Sur la courbure affine des courbes.

A M. Ottó Varga à l'occasion de son 50ième anniversaire.

Par J. MERZA (Debrecen).

Dans le cas où la courbe est rapportée à la longueur affine de son arc, la troisième dérivée du vecteur de position est proportionelle au vecteur tangent. Le facteur invariant de la proportionalité est la courbure affine de la courbe. C'est le fait qui forme la base d'une introduction simple de la courbure affine dans le plan. Un résultat de L. BERWALD fait apparaître le sens géométrique de la courbure affine sous un autre aspect en comparant la longueur affine de la courbe à celle de sa parabole tangente. Dans cet article nous montrons un nouveau sens géométrique de la courbure affine. La discussion se compose de deux parties. Dans la première partie nous nous occupons de la discussion des courbes planes puis dans la deuxième partie nous donnons l'interprétation de la courbure des courbes dans l'espace.

§ 1. La courbure affine des courbes planes.

Nous prendrons comme base de nos investigations une définition de la courbure des courbes dans le plan euclidien. On sait que dans le plan euclidien la courbure d' une courbe dans le point P_0 est définie par les limites

$$k_0 = \lim_{P \to P_0} \frac{2d}{s^2} = \lim_{P \to P_0} \frac{2d}{e^2}.$$

Dans ces formules d dénote la distance entre un point arbitraire P (ne coïncidant avec P_0) de la courbe g et de la droite tangente dans le point P_0, s signifie la longueur de l'arc $\widehat{P_0P}$, e est la projection orthogonale de l'arc $\widehat{P_0P}$ sur la droite tangente dans le point P_0. Comme nous définissons la courbure par des quantités invariantes par rapport aux mouvements son invariabilité par rapport aux mouvements est facile à comprendre. Le but de cette remarque est de généraliser cette définition de la courbure au cas de la géométrie affine unimodulaire des courbes planes.

Faisons la construction suivante. Prenons dans le point P_0 de la courbe sa parabole tangente. C'est qui joue le rôle de la droite tangente dans la preuve. Projetons le point P de la courbe parallèlement au vecteur normal affin dans le point P_0 sur la parabole tangente et désignons le point que nous obtenons par la lettre E. Prenons dans les points P et E un vecteur tangent de la courbe g et de la parabole tangente. Désignons la distance affine des deux éléments linéaires ainsi déterminés par la lettre d, la longueur affine de l'arc $\widehat{P_0P}$ par s, la longueur affine de l'arc $\widehat{P_0E}$ de la parabole par e. Alors le théorème suivant est valable:

Théorème 1. *La courbure affine d'une courbe est déterminée par les limites*

$$k_0 = \lim_{P \to P_0} \frac{(2d)^3}{s^5} = \lim_{P \to P_0} \frac{(2d)^3}{e^5}.$$

Les quantitès figurantes sont invariantes par rapport aux transformations des coordonnées et celles du paramètre.

Pour prouver le théorème choisissons le système de coordonnées cartésiennes composé du vecteur tangent et du normal affin dans le point P_0. Dans ce système l'équation canonique de la courbe est donnée par

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot x_1^2 + \frac{3k_0}{4!} \cdot x_1^4 + \cdots.$$

L'équation de la parabole tangente dans le point P_0 dans ce système est

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot x_1^2.$$

En introduisant le paramètre $t = x_1$ nous recevons les équations paramétriques

$$x_1 = t \qquad\qquad x_1^* = t$$

$$x_2 = \frac{t^2}{2} + \frac{3k_0}{4!} t^4 + \cdots \qquad\qquad x_2^* = \frac{t^2}{2}.$$

On voit que les points de la courbe et de la parabole appartenants à des valeurs égales de t sont sur une droite parallèle au vecteur normal affin. Nous obtenons la distance affine des éléments linéaires appartenants à des valeurs égales de t par l'emploi de la formule

$$d(t) = 2 \cdot f^{1/3}$$

où

$$f(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\dot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}) \cdot (\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}, \dot{\mathfrak{x}}^*)}{(\dot{\mathfrak{x}}, \dot{\mathfrak{x}}^*)}$$

(le point marque la dérivation par rapport à t). Il est clair que la distance affine de deux éléments linéaires ne dépend pas du paramètre spécial t. Plus généralement dans le cas où les courbes sont rapportées à deux paramétres différents t et τ, la longueur affine de ces éléments linéaires ne dépend pas des paramètres, c'est-à-dire

$$f(t, \tau) = f(\bar{t}, \tau) = f(t, \bar{\tau}) = f(\bar{t}, \bar{\tau}).$$

La valeur des déterminants figurants:

$$(\dot{\mathfrak{r}}, \mathfrak{r}^* - \mathfrak{r}) = -\left(\frac{3k_0}{4!} t^4 + 0(5)\right),$$

$$(\mathfrak{r}^* - \mathfrak{r}, \dot{\mathfrak{r}}^*) = \frac{3k_0}{4!} t^4 + 0(5)$$

$$(\dot{\mathfrak{r}}, \dot{\mathfrak{r}}^*) = -\left(\frac{k_0}{2} t^3 + 0(4)\right).$$

Dans ces formules $0(n)$ note la partie de la série qui contient les termes dans lesquelles t figure au moins à la n-ième puissance. Après la substitution nous obtenons

$$[2d(t)]^3 = 32 \cdot \frac{\frac{k_0^2}{64} \cdot t^8 + 0(9)}{\frac{k_0}{2} \cdot t^3 + 0(4)}.$$

Calculons la longueur affine de la courbe!

$$s = \int_0^t (\dot{\mathfrak{r}}, \ddot{\mathfrak{r}})^{1/3} dt = \int_0^t \left(1 + \frac{3k_0}{2} t^2 + \cdots\right)^{1/3} dt.$$

Appliquons la première formule de la moyenne

$$s = \left(1 + \frac{3k_0}{2} \tau^2 + \cdots\right)^{1/3} \cdot t, \qquad 0 \leqq \tau \leqq t.$$

Utilisons la convergence des séries pour simplifier par les puissances aptes de t. Le résultat sera

$$\frac{(2d)^3}{s^5} = 32 \cdot \frac{\frac{k_0^2}{64} + 0(1)}{\left(\frac{k_0}{2} + 0(1)\right) \cdot (1 + 0(2))^{5/3}}.$$

En faisant tendre t vers zéro nous obtenons la valeur limite

$$\lim_{P\to P_0} \frac{(2d)^3}{s^5} = k_0.$$

Il faut encore motiver l'emploi de la parabole. Dans le cas euclidien nous avons pris la distance entre un point arbitraire de la courbe et de la droite tangente. De la définition de la distance affine il ressort que c'est la parabole qui joue le rôle de la droite dans la géométrie unimodulaire affine. C'est à cause de cela que nous l'avons appliqué dans la construction. Le fait connu que la courbure affine de la parabole est zéro est la conséquence immédiate de notre résultat. Si, en particulier, la courbe est une parabole, alors sa parabole osculatrice coïncide avec elle, c'est-à-dire dans le numérateur $d(t) \equiv 0$. En effet, nous avons reçu le résultat désiré.

La justesse du résultat est étayée par des considérations dimensionnelles. Notamment, on connaît le tableau ci-dessous des dimensions:

$\mathfrak{x}$	$\dot{\mathfrak{x}}$	s	k
1	1	$^2/_3$	$-^4/_3$

On comprend facilement que $\dim(f) = 2$, c'est pourquoi $\dim(d^3) = 2$. D'autre part $\dim(s^5) = 10/3$, et par conséquent la dimension du quotient est $2 - 10/3$, ce qui est en effet la dimension de la courbure affine.

Hélas, cette méthode ne peut être employée dans l'espace affin. Il faut choisir une autre formule pour mesurer la distance entre un point de la courbe et la parabole. Définissons la distance affine entre un point P et une courbe par la formule doublement invariante

$$\bar{d} = \frac{(\mathfrak{z} - \mathfrak{x}, \dot{\mathfrak{x}})}{(\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}})^{1/3}}.$$

Par l'accomplissement conséquent du calcul nous arrivons au

Théorème 2. *La courbure affine de la courbe est déterminée par la limite*

$$k(P_0) = 8 \cdot \lim_{P\to P_0} \frac{\bar{d}}{s^4}.$$

La distance $\bar{d}$ est extrémale car le point P de la courbe est situé sur le normal affin de la parabole dans le point E. La dimension du résultat est exacte et nous pouvons transporter cette méthode dans l'espace affin.

§ 2. La courbure affine des courbes dans l'espace.

Dans le cas des courbes planes nous avons réussi à donner une nouvelle caractéristique de la parabole tangente. Maintenant nous donnons une nouvelle interprétation géométrique de la première et de la deuxième courbure des courbes dans l'espace. Par ce moyen nous pouvons caractériser deux paraboloïdes liés d'une manière invariante avec la courbe.

Prenons au lieu du plan osculateur le paraboloïde hyperbolique

$$3x_3 = x_1 \cdot x_2$$

dont la courbure affine est zéro mais qui n'est pas singulier au point de vue de la géométrie affine. (Les équations sont valables dans le trièdre affin de la courbe qui était introduit par A. WINTERNITZ.) Après la paramétrisation $x_1 = t$ l'équation canonique de la courbe est

$$\begin{aligned} x_1 &= t \\ x_2 &= \frac{t^2}{2} - \frac{k_2}{30} t^5 + 0(6) \\ x_3 &= \frac{t^3}{6} - \frac{k_1}{20} t^5 + 0(6). \end{aligned}$$

Dans ces formules k_1 et k_2 signifient la première et la deuxième courbure affine de la courbe. Projetons la courbe parallèlement à l'axe x_3 sur le paraboloïde hyperbolique. Les équations de la courbe reçue sont

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= t \\ \bar{x}_2 &= \frac{t^2}{2} - \frac{k_2}{30} t^5 + 0(6) \\ \bar{x}_3 &= \frac{t^3}{6} + 0(6). \end{aligned}$$

Déterminons la distance affine entre le point P de la courbe et sa projection $\bar{P}$ sur la surface par l'emploi de la formule

$$d = \frac{(\mathfrak{r} - \bar{\mathfrak{r}}, \mathfrak{r}_u, \mathfrak{r}_v)}{|LN - M^2|^{1/4}}.$$

En ce cas

$$|LN - M^2|^{1/4} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

La valeur du déterminant qui est dans le numérateur:

$$(\mathfrak{x}-\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v) = -\frac{k_1}{20} t^5 + 0(6).$$

La distance affine est

$$d = -\frac{\sqrt{3}}{20} k_1 t^5 + 0(6).$$

Il est facile de comprendre que la longueur affine de la courbe est approchée par la formule

$$s = (1 + a\tau^2 + 0(3))^{1/6} \cdot t; \qquad 0 \leqq \tau \leqq t.$$

La limite

$$\frac{20}{\sqrt{3}} \cdot \lim_{P \to P_0} \frac{d}{s^5} = -k_1(P_0)$$

du quotient des deux distances fournit la première courbure affine avec un signe négatif.

Pour calculer la deuxième courbure affine prenons le paraboloïde elliptique

$$2x_2 = x_1^2 + x_3^2.$$

Projetons la courbe parallèlement à l'axe x_2 sur le paraboloïde. Les équations de la courbe projetée sont

$$x_1^* = t$$

$$x_2^* = \frac{t^2}{2} + 0(6)$$

$$x_3^* = \frac{t^3}{6} - \frac{k_1}{20} t^5 + 0(6).$$

La distance affine:

$$d = \frac{k_2}{30} t^5 + 0(6).$$

En appliquant à la longueur de l'arc l'approximation antérieure, la limite

$$30 \cdot \lim_{P \to P_0} \frac{d}{s^5} = k_2'(P_0)$$

donne la valeur de la deuxième courbure. Mais c'est seulement la valeur numérique qui est donnée par cette limite. A savoir la dimension de la deuxième courbure est $-3/2$ tandisque celle du côté gauche est -1 qui a le caractère de première courbure. La limite définit ainsi une courbure k_2' le caractère de laquelle est d'accord avec celui de la première courbure mais sa valeur est égale à celle de la deuxième courbure de la courbe.

Le résumé des précédents est le

Théorème 3. *La première et la deuxième courbure d'une courbe dans l'espace affin sont données par les limites*

$$k_1(P_0) = -\frac{20}{\sqrt{3}} \cdot \lim_{P \to P_0} \frac{d}{s^5}, \quad k_2'(P_0) = 30 \cdot \lim_{P \to P_0} \frac{d}{s^5}.$$

(Dans ces formules d note la distance affine d'un point de la courbe et d'un paraboloïde convenablement choisi, s signifie la longueur affine de la courbe.)

Les distances affines entre les points de la courbe et leurs projections sont extrémales parce qu'ils sont situés cas par cas sur le normal affin de la surface dans le point projeté. Il est facile de démontrer que le normal affin de ce paraboloïde hyperbolique est parallèle à l'axe x_3 et celui du paraboloïde elliptique est parallèle à l'axe x_2.

Par suite des précédents la parabole gauche cubique a la courbure zéro. Enfin le tableau suivant des dimensions confirme la validité des résultats.

$\mathfrak{x}$	s	$\mathfrak{x}'$	$\mathfrak{x}''$	$\mathfrak{x}'''$	$\mathfrak{x}^{IV}$	k_1	k_2	d	s^5
1	$^1/_2$	$^1/_2$	0	$-^1/_2$	-1	-1	$-^3/_2$	$^3/_2$	$^5/_2$

(Reçu le 12 janvier 1959.)