich von den Basiselementen des Vektorraumes über S ab. Mit bekannten Methoden (s. z. B. B. L. van der Waerden [6]) kann man unmittelbar nachweisen, daß A einem Unterringe eines aus unendlichen $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$ Matrizen bestehenden vollen Matrizenringes über dem Schiefkörper der Operatorendomorphismen eines minimalen Rechtsideales von A isomorph ist. $\mathfrak{m}$ ist die Dimension des rechtsseitig vollständig reduziblen Ringes A.

[5]) Vgl. der Terminologie des Buches [3] von N. Jacobson.

Es sei nämlich $eA(e^2=e)$ ein minimales Rechtsideal von A. Hat der Endomorphismus e (und somit der Bildraum Ve) einen Rang $\geqq 2$, so gibt es zwei linear unabhängige Vektoren v_1e und v_2e und einen Endomorphismus $a\in A$ so, daß $v_1ea=0$ und $v_2ea\neq 0$. Dann ist minimale das Rechtsideal eA in dem Ordnungsrechtsideal O des Elementes $v_1\in V$ enthalten. Insbesondere gilt $v_1e=0$, was der linearen Unabhängigkeit von v_1e und v_2e widerspricht. Da A mit seinem Sockel übereinstimmt, besteht A aus linearen Transformationen von endlichem Rang. Wählt man für V feste Basiselemente, so entsprechen den linearen Transformationen gewisse unendliche Matrizen. Ist nämlich $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\mu, \ldots$ $(\mu\in\Omega)$ eine Basis für V über dem Grundschiefkörper S, und $a_\gamma\in A(\gamma\in\Gamma_0)$ ein Endomorphismus von V über S, so besteht $x_\alpha a_\gamma = \sum_\beta k_{\alpha\beta}^{(\gamma)} x_\beta$ mit $k_{\alpha\beta}^{(\gamma)}\in S$, und $k_{\alpha\beta}^{(\gamma)}\neq 0$ gilt nur für endlich viele $\beta\in\Omega$. Ordnet man jedem Elemente $a_\gamma\in A$ die entsprechende "zeilenfinite" unendliche Matrix $M_\gamma=(k_{\alpha\beta}^{(\gamma)})$ zu, so ist diese Abbildung $a_\gamma\rightarrow M_\gamma$ ein Ringisomorphismus. Da der Bildraum Va_γ von endlicher Dimension ist, folgt, dass die unendliche Matrix $(k_{\alpha\beta}^{\gamma})(k_{\alpha\beta}^{\gamma}\in S; \alpha,\beta\in\Omega,\gamma\in\Gamma_0)$ nur endlich viele von Null verschiedene Spaltenvektoren besitzt.

Dieser Satz steht in Zusammenhang mit einem Satze von *Litoff* (Vgl. [3]): jeder endlich erzeugbare Unterring eines einfachen Ringes mit von Null verschiedenem Sockel ist einem Unterringe eines vollen Matrizenringes S_n von endlichem Rang über einem Schiefkörper S isomorph.

§ 4. Einige Sätze über *MHR*-Ringe.

Der folgende Satz enthält eine Charakterisierung der halbeinfachen *MHR*-Ringe.

Satz 4. *Für einen Ring A sind die folgenden Bedingungen untereinander äquivalent:*

a) A ist ein halbeinfacher MHR-Ring;

b) in A gilt die Minimalbedingung für die endlich erzeugbaren Rechtsideale, und jedes endlich erzeugbare Rechtsideal besitzt ein linksseitiges Einselement;

c) A ist ein MHR-Ring, und jedes Hauptrechtsideal von A besitzt ein linksseitiges Einselement;

d) jedes in einem Hauptrechtsideal von A liegende Rechtsideal von A besitzt ein linksseitiges Einselement.

Beweis. Das Radikal J von A enthält kein idempotentes Element $e\neq 0$, somit ist $J=0$ in allen vier Fällen.

Aus a) folgt b). Nehmen wir an, dass *a)* erfüllt ist. A ist nach Satz 2 rechtsseitig vollständig reduzibel. Ein endlich erzeugbares Rechtsideal $R = (a_1, \ldots, a_u)_r$ ist ein direkter Summand von A, und ebenfalls die direkte Summe endlich vieler minimaler Rechtsideale $e'_1 A, \ldots, e'_s A((e'_j)^2 = e'_j)$ (vgl. [3] und [4]), d. h. $R = (a_1, \ldots, a_u)_r = e'_1 A + \cdots + e'_s A$. In A gilt also die Minimalbedingung für die endlich erzeugbaren Rechtsideale.

Wie wir bei dem Beweis des Satzes 2 gesehen haben, können wir diese Rechtsideale $e'_1 A, \ldots, e'_s A$ durch minimale Rechtsideale $e_1 A, \ldots, e_s A$ ersetzen, für die $e_{i+1} \in (1-e_i)\ldots(1-e_2)(1-e_1)R$, $e_i^2 = e_i$ und $e_i e_j = 0$ $(i < j)$ gelten.[6]) Das Element $e = e_s + e_{s-1} + \cdots + e_1 + (e_s e_{s-1} + \cdots + e_s e_1 + e_{s-1} e_{s-2} + \cdots + e_2 e_1) + \cdots + (-1)^{s+1} e_s e_{s-1} \ldots e_2 e_1 = 1 - (1-e_s)(1-e_{s-1}) \ldots (1-e_2)(1-e_1)$ ist wegen $ee_j = e_j$ ein linksseitiges Einselement von R, w. z. b. w.

Aus b) folgt c). Es ist trivial.

Aus c) folgt d). Nehmen wir an, daß *c)* erfüllt ist. Es sei R ein Unterrechtsideal des Hauptrechtsideales eA. Der Ring A ist halbeinfach und ein *MHR*-Ring, also wegen des Satzes 2 rechtsseitig vollständig reduzibel. Das Rechtsideal R von A ist ein direkter Summand von A und ebenfalls einer von eA; deshalb ist die R-Komponente e^* von e in einer direkten Zerlegung $eA = R + R_1$ ein linksseitiges Einselement von R, w. z. b. w.

Aus d) folgt a). Nehmen wir an, daß *d)* erfüllt ist. Dann besitzt jedes Hauptrechtsideal von A ein linksseitiges Einselement, somit genügt es zu bestätigen, daß der halbeinfache Ring A ein *MHR*-Ring ist. Ist $e_1 A \supset e_2 A \supset e_3 A \supset \ldots$ eine unendliche absteigende Kette von Hauptrechtsidealen $(e_j^2 = e_j)$, so gilt eine zusammengesetzte linksseitige Peircesche Zerlegung $e_1 A = e_{k+1} A + \sum_{j=1}^{k} (e_j - e_{j+1}) e_j A$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ für jedes k. Somit existiert die unendliche (diskrete) direkte Summe $R^* = \sum_{j=1}^{\infty} (e_j - e_{j+1}) e_j A)$, die in dem Hauptrechtsideal $e_1 A$ enthalten ist. Das ist aber unmöglich, da R^* wegen *d)* ein linksseitiges Einselement besitzt, w. z. b. w.

Satz 5. *Für einen Ring A sind die folgenden Bedingungen untereinander äquivalent:*

a) jedes in einem Hauptrechtsideal von A liegende Rechtsideal R von A läßt sich als eine direkte Summe

$$R = eA + R_1$$

darstellen, wobei $e^2 = e$ *und* R_1 *ein Nilrechtsideal von A ist;*

[6]) Wenn wir unter der Länge n die Anzahl der minimalen Rechtsideale $e_1 A, \ldots, e_u A$ von $R = e_1 A + \cdots + e_u A$ verstehen, und wenn der Operatorenbereich die Rechtsmultiplikationen $\bar{a}$ $(a \in A)$ enthält, so ist die Länge n von R nach dem Satz von Krull—Schmidt eine Invariante des endlich erzeugbaren Rechtsideales R von A.

b) das Radikal J von A ist ein Nilideal, und für den Faktorring $A' = A/J$ gilt eine der äquivalenten Bedingungen des Satzes 4.

Beweis. Aus a') folgt b'). Jedes Hauptrechtsideal von A in J ist ein Nilrechtsideal, d. h. J ist ebenfalls ein Nilideal, da J kein von Null verschiedenes idempotentes Element enthält. $A' = A/J$ ist halbeinfach. In A' gilt also wegen $R_1 \subseteq J$ die Bedingung *d)* des Satzes 4.

Aus b') folgt a'). Es sei R ein Rechtsideal von A in einem Hauptrechtsideal $(a)_r$, und J das Radikal von A.

Ist $R \subseteq J$, so wählen wir $e = 0$. Ist $J \cap R \neq R$, $J + R \neq J$, so gehört $R' = R + J$ zu $(a')_r = (a + J)_r$ und somit besitzt R' ein linksseitiges Einselement. Es gibt also ein Element $e_1 \in R$ mit $e_1^2 - e_1 \in J \cap R$. Es sei $e_1^2 - e_1 = n$ vom Nilpotenzgrad g und $n_1 = -n + 4n^2 + \cdots + (-4)^{g-1}(-n^g) = -n(1+4n)^{-1} \in J \cap R$. Dan können wir die Lösung der quadratischen Gleichung $n_2^2 - n_2 = n_1$ durch die wohlbekannte Wurzelformel $n_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4n_1})$ finden. Ist $T(x) = \sum_{k=1}^{g_1} \frac{1}{2k-1} \binom{2k-1}{k} (-x)^k$ der g_1-te Abschnitt der unendlichen Taylorschen Reihe von $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1+4x})$, so können wir $n_2 = T(n_1)$ wählen, wobei g_1 der Nilpotenzgrad von n_1 ist, und die Koeffizienten $\frac{1}{2k-1}\binom{2k-1}{k}$ wegen der Legendreschen Formel für $m!$ ganze Zahlen sind. Es sei nun $e_2 = e_1 - 2e_1 n_2 + n_2$. Dann ist $e_1 n_2 = n_2 e_1$, da $e_1 n = n e_1$, $e_1 n_1 = n_1 e_1$ gelten, und e_2 ein Polynom von n_1 bzw. von n über dem Ring der ganzen Zahlen ist. Man erhält aus $e_2^2 - e_2 = (e_1^2 - e_1) + (n_2^2 - n_2) + 4(e_1^2 - e_1)(n_2^2 - n_2) = n(1+4n)^{-1}((1 + 4n) - 1 - 4n) = 0$, dass $e_2^2 = e_2 \neq 0$ ist. Das idempotente Element e_2 wird bei dem natürlichen Homomorphismus $R \sim R/(J \cap R)$ auf das linksseitige Einselement e' von R' abgebildet. Aus einer linksseitigen Peirceschen Zerlegung folgt $R = e_2 R + (1 - e_2)R$, $e_2 R = e_2 A$ und $(1 - e_2)R = \{r - e_2 r \mid r \in R) \subseteq J$, denn es gilt für jedes $r \in R$ wegen $(e_2)' = e'$ offenbar $r \equiv e_2 r \pmod{J}$. So haben wir die Existenz einer Zerlegung $R = e_2 A + R_1$ mit $e_2^2 = e_2$ und $R_1 \subseteq J$ bewiesen, w. z. b. w.

Wir bemerken daß die Bedingung *a')* des Satzes 5 wegen des Satzes 1 für jeden *MHR*-Ring gilt. Ein *MHR*-Ring ist also ein *I*-Ring (vgl. [3]): Ein Rechtsideal ist entweder ein Nilrechtsideal, oder enthält ein von Null verschiedenes idempotentes Element.

§ 5. Bemerkungen.

I. Für einen Ring A sind die Bedingungen a') und b') des Satzes 5 und die folgenden Bedingungen untereinander äquivalent:

c') jedes Hauptrechtsideal R von A hat die Gestalt $R = eA + R_1$ mit $e^2 = e$ und mit einem Nilrechtsideal R_1, und der Faktorring $A' = A/J$ ist ein MHR-Ring;

d') jedes endlich erzeugbare Rechtsideal R von A hat die Gestalt $R = eA + R_1$ mit $e^2 = e$, und mit einem Nilrechtsideal R_1 und der Faktorring $A' = A/J$ ist ein MHR-Ring.[7])

Beweis der Bemerkung I geht ähnlicherweise wie der des Satzes 5.

II. Hat jedes Rechtsideal R von A die Gestalt $R = eA + R_1$ mit einem Nilrechtsideal R_1 von A und mit $e^2 = e$, so ist das Radikal J ein Nilideal, und $A' = A/J$ ist ein halbeinfacher Ring mit Minimalbedingung für Rechtsideale. (Vgl. Satz 4 von [5]).

Beweis. Der Faktorring $A' = A/J$ ist halbeinfach und wegen des Satzes 4 ein *MHR*-Ring. A' hat nach der Voraussetzung ein linksseitiges Einselement, also gilt in A' die Minimalbedingung für Rechtsideale, da A' nach dem Satz 2 rechtsseitig vollständig reduzibel ist.

III. Hat insbesondere jedes Rechtsideal R von A ein linksseitiges Einselement, so ist A ein halbeinfacher Ring mit Minimalbedingung für Rechtsideale (Satz 1 der Arbeit [2] von Fuchs—Szele).

Beweis. A ist wegen $0 \neq e \notin J$ halbeinfach, und jedes Rechtsideal R von A hat die Gestalt $R = eR = eA$, wobei e ein linksseitiges Einselement von R bedeutet. Es gilt nämlich $R = eR \subseteq eA \subseteq R$. Der Ring A ist also nach der Bemerkung II ein halbeinfacher Ring mit Minimalbedingung für Rechtsideale.

IV. Ein Ring A genügt dann und nur dann der Minimalbedingung für Rechtsideale, wenn jedes Rechtsideal R von A die Gestalt $R = eA + R_1$ mit $e^2 = e$ und mit einem nilpotenten Rechtsideal R_1 hat, und in A die Minimalbedingung für die nilpotenten Rechtsideale R_1 gilt.

Beweis. Es genügt nach [1] das Hinreichen zu bestätigen. Aus den zwei letzten Bedingungen folgt die Minimalbedingung für die Rechtsideale.

---

[7]) Hat ein endlich erzeugbares Rechtsideal $R = (a_1, \dots, a_u)_r$ von A die Gestalt $R = eA + R_1$, wobei $e^2 = e$ und die Summe eine direkte ist, so kann R_1 ebenfalls durch n Elemente $b_1, \dots, b_u$ erzeugt werden. Es gilt nämlich $a_j = ec_j + b_j$, $(c_j \in A,\ b_j \in R_1,\ j = 1, 2, \dots, u)$ und $R = (a_1, \dots, a_u)_r \subseteq (e, b_1, \dots, b_u) \subseteq eA + R_1 = R$, d. h. $R_1 = (b_1, \dots, b_u)_r$, w. z. b. w.

Ist nämlich $R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \ldots$ eine absteigende Kette von Rechtsidealen in A, so gibt es eine natürliche Zahl k mit $R_k \cap N = R_{k+1} \cap N$ und $(R_k + N)/N = (R_{k+1} + N)/N$, wobei N das nilpotente Radikal von A ist. Aus $R_k + N = R_{k+1} + N$ folgern wir nun $R_k = R_{k+1}$. Es gibt zu jedem $r_k \in R_k$ ein $u \in N$ und ein $r_{k+1} \in R_{k+1}$ mit $r_k = r_{k+1} + u$. Da $u = r_k - r_{k+1} \in R_k \cap N = R_{k+1} \cap N \subseteq R_{k+1}$ ist $(R_{k+1} \subseteq R_k)$, erhält man $r_k = r_{k+1} + u \in R_{k+1}$, d. h. $R_k = R_{k+1}$, w. z. b. w.[8])

V. In einem Ring A mit Radikal J, das ein Nilideal ist, besitzt jede Gleichung $x^2 - x = r_1 \in J$ eine Lösung $x = r_2 \in J$, so, daß für jedes $a \in A$ aus $ar_1 = r_1 a$ stets $ar_2 = r_2 a$ folgt. Ein Ring mit beliebigem Radikal J, der diese Eigenschaften besitzt, wurde von I. KAPLANSKY ein "SBI-Ring" genannt. *Für solche Ringe A sind die entsprechenden Bedingungen $a'')$ und $b'')$ äquivalent, wobei $x'')$ aus der Bedingung $x')$ des Satzes 5 durch Ersetzung von "Nil" durch "quasireguläres" entsteht.*

Nachträgliche Bemerkungen (26. Mai, 1960). 1. Inzwischen ist auch eine Arbeit von C. C. FAITH (Rings with minimum condition on principal ideals, *Arch. Math.* **10** (1959), 327—330 (eingegangen am 6. Mai 1959)) erschienen. Die Untersuchung des Jacobsonschen Radikals, bzw. der einfachen und halbeinfachen Ringe ist bezüglich der MHR-Ringe bei FAITH und bei uns teils gemeinsam.

2. Bezüglich verwandter Probleme verweisen wir auf eine Arbeit von I. KAPLANSKY. (Topological representation of algebras II., *Trans. Amer. Math. Soc.* **68** (1950), 63—75) und auf eine Reihe von Arbeiten von W. A. ANDRUNAKIEWITSCH (s. z. B. *Uspehi Mat. Nauk* **10** : 2 (1955), 208—209 bzw. ebenda **11** : 4 (1956), 179—180).

3. Für den Satz 1. von FUCHS—SZELE [2] verweisen wir auf den Satz 4 von O. GOLDMAN (A characterization of semi-simple rings with the descending chain condition, *Bull. Amer. Math. Soc.* **52** (1946), 1021—1027).

4. Ist A ein MHR-Ring mit radical J, so existiert eine (transfinite) Ordnungszahl γ mit $J^\gamma = 0$ ($J^\beta \neq 0$, $\beta < \gamma$). Zum beweis verweisen wir auf die Methoden von R. BAER (Radical ideals, *Amer. J. Math.* **65** (1943), 537—568).

5. Wird ein MHR-Ring A mit Minimalbedingung für die in Hauptrechtsidealen liegenden Rechtsideale von A ein MH_1R-Ring genannt, so ist jeder Unterring B eines nilpotenten MH_1R-Ringes A ebenfalls ein MH_1R-Ring (Beweis mit Induktion). Der Folgende Ring A zeigt nun die Existenz eines MHR-Ringes, der kein MH_1R-Ring ist, und dessen Radikal J kein nilpotentes Ideal ist. Es sei nämlich $A = \{e, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ mit $e + e = a_n + a_n = e^2 + e = ea_n + a_n = a_n e + a_n = a_n^{n+1} = a_n a_m = a_m a_n = 0$ $(m \neq n)$. Dann hat A tatsächlich die erwähnten Eigenschaften.

6. Ist A ein beliebiger MHR-Ring und $e^2 = e \in A$, so sind sowohl eAe als $(1-e)A(1-e)$ in A notwendig MHR-Unterringe, wobei $(1-e)X$ die Menge

$$\{x - ex \mid x \in X, X \subseteq A\}$$

bezeichnet.

7. Die folgenden Bedingungen sind für einen Ring A äquivalent (vgl. JACOBSON's Buch [3]):

a) A ist ein einfacher MHR-Ring;

[8]) Es steht in Zusammenhang mit der Tatsache, daß der Verband der Rechtsideale von A modular ist.

b) A ist ein MHR-ring, in dem (0) ein Primideal ist;

c) A ist ein rechtsprimitiver MHR-Ring;

d) A ist einem dichten Unterringe des Ringes aller linearen Transformationen von endlichem Rang eines Vektorraumes über einem Schiefkörper isomorph;

e) A ist dem Ringe aller in der M'-Topologie stetigen linearen Transformationen von endlichem Rang eines Vektorraumes M über einem Schiefkörper in sich isomorph, wobei (M, M') duale Vektorräume sind;

f) A ist ein lokaler Matrizienring über einem Schiefkörper mit $\neq 0$ Sockel;

g) jeder durch zwei Elemente erzeugbarer Unterring S von A ist ein Unterring eines Unterringes T von A, wobei T einem $n \times n$ vollen Matrizenring über einem Schiefkörper isomorph ist, und A einen $\neq 0$ Sockel besitzt;

h) A ist ein einfacher Ring mit $\neq 0$ Sockel.

(Es gelten auch die links-rechts dualen bedingungen *a'), b'), ..., h')* für einen einfachen MHR-Ring, denn dieser Ring ist auch ein MHL-Ring.)

Literatur.

[1] E. Artin—C. J. Nesbitt—R. M. Thrall, Rings with minimum condition, *Ann Arbor.* 1944.

[2] L. Fuchs—T. Szele, Contribution to the theory of semisimple rings, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **3** (1952), 233—239.

[3] N. Jacobson, Structure of rings, *Providence,* 1956.

[4] A. Kertész, Beiträge zur Theorie der Operatormoduln, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **8** (1957), 235—257.

[5] F. Szász, Die explizite Bestimmung von einigen Klassen der assoziativen Ringe, *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl.* III. **7** (1959), 107—110.

[6] B. L. v. d. Waerden, Algebra II. (Dritte Auflage), *Berlin—Göttingen—Heidelberg,* 1955.

(Eingegangen am 29. Dezember 1958, in veränderter Form am 18. März 1959.)