Über einen Typ von Geometrien, welche die Riemannsche verallgemeinern.

Herrn Otto Varga zu seinem 50 Geburtstage.

Von DETLEF LAUGWITZ (Darmstadt).

Das klassische „Raumproblem", welches auf die Kennzeichnung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrien abzielt, zerfällt in seiner differentialgeometrischen Fassung in zwei Teile: 1. *Kennzeichnung der Riemannschen unter den allgemeineren metrischen Räumen*, 2. *Kennzeichnung der Riemannschen Räume konstanter Krümmung*. Zu beiden Teilen hat HELMHOLTZ [1] die ersten Lösungen geliefert, indem er die Forderungen der *freien Beweglichkeit* infinitesimaler (zu 1) bzw. endlicher (zu 2) starrer Körper ausnutzte. Im Teil 2 ist man heute zu recht durchsichtigen Lösungen gelangt; man vergleiche etwa VARGA [5]. Teil 1 aber birgt immer noch erhebliche Probleme. Zwar läßt sich die alte Helmholtzsche Idee im Falle positiv-definiter Metrik heute in wenigen Zeilen durchführen (LAUGWITZ [2]), doch interessieren im Hinblick auf die Allgemeine Relativitätstheorie besonders auch indefinite Maßbestimmungen. Hier hat WEYL [6], [7] erste Beiträge gegeben, indem er Forderungen über die *Existenz affiner Zusammenhänge* verwendete. Ein anderer Weg zur Behandlung des Teiles 1. besteht in der Heranziehung von *Isotropieforderungen* (LAUGWITZ [3]).

Ich habe bereits an anderer Stelle [4] einen Beweis einer Weylschen Vermutung zur Kennzeichnung der Riemannschen Räume mit *definiter* Metrik gegeben und will hier an Beispielen zeigen, daß die Welsche Vermutung nicht auf den Fall zweidimensionaler Räume mit *indefiniter* Metrik ausgedehnt werden kann. Man erhält vielmehr Klassen von Räumen, die nicht Riemannsch sind, aber wesentliche Eigenschaften mit den Riemannschen Räumen gemeinsam haben.

Ein wichtiger Satz der Riemannschen Geometrie, den man gelegentlich sogar als ihren Fundamentalsatz bezeichnet hat, ist bekanntlich der folgende: *Zu jeder Riemannschen Metrik gehört genau ein kompatibler affiner Zusammenhang*, also ein solcher, dessen zugehörige Parallelverschiebung die Länge von Vektoren ungeändert läßt. Man kann nun mit WEYL [6] nach allgemeineren Geometrien fragen, in denen dieser Satz noch gilt. Natürlich trifft der Satz in allen Minkowski-Räumen zu. Andererseits gilt er aber in dieser Form sicher nicht für alle Finsler-Räume. Denn wenn eine lineare Vektorübertragung existiert, die Längen ungeändert läßt, so müssen die punktalen[1]) Minkowski-Metriken in den einzelnen Tangentialräumen alle durch geeignete linear-homogene Abbildungen aus einer von ihnen hervorgehen; eine solche Abbildung wird vermittelt durch Parallelverschiebung des Tangentialraumes längs irgend eines die beiden Punkte verbindenden Weges. Die das Bogenelement

$$ds = f(x; dx), \quad f(x; a \cdot dx) = a \cdot f(x; dx) \text{ für } a > 0 \tag{1}$$

gebende metrische Grundfunktion f muß also die spezielle Gestalt haben:

$$f(x; \xi) = \varphi(B_k^i(x)\xi^k), \ \det(B_k^i(x)) \neq 0 \tag{2}$$

mit einer von x unabhängigen Funktion $\varphi(\eta_i)$ mit $\varphi(a \cdot \eta_i) = a \cdot \varphi(\eta_i)$ für $a > 0$.

Die Gestalt (2) des Bogenelements stellt eine notwendige, aber bei weitem nicht hinreichende Bedingung für die Existenz eines längentreuen affinen Zusammenhangs dar; (2) ist lediglich hinreichend für die Existenz eines linearen, aber nicht notwendig symmetrischen längentreuen Zusammenhanges. — Im Falle der positiv-definiten Riemannschen Metrik gilt übrigens

$$\varphi(\eta_i) = \sqrt{\delta_{ik}\eta^i\eta^k}, \tag{3}$$

$$f(x; \xi) = \sqrt{\delta_{ik} B_j^i(x) B_l^k(x) \xi^j \xi^l} = \sqrt{g_{jl}(x) \xi^j \xi^l}.$$

Weyl nennt ganz allgemein die Funktion φ (genauer: die Klasse $\{\varphi\}$ aller Funktionen, die aus φ durch homogen-lineare Abbildungen hervorgehen) die „Art" oder „Natur" der Metrik und das Tensorfeld $B_k^i(x)$ eine spezielle „Realisierung" dieser Natur. Alle Grundfunktionen (2) mit der gleichen Natur $\{\varphi\}$, aber verschiedenen Realisierungen B_k^i bilden eine Klasse von

[1]) Zur Bezeichnung „punktal" ist zu sagen: Als zweckmäßige Bezeichnungsweise für differentialgeometrische Eigenschaften ist vorzuschlagen:

„global" für Eigenschaften der ganzen Mannigfaltigkeit,

„lokal" für solche von beliebig kleinen, aber endlichen Umgebungen,

„infinitesimal" für die Beziehungen zwischen Tangentialräumen benachbarter Punkte,

„punktal" für Eigenschaften des einzelnen Punktes und seines Tangentialraumes.

Diese Terminologie stimmt überein mit der topologischen (z. B. lokalkompakt) und klärt die Begriffe. Als ein Beispiel werde die Eigenschaft „affin" herangezogen: punktal-affin ist jede differenzierbare Mannigfaltigkeit, infinitesimal-affin sind die Räume mit affinem Zusammenhang, lokal-affin sind die Räume, die umgebungsweise zu affinen Räumen isomorph sind (Krümmungstensor $= 0$) und global-affin ist der volle affine Raum. Ein Finsler-Raum ist punktal-Minkowskisch, ein Riemann-Raum punktal-euklidisch.

metrischen Räumen gleicher Natur $\{\varphi\}$. Die Riemannschen Räume mit einer Metrik bestimmter Signatur bilden jeweils eine solche Klasse.

Der Fundamentalsatz kann nun so formuliert werden: *Zu den Metriken einer festen Natur $\{\varphi\}$ gibt es jedenfalls dann stets genau einen kompatiblen affinen Zusammenhang, wenn φ^2 eine nicht-ausgeartete quadratische Form ist.*

WEYL [6] hat nun nach denjenigen Naturen $\{\varphi\}$ gefragt, für die außerdem noch der Fundamentalsatz in dieser Fassung gilt. Er vermutete dazu, daß es außer den nichtausgearteten quadratischen Formen keine weiteren solchen φ gibt, und diese Vermutung ist jedenfalls für solche φ richtig, die positiv-definit und stetig sind, deren Indikatrix $\varphi = 1$ also eine beschränkte, geschlossene Hyperfläche ist. Das habe ich an anderer Stelle bewiesen [4].

Hier will ich nun zweidimensionale, nicht-Riemannsche Raumklassen angeben, für die der Fundamentalsatz gilt. Nach dem in [4] bewiesenen Satz wird die Indikatrixkurve $\varphi = 1$ dabei keine geschlossene Kurve sein können, sondern — ähnlich wie die Hyperbel des indefiniten Riemannschen Falles $\varphi^2(\eta) = \eta^1 \cdot \eta^2$ — ins Unendliche gehen müssen. Nach dem Satz 2 aus der Arbeit [4] muß die Indikatrix eine mindestens eingliedrige Gruppe von homogenen Affinitäten gestatten. Nun sind aber alle diese Kurven als „zentral-affine W-Kurven" seit KLEIN und LIE wohlbekannt. Zu ihnen gehören neben den Kegelschnitten die logarithmischen Spiralen, die aber hier ausscheiden, weil sie nicht zu einer eindeutigen Minkowski-Metrik φ führen, da jeder vom Nullpunkt ausgehende Strahl mehr als einmal von der Kurve getroffen wird. Wirkliche Metriken werden aber von den hyperbolischen Analoga dieser logarithmischen Spiralen gegeben, und mit diesen wollen wir uns hier beschäftigen.

Um diese Indikatrixkurven zu erhalten, gehen wir (bei festem reellem α) von einer Gruppe von Matrizen aus, die als linear-homogene Transformationen der $(\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^2)$-Ebene operieren:

$$D(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

Die Indikatrix kann bestimmt werden als die Bahnkurve der Gruppe durch einen festen Punkt, etwa durch den Punkt $\bar{\eta}^1 = 1, \bar{\eta}^2 = 0$:

$$D(t)\,(1, 0) = (e^{\alpha t} \cosh t,\ e^{\alpha t} \sinh t).$$

Geht man zu den neuen Koordinaten $\eta^1 = \bar{\eta}^1 + \bar{\eta}^2,\ \eta^2 = \bar{\eta}^1 - \bar{\eta}^2$ über, so erhält man für den Zweig der Indikatrix im positiven Quadranten

$$\eta^1 = e^{\alpha t} (\cosh t + \sinh t) = e^{(\alpha+1)t}$$

$$\eta^2 = e^{\alpha t} (\cosh t - \sinh t) = e^{(\alpha-1)t}$$

oder nach Elimination von t

$$(\eta_i^1)^{\alpha-1} = (\eta_i^2)^{\alpha+1}, \quad \eta_i^1 > 0, \eta_i^2 > 0.$$

Die Minkowski-Metrik mit den richtigen Homogenitätseigenschaften, die auf dieser Kurve gleich 1 ist, ist φ mit

$$\varphi^2(\eta_i^1, \eta_i^2) = (\eta_i^1)^{1-\alpha}(\eta_i^2)^{1+\alpha}. \tag{4}$$

Die Zweige der Indikatrix im positiven Quadranten sind:

für $\alpha = 0$: Ein Hyperbelast mit den Achsen als Asymptoten,

für $0 < |\alpha| < 1$: Kurven, die von jedem von 0 ausgehenden Halbstrahl im positiven Quadranten genau einmal getroffen werden und die Achsen als Asymptoten haben,

für $|\alpha| > 1$: Kurven, die von jedem von 0 ausgehenden Halbstrahl im positiven Quadranten genau einmal getroffen werden und im Nullpunkt unter Berührung einer Achse einmünden,

für $|\alpha| = 1$: Achsenparallele Gerade.

In allen Fällen ist mithin im positiven Quadranten eine Minkowski-Metrik φ eindeutig definiert, die auf den Quadranten $\eta_i^1 < 0, \eta_i^2 < 0$ fortgesetzt werden kann vermöge $\varphi(-\eta_i) = \varphi(\eta_i)$. Für die beiden anderen Quadranten braucht die Metrik zunächst nicht erklärt zu sein. Für jedes feste α ergibt sich nun die zur Natur $\{\varphi\}$ gehörige Klasse C_α von Maßbestimmungen

$$ds^2 = (B_k^1(x)dx^k)^{1-\alpha}(B_j^2(x)dx^j)^{1+\alpha}. \tag{5}$$

Dabei gehören zu $+\alpha$ und $-\alpha$ dieselben Klassen von Geometrien, weil sie lediglich durch eine Vertauschung der η_i-Achsen auseinander hervorgehen. Für $\alpha = 0$ hat man die Klasse der Riemannschen Geometrien mit indefiniter Metrik, für $|\alpha| = 1$ isotrope Metriken. Wir lösen unsere Aufgabe jetzt durch den Beweis des folgenden Satzes:

Satz. *Der Fundamentalsatz gilt für jede Klasse C_α mit $\alpha \neq \pm 1$.*

Ausführlicher formuliert: *Für $\alpha \neq \pm 1$ existiert zu jedem Tensorfeld $B_k^i(x)$ mit $B = \det(B_k^i) \neq 0$ genau ein affiner Zusammenhang $\Gamma^i_{jk}(x) = \Gamma^i_{kj}(x)$, unter dem die Metrik* (5) *invariant ist.*

Beweis. Für den gesuchten affinen Zusammenhang Γ würde gelten, daß bei infinitesimaler Parallelverschiebung

$$\delta\xi^l = -\Gamma^l_{jr}(x)\,\xi^j dx^r$$

gilt

$$0 = f^2(x + dx; \xi + \delta\xi) - f^2(x; \xi),$$

mithin

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial f^2}{\partial x^r} dx^r + \frac{\partial f^2}{\partial \xi^e} \delta \xi^e \\
&= (1-\alpha)(B^1_k \xi^k)^{-\alpha} B^1_{k,r} \xi^k dx^r (B^2_j \xi^j)^{1+\alpha} \\
&\quad + (1+\alpha)(B^2_j \xi^j)^{\alpha} B^2_{j,r} \xi^j dx^r (B^1_k \xi^k)^{1-\alpha} \\
&\quad - (1-\alpha)(B^1_k \xi^k)^{-\alpha} B^1_l \Gamma^{\,l}_{jr} \xi^j dx^r (B^2_j \xi^j)^{1+\alpha} \\
&\quad - (1+\alpha)(B^2_j \xi^j)^{\alpha} B^2_l \Gamma^{\,l}_{jr} \xi^j dx^r (B^1_k \xi^k)^{1-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Dies ist eine lineare Gleichung in dx^r, so daß man zunächst dx^r weglassen darf, weil die Beziehung für alle dx gilt. Sodann kann man durch die wegen (5) für die betrachteten ξ von Null verschiedenen Ausdrücke

$$(B^1_k \xi^k)^{-\alpha} (B^2_k \xi^k)^{\alpha}$$

dividieren und erhält

$$
\begin{aligned}
0 &= (1-\alpha) B^1_{k,r} \xi^k B^2_j \xi^j + (1+\alpha) B^2_{j,r} \xi^j B^1_k \xi^k \\
&\quad - (1-\alpha) B^1_l \Gamma^{\,l}_{kr} \xi^k B^2_j \xi^j - (1+\alpha) B^2_l \Gamma^{\,l}_{jr} \xi^j B^1_k \xi^k.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Rechts steht für $r=1, 2$ jeweils eine quadratische Form, die für mindestens drei Richtungen ξ verschwindet, so daß ihre symmetrischen Koeffizienten verschwinden müssen. Dies ergibt genau 6. i. a. inhomogene lineare Gleichungen für die 6 Unbekannten $\Gamma^{\,l}_{kr}$. Man könnte den Satz durch Berechnung der Determinante Δ dieses Systems beweisen, für die man erhalten würde

$$\Delta = (\alpha^2 - 1)^3 \cdot B^6$$

Ich will hier einen etwas eleganteren Weg zum Beweis einschlagen, bei dem die mühsame Berechnung der Determinante vermieden wird und sich zudem noch eine explizite Formel für $\Gamma^{\,l}_{kr}$ ergibt. Ich führe folgende Ausdrücke ein:

$$
\begin{aligned}
A_{lj} &= (1-\alpha) B^1_l B^2_j + (1+\alpha) B^2_l B^1_j \\
C_{ik,r} &= (1-\alpha) B^1_{i,r} B^2_k + (1+\alpha) B^2_{i,r} B^1_k.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Das Verschwinden der symmetrischen Koeffizienten in (6) führt dann gerade auf die Gleichungen

$$C_{ik,r} + C_{ki,r} = A_{li} \Gamma^{\,l}_{kr} + A_{lk} \Gamma^{\,l}_{ir}. \tag{8}$$

Die Gleichungen (8) sind notwendig und hinreichend dafür, daß Γ ein längentreuer affiner Zusammenhang sei.

Nun berechnet man leicht

$$\det(A_{lj}) = (\alpha^2 - 1) B^2 \neq 0,$$

so daß die inverse Matrix A^{ls} existiert mit $A_{li} A^{ls} = \delta_i^s$.

Setzt man

$$\Gamma^l_{kr} = A^{sl} \Gamma_{s,kr},$$

so schreibt sich (8)

$$C_{ik,r} + C_{ki,r} = \Gamma_{k,ri} + \Gamma_{i,rk}$$

woraus sich wegen der Symmetrie der Γ in den beiden hinteren Indizes ergibt

$$2\Gamma_{k,ir} = C_{ik,r} + C_{ki,r} - C_{ri,k} - C_{ir,k} + C_{rk,i} + C_{kr,i}$$

und schließlich

$$\Gamma^l_{ir} = \frac{1}{2} A^{kl} (C_{ik,r} + C_{ki,r} - C_{ri,k} - C_{ir,k} + C_{rk,i} + C_{kr,i}). \tag{9}$$

Wir erhalten also:

Der durch (9) *gegebene affine Zusammenhang ist der einzige, unter dem die Metrik* (5) *invariant ist; die A und C bestimmen sich dabei aus* (7).

Damit ist der Satz bewiesen und der gesuchte Affinzusammenhang darüberhinaus explizit bestimmt.

Zusatz bei der Korrektur am 30. 6. 1960. Inzwischen hat H. Freudenthal darauf hingewiesen, daß man die Weylsche Vermutung aus [6] auch aus den Sätzen von Weyl [7] beweisen kann: H. Freudenthal, *Archiv Math.* **11** (1960), 107—115.

Literatur.

[1] H. v. Helmholtz, Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen, *Göttinger Nachr.* **15** (1868).

[2] D. Laugwitz, Über die Invarianz quadratischer Formen bei linearen Gruppen und das Raumproblem, *Göttinger Nachr.* **1956**, 21—25.

[3] D. Laugwitz, Beiträge zur affinen Flächentheorie mit Anwendungen auf die allgemeinmetrische Differentialgeometrie, *Bayer Akad. Wiss., math.-nat. Kl.*, Abhandlung **93**, *München*, 1959.

[4] D. Laugwitz, Über eine Vermutung von Hermann Weyl zum Raumproblem, *Arch. Math.* **9** (1958), 128—133.

[5] O. Varga, Über Riemannsche Räume, die freie Beweglichkeit besitzen, *Schriftenreihe Inst. Math. Deutsche Akad. Wiss. Berlin,* Heft 1 (1957).

[6] H. Weyl, Kommentar zu Riemanns Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen, *Berlin,* 1918. (Besonders S. 26—27.)

[7] H. Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems, *Berlin,* 1923.

(Eingegangen am 16. Januar 1959)