Einige Sätze über das Volumenelement eines Riemannschen Raumes.

Herrn Prof. Dr. O. Varga zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von PAUL GÜNTHER (Leipzig).

In einer Arbeit beweist S. HELGASON [2] das folgende Lemma: In einem symmetrischen Riemannschen Raum negativer Krümmung ist die Oberfläche einer geodätischen Kugel eine monoton wachsende Funktion des Radius r, die sogar stärker als r^{n-1} wächst. Besonders wichtig ist dies, falls der Raum vollständig und einfach zusammenhängend ist. Dann ist er nach einem bekannten Satz von E. CARTAN [1] homöomorph dem euklidischen Raum, und ein Normalkoordinatensystem ist im ganzen Raum gültig. (Hierbei wird nicht die Symmetrie vorausgesetzt.) Beim Versuch, das Lemma von HELGASON für einen beliebigen Riemannschen Raum negativer Krümmung zu beweisen, bin ich zu folgendem Ergebnis gekommen: Ist für die Riemannsche Krümmung K eines zweidimensionalen Flächenelementes stets $A \leqq K \leqq B$, so ist $\sqrt{g}\left(\frac{\sin\sqrt{A}\,r}{\sqrt{A}\,r}\right)^{1-n}$ eine bezüglich r monoton fallende Funktion, während $\sqrt{g}\left(\frac{\sin\sqrt{B}\,r}{\sqrt{B}\,r}\right)^{1-n}$ eine monoton wachsende Funktion von r ist. Dabei ist g die Determinante aus den Komponenten des Fundamentaltensors in Normalkoordinaten. Ist eine der beiden Funktionen konstant, so ist der Raum von konstanter Krümmung. Dies wird in § 1 der vorliegenden Note bewiesen. Grundlage des Beweises ist eine von G. HERGLOTZ [3] angegebene Relation für den Krümmungstensor in Normalkoordinaten. In § 2 werden Anwendungen auf die Oberfläche und das Volumen geodätischer Kugeln gemacht, wobei sich das Lemma von HELGASON in der allgemeinen Fassung ergibt. Ferner wird gezeigt: Ist — ohne Voraussetzungen über die Krümmung — in einem V_3 die Oberfläche einer geodätischen Kugel stets gleich $4\pi\left(\frac{\sin\sqrt{A}\,r}{\sqrt{A}}\right)^2$, so ist der V_3 von konstanter Krümmung. In § 3 werden

Anwendungen auf harmonische Riemannsche Räume und auf die Grundlösung der zu einem V_n gehörigen Potentialgleichung gemacht.

§ 1. Es sei V_n ein Riemannscher Raum mit positiv definiter Metrik der Klasse C^3. Unter einer Normalumgebung vom Radius ϱ eines Punktes P_0 verstehen wir eine geodätische Kugel vom Radius ϱ um P_0, in deren Innerem sich ein Normalkoordinatensystem mit dem Ursprung P_0 einführen läßt. Ein solches Koordinatensystem bezeichnen wir mit (x^i), $i=1,2,\ldots,n$, die Komponenten des Fundamentaltensors mit g_{ij} bzw. g^{ij}, die Komponenten des Krümmungstensors mit R_{ijkl}; den geodätischen Abstand eines Punktes mit den Koordinaten x^i vom Ursprung P_0 bezeichnen wir mit[1] $r=(\overset{0}{g}_{ij}x^i x^j)^{\frac{1}{2}}$. Die g_{ij}, g^{ij} sind Funktionen der Klasse C^2, da man im allgemeinen bei Transformation auf Normalkoordinaten eine Differenzierbarkeitsordnung einbüßt. — Wir erinnern noch an die Formel für die Riemannsche Krümmung $K(p,q)$ eines in einem beliebigen Punkt von zwei linear unabhängigen Vektoren p^i, q^i aufgespannten Flächenelementes:

$$K(p,q)=-\frac{R_{risj}p^r q^i p^s q^j}{(g_{rs}g_{ij}-g_{rj}g_{si})p^r q^i p^s q^j}.$$

Satz 1. *In einer Normalumgebung U vom Radius ϱ eines Punktes P_0 sei stets $K(p,q)\geqq A$. Dann gilt in U und in Normalkoordinaten längs jeder von P_0 ausgehenden geodätischen Linie:*

$$\{\mathrm{Det}\,\|g_{ij}\|\}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{g}=\left(\frac{\sin\sqrt{A}\,r}{\sqrt{A}\,r}\right)^{n-1}\gamma_1,$$

wo γ_1 eine monoton fallende Funktion ist. Ist hierbei $A>o$, so ist der Radius ϱ der Normalumgebung bestimmt $\leqq \frac{\pi}{\sqrt{A}}$. Ist γ_1 längs jeder von P_0 ausgehenden geodätischen Linie konstant, so ist der V_n in U von konstanter Krümmung A. (Ist $A<o$, so ist natürlich zu schreiben: $\frac{\sin\sqrt{A}\,r}{\sqrt{A}\,r}=\frac{\operatorname{Sin}\sqrt{-A}\,r}{\sqrt{-A}\,r}$, und im Falle $A=o$ ist $\frac{\sin\sqrt{A}\,r}{\sqrt{A}\,r}=1$ zu setzen.)

Beweis. Wir gehen aus von der Herglotzschen Relation für den Krümmungstensor in Normalkoordinaten:

$$XX(g_{ij})+X(g_{ij})-\frac{1}{2}X(g_{ir})g^{rs}X(g_{sj})=2R_{risj}x^r x^s. \tag{1}$$

[1]) Das Zeichen ^{0} deutet an, daß die betreffende Größe im Punkte P_0 zu bilden ist.

Hierbei ist $X(\varphi)=x^l\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^l}=r\varphi'$, wo der Strich Differentiation längs der von P_0 ausgehenden geodätischen Linie in Richtung x^l bedeutet. Hieraus folgt, wie man leicht nachrechnet:

$$X(g^{ik}X(g_{ij}))+g^{ik}X(g_{ij})+\frac{1}{2}g^{ik}X(g_{ir})g^{rs}X(g_{sj})=2R_{r\cdot sj}^{\cdot k}x^r x^s,$$

und daraus

$$X(g^{ij}X(g_{ij}))+g^{ij}X(g_{ij})+\frac{1}{2}g^{ij}X(g_{ir})g^{rs}X(g_{sj})=2R_{r\cdot sk}^{\cdot k}x^r x^s. \tag{2}$$

Nun ist aber

$$g^{ij}X(g_{ij})=X(\log g). \tag{3}$$

Ferner folgt aus der Voraussetzung $K(p,q)\geqq A$ sofort

$$-R_{risj}p^r q^i p^s q^j\geqq A(g_{rs}g_{ij}-g_{rj}g_{si})p^r q^i p^s q^j,$$

woraus man für den verjüngten Krümmungstensor leicht die folgende Abschätzung gewinnt:

$$2R_{r\cdot sk}^{\cdot k}p^r p^s\leqq -2(n-1)Ag_{rs}p^r p^s.$$

Beachtet man noch $(g_{rs}-\overset{0}{g}_{rs})x^s=o$, so folgt:

$$2R_{r\cdot sk}^{\cdot k}x^r x^s\leqq -2(n-1)Ar^2. \tag{4}$$

Nun seien $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1},o$ die (reellen) Eigenwerte der Matrix $g^{ij}X(g_{ir})$. Null ist wegen $X(g_{ir})x^r=o$ Eigenwert; diese Beziehung gewinnt man leicht durch Differentiation der Gleichung $(g_{ir}-\overset{0}{g}_{ir})x^r=0$. Dann ist

$$\begin{aligned}(X(\log g))^2=(g^{ij}X(g_{ij}))^2=\left(\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k\right)^2\leqq(n-1)\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^2=\\=(n-1)g^{ij}X(g_{ir})g^{rs}X(g_{sj}).\end{aligned} \tag{5}$$

Trägt man nun (3), (4) und (5) in die Gleichung (2) ein, so erhält man die folgende Differentialungleichung für $\log g$ längs einer von P_0 ausgehenden geodätischen Linie:

$$XX(\log g)+X(\log g)+\frac{1}{2(n-1)}(X(\log g))^2+2(n-1)Ar^2\leqq o. \tag{6}$$

Setzt man hier $g=y^{2(n-1)}$, so erhält man schließlich:

$$L[y]\equiv XX(y)+X(y)+Ar^2y=(r^2y')'+Ar^2y\leqq o,$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0)=\overset{0}{g}{}^{\frac{1}{2(n-1)}}$, $y'(0)=o$. Die Funktion

$z = \frac{\sin\sqrt{A}r}{\sqrt{A}r}$ ist eine Lösung von $L[z] = o$ mit den Anfangswerten $z(0) = 1$, $z'(0) = o$. Dann erhält man mittels der Greenschen Formel:

$$\int_0^r z L[y] dr = r^2[y'(r)z(r) - y(r)z'(r)] = r^2 z^2 \left(\frac{y}{z}\right)'.$$

Ist nun zunächst A negativ oder null, so ist $z > o$ für alle positiven r, und wegen $L[y] \leqq o$ das Integral links negativ, also $\left(\frac{y}{z}\right)' \leqq o$, d. h. $\frac{y}{z}$ monoton fallend, das gleiche gilt dann auch für $\gamma_1 = \left(\frac{y}{z}\right)^{n-1}$. Ist A positiv, so ist z für $0 < r < \frac{\pi}{\sqrt{A}}$ positiv, also für dieses Intervall wie oben $\frac{y}{z}$ monoton fallend. Dann ist aber $\lim\limits_{r \to \frac{\pi}{\sqrt{A}} - 0} \frac{y}{z}$ entweder endlich oder $-\infty$; dies kann aber nur dann eintreten, wenn y im Intervall $0 < r \leqq \frac{\pi}{\sqrt{A}}$ eine Nullstelle hat. Da in einer Normalumgebung g und damit auch y stets $\neq o$ ist, muß also der Radius der Normalumgebung $\leqq \frac{\pi}{\sqrt{A}}$ sein.

Sei nun $\gamma_1 = \text{const.}$ längs jeder von P_0 ausgehenden geodätischen Linie. Dann ist $g = \left(\frac{\sin\sqrt{A}r}{\sqrt{A}r}\right)^{2(n-1)} \overset{0}{g}$ eine Funktion von r allein, die der Relation (6) genügt, in der stets das Gleichheitszeichen gilt. Vergleicht man dies mit der Gleichung (2), so erhält man:

$$\left\{\frac{1}{2(n-1)}(X(\log g))^2 - \frac{1}{2} g^{ij} X(g_{ir}) g^{rs} X(g_{sj})\right\} + \{2(n-1)Ar^2 + 2R_{r\cdot sk}^{\cdot k} x^r x^s\} = o.$$

Hierin ist wegen der Abschätzungen (4) und (5) jede der beiden Klammern $\leqq o$, so daß also jede für sich verschwinden muß. Die erste der beiden Klammern kann aber nur verschwinden, wenn in der bei der Abschätzung (5) benutzten Schwarzschen Ungleichung das Gleichheitszeichen gilt, was wiederum nur dann sein kann, wenn alle Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ der Matrix $g^{ij} X(g_{ir})$ untereinander gleich sind: $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = \lambda = \frac{1}{n-1} X(\log g)$. Ist nun p^r ein Vektor mit konstanten Komponenten, für den $g_{ij} x^i p^j = \overset{0}{g}_{ij} x^i p^j = o$

gilt, so ist also längs der von P_0 ausgehenden geodätischen Linie durch x^i

$$X(g_{ir})p^r = \lambda g_{ir} p^r = X\left(\log\left(\frac{\sin\sqrt{A}\,r}{\sqrt{A}\,r}\right)^2\right) g_{ir} p^r.$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$g_{ir} p^r = \left(\frac{\sin\sqrt{A}\,r}{\sqrt{A}\,r}\right)^2 \overset{0}{g}_{ir} p^r, \quad \text{falls} \quad \overset{0}{g}_{ir} x^i p^r = 0.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $\overset{0}{g}_{ir} = \delta_{ir}, \overset{0}{g} = 1$, $r^2 = \Sigma x^{i^2}$ annehmen. Ist dann q^r ein ganz beliebiger Vektor, und setzt man

$$p^r = q^r - \alpha x^r, \quad \alpha = \frac{\Sigma x^i q^i}{r^2}$$

so ist $g_{ir} x^i p^r = \Sigma x^r p^r = o$, so daß wir erhalten

$$g_{ij} q^i q^j = g_{ij} p^i p^j + \alpha^2 r^2 = \left(\frac{\sin\sqrt{A}\,r}{\sqrt{A}\,r}\right)^2 \Sigma p^{i^2} + \alpha^2 r^2 =$$

$$= \left(\frac{\sin\sqrt{A}\,r}{\sqrt{A}\,r}\right)^2 \{\Sigma q^{i^2} - \alpha^2 r^2\} + \alpha^2 r^2 =$$

$$= \sum_{i,j} \left\{\frac{x^i x^j}{r^2} + \left(\frac{\sin\sqrt{A}\,r}{\sqrt{A}\,r}\right)^2 \left[\delta_{ij} - \frac{x^i x^j}{r^2}\right]\right\} q^i q^j.$$

Demnach gilt:

$$g_{ij} = \frac{x^i x^j}{r^2} + \left(\frac{\sin\sqrt{A}\,r}{\sqrt{A}\,r}\right)^2 \left(\delta_{ij} - \frac{x^i x^j}{r^2}\right),$$

und dies ist das Linienelement eines Raumes der konstanten Krümmung A in Normalkoordinaten. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Bemerkung 1. Die Voraussetzung $K(p, q) \geqq A$ wird beim Beweis des Satzes nicht vollständig ausgenutzt, da ja nur eine Abschätzung für den verjüngten Krümmungstensor benötigt wird. Die Abschätzung (4) ist insbesondere in einem Einsteinschen Raum — gekennzeichnet durch $R_{ij} = R^k_{.ijk} = \dfrac{R}{n} g_{ij}$, $R = \text{const}$ — mit dem Gleichheitszeichen erfüllt, wenn man $A = \dfrac{R}{n(n-1)}$ setzt. Also gelten auch alle Behauptungen des Satzes, wenn anstelle der Voraussetzung $K(p, q) \geqq A$ die Voraussetzung gemacht wird, daß der V_n einEinsteinscher Raum ist und wenn $A = \dfrac{R}{n(n-1)}$ gesetzt wird.

BEMERKUNG 2. Aus unserem Beweis folgt noch leicht, daß für jede von P_0 ausgehende geodätische Linie eine Zahl r_0 existiert, $0 \leqq r_0 \leqq \varrho$, so daß für alle r mit $0 \leqq r \leqq r_0$ stets $\gamma_1 = \sqrt{\overset{0}{g}}$ gilt, während für $r > r_0$ die Funktion γ_1 eigentlich monoton wächst.

Satz 2. *In einer Normalumgebung U vom Radius ϱ eines Punktes P_0 sei stets $K(p, q) \leqq B$. Dann gilt in U und in Normalkoordinaten längs jeder von P_0 ausgehenden geodätischen Linie*

$$\{\mathrm{Det}\,\|g_{ij}\|\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{g} = \left(\frac{\sin\sqrt{B}r}{\sqrt{B}r}\right)^{n-1} \gamma_2,$$

wo γ_2 eine monoton wachsende Funktion ist. (Falls $B > o$ kann die Behauptung nur für $0 \leqq r \leqq \frac{\pi}{\sqrt{B}}$ gelten.) Ist γ_2 längs jeder von P_0 ausgehenden geodätischen Linie konstant, so ist der V_n in U von konstanter Krümmung B.

Wir beweisen zunächst einen einfachen

Hilfssatz. *Es seien $a_{ij}z^i z^j$ und $b_{ij}z^i z^j$ zwei positiv definite quadratische Formen in n Variablen. Es sei stets $a_{ij}z^i z^j \geqq b_{ij}z^i z^j$. Dann ist auch* $\mathrm{Det}\,\|a_{ij}\| \geqq \mathrm{Det}\,\|b_{ij}\|$. *Gilt dabei* $\mathrm{Det}\,\|a_{ij}\| = \mathrm{Det}\,\|b_{ij}\|$, *so ist auch $a_{ij} = b_{ij}$.*

BEWEIS. Im R_n mögen die $z^1, \ldots, z^n$ rechtwinklige kartesische Koordinaten bedeuten. Durch die Gleichungen $a_{ij}z^i z^j = 1$ und $b_{ij}z^i z^j = 1$ werden zwei Ellipsoide E_a, E_b bestimmt. Das Innere der beiden Ellipsoide sei mit I_a bzw. I_b bezeichnet. Auf der Oberfläche von E_a ist $1 \geqq b_{ij}z^i z^j$, d. h. es ist E_a im Inneren von E_b gelegen, also $I_a \subset I_b$. Für die (euklidischen) Volumina gilt dann $V_a \leqq V_b$. Nun ist $V_a = C_n\{\mathrm{Det}\,\|a_{ij}\|\}^{-\frac{1}{2}}$, $V_b = C_n\{\mathrm{Det}\,\|b_{ij}\|\}^{-\frac{1}{2}}$ wobei C_n das Volumen der n-dimensionalen euklidischen Einheitskugel ist. Daraus folgt sofort die erste Behauptung. Ist aber nun $\mathrm{Det}\,\|a_{ij}\| = \mathrm{Det}\,\|b_{ij}\|$, so gilt auch $V_a = V_b$ d. h. $E_a \equiv E_b$ und es ist stets $a_{ij}z^i z^j = b_{ij}z^i z^j$ für alle $z^1, \ldots, z^n$, woraus die zweite Behauptung folgt.

BEWEIS VON SATZ 2: Wir gehen wieder von einem Normalkoordinatensystem in U mit dem Ursprung P_0 und der Herglotzschen Relation (1) aus; wir multiplizieren diese mit $z^i z^j$, wo z^i ein konstantes Werte-n-tupel ist:

$$XX(g_{ij}z^i z^j) + X(g_{ij}z^i z^j) - \frac{1}{2} X(g_{ir}z^i) g^{rs} X(g_{sj}z^j) = 2 R_{risj} x^r x^s z^i z^j. \tag{7}$$

Wir betrachten diese Relation längs einer beliebigen, aber festen geodätischen Linie von P_0 aus, und wählen z^i so, daß $\overset{0}{g}_{ij} x^i z^j = g_{ij} x^i z^j = 0$ ist. $\left(\frac{x^i}{r}\right.$ ist ja längs einer solchen Linie konstant.$\Big)$ Dann ergibt sich aus der Voraussetzung sofort

$$2R_{risj}x^r z^i x^s z^j \geqq -2Br^2 g_{ij} z^i z^j. \tag{8}$$

Setzt man $g^{ri}X(g_{rj}z^j)=v^i$, $g_{ij}z^j=u_i$, so gilt die Ungleichung

$$(u_i v^i)^2 \leqq (g_{ij}v^i v^j)(g^{ij}u_i u_j).$$

Hierin ist

$$u_i v^i = g^{ri}X(g_{rj}z^j)g_{ik}z^k = X(g_{rj}z^r z^j),$$

$$g_{ij}v^i v^j = g_{ij}g^{ri}X(g_{rk}z^k)g^{sj}X(g_{sl}z^l) = X(g_{ri}z^i)g^{rs}X(g_{sj}z^j),$$

$$g^{ij}u_i u_j = g_{ij}z^i z^j.$$

Damit erhalten wir die Abschätzung

$$X(g_{ri}z^i)g^{rs}X(g_{sj}z^j) \geqq (g_{ij}z^i z^j)^{-1}\big(X(g_{ij}z^i z^j)\big)^2. \tag{9}$$

Setzt man (8) und (9) in (7) ein, so erhält man, wenn man noch $g_{ij}z^i z^j = f$ setzt:

$$XXf + Xf - \frac{1}{2}f^{-1}(Xf)^2 + 2Bfr^2 \geqq 0,$$

und daraus für $y=\sqrt{f}$, $f>0$:

$$L[y] \equiv XX(y) + X(y) + Br^2 y = (r^2 y')' + Br^2 y \geqq 0,$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0)=(\overset{0}{g}_{ij}z^i z^j)^{\frac{1}{2}}$, $y'(0)=0$. Wie beim Beweis von Satz 1 erhält man mittels der Funktion $z=\dfrac{\sin\sqrt{B}r}{\sqrt{B}r}$ die Formel

$$\int_0^r z L[y]\,dr = r^2 z^2 \left(\frac{y}{z}\right)',$$

aus der man wegen $L[y] \geqq o$ entnimmt, daß $\dfrac{y}{z}$ monoton wächst. Ist hier $B>o$, so kann die Behauptung nur für $r \leqq \dfrac{\pi}{\sqrt{B}}$ gelten, da für $\dfrac{\pi}{\sqrt{B}} < r$ die Funktion z negativ wird.

Wir erhalten also als vorläufiges Ergebnis, daß längs jeder von P_0 ausgehenden geodätischen Linie die Funktion $g_{ij}z^i z^j\left(\dfrac{\sin\sqrt{B}r}{\sqrt{B}r}\right)^{-2}$ monoton wächst,[2]) falls $g_{ij}x^i z^j = \overset{0}{g}_{ij}x^i z^j = o$. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $\overset{0}{g}_{ij} = \delta_{ij}$ gilt. Die quadratische Form $g_{ij}z^i z^j$ mit der

[2]) Insbesondere folgt hieraus $g_{ij}z^i z^j \geqq \overset{0}{g}_{ij}z^i z^j$, was beim Beweis des Satzes von E. Cartan [1] eine wichtige Rolle spielt.

Nebenbedingung $\Sigma x^i z^i = o$ kann als quadratische Form in $n-1$ Veränderlichen gedeutet werden, deren Determinante sei $\tilde{g}$. Aus dem Hilfssatz folgt dann sofort, daß $\sqrt{\tilde{g}}\left(\frac{\sin\sqrt{B}r}{\sqrt{B}\cdot r}\right)^{1-n}$ längs jeder von P_0 ausgehende geodätischen Linie monoton wächst. Da aber $g_{ij}x^j = x^i$ ist, gilt $\tilde{g} = g$ und es folgt die erste Behauptung unseres Satzes.

Ist nun $\sqrt{g}\left(\frac{\sin\sqrt{B}r}{\sqrt{B}r}\right)^{1-n} = \text{const}$ für jede Geodätische von P_0 aus, so folgt nach dem Hilfssatz, daß $g_{ij}z^i z^j\left(\frac{\sin\sqrt{B}r}{\sqrt{B}r}\right)^{-2} = \Sigma z^{i2} = \text{const}$ längs jeder solchen Linie und für alle z^i mit $\Sigma x^i z^i = o$. Hieraus folgert man leicht wie beim Schluß des Beweises von Satz 1, daß

$$g_{ij} = \frac{x^i x^j}{r^2} + \left(\frac{\sin\sqrt{B}r}{\sqrt{B}r}\right)^2\left(\delta_{ij} - \frac{x^i x^j}{r^2}\right)$$

gilt, also der V_n ein Raum der konstanten Krümmung B ist.

§ 2. Wir wenden die Ergebnisse von Satz 1 und 2 jetzt auf die Oberfläche und das Volumen geodätischer Kugeln an. Es bezeichne $\Omega(P_0, r)$ bezw. $V(P_0, r)$ die Oberfläche bezw. das Volumen der geodätischen Kugel mit dem Mittelpunkt P_0 und dem Radius r.

Satz 3. *Ist in einer Normalumgebung U eines Punktes P_0 stets $K(p, q) \geqq A$, so ist in U die Funktion $\Omega(P_0, r)\left(\frac{\sin\sqrt{A}r}{\sqrt{A}}\right)^{1-n}$ monoton fallend. Ist diese Funktion konstant, so ist der V_n in U von konstanter Krümmung A.*

Beweis. Wir wählen das Normalkoordinatensystem mit dem Ursprung P_0, dann gilt

$$\Omega(P_0, r) = \int_E r^{n-1}(\sqrt{g})_r d\omega.$$

Dabei bezeichnet E die Einheitskugel, $d\omega$ deren (euklidisches) Oberflächenelement, während $(\sqrt{g})_r$ die Werte von $\sqrt{g}$ auf der geodätischen Kugel mit Radius r darstellt. Nun ist $\sqrt{g} = \left(\frac{\sin\sqrt{A}r}{\sqrt{A}r}\right)^{n-1}\gamma_1$, wo γ_1 nach Satz 1 monoton fällt, (längs jeder von P_0 ausgehenden geodätischen Linie), also gilt

$$\Omega(P_0, r)\left(\frac{\sin\sqrt{A}r}{\sqrt{A}}\right)^{1-n} = \int_E (\gamma_1)_r d\omega,$$

woraus der erste Teil der Behauptung folgt. Ist nun $\Omega(P_0, r)\left(\frac{\sin\sqrt{A}r}{\sqrt{A}}\right)^{1-n} = \text{const}$, so ist für alle betrachteten r

$$\int_E (\gamma_1)_r \, d\omega = \text{const},$$

oder für $r_1 < r_2$

$$\int_E \{(\gamma_1)_{r_1} - (\gamma_1)_{r_2}\} d\omega = o.$$

Da hier der Integrand wegen der Monotonieeigenschaft von γ_1 nicht negativ ist, folgt $(\gamma_1)_{r_1} = (\gamma_1)_{r_2}$ für jede geodätische Linie von P_0 aus. Also ist längs jeder solchen Linie $\gamma_1 = \text{const}$ und aus Satz 1 folgt die Behauptung.

BEMERKUNG. Aufgrund der Bemerkung 1 von Satz 1 kann auch im Satz 3 die Voraussetzung $K(p, q) \geqq A$ ersetzt werden durch $R_{ij} = \frac{R}{n} g_{ij}$; dann gelten alle Behauptungen, wenn man $A = \frac{R}{n(n-1)}$ setzt.

Satz 4. *Ist in einer Normalumgebung U eines Punktes P_0 stets $K(p, q) \leqq B$, so ist in U die Funktion $\Omega(P_0, r)\left(\frac{\sin\sqrt{B}r}{\sqrt{B}}\right)^{1-n}$ monoton wachsend. $\left(\text{Ist } B > 0, \text{ so gilt die Behauptung nur für } 0 \leqq r \leqq \frac{\pi}{\sqrt{B}}.\right)$ Ist diese Funktion konstant, so ist der V_n von konstanter Krümmung B.*

BEWEIS. Analog zu Satz 3.

BEMERKUNG. Ist hier $B = o$, so ist $\Omega(P_0, r) r^{1-n}$ monoton wachsend, also insbesondere $\Omega(P_0, r)$ monoton wachsend. Dies ist das Lemma von HELGASON. Ist $B < 0$ und der Radius der Normalumgebung $\varrho = \infty$ (was nach dem Satz von E. CARTAN für einen vollständigen, einfach zusammenhängenden V_n mit $K(p, q) \leqq o$ richtig ist,) so gilt sogar $\lim_{r\to\infty} \Omega(P_0, r) r^{1-n} = \infty$.

Im folgenden wird $S(r, A) = \int_0^r \left(\frac{\sin\sqrt{A}r}{\sqrt{A}}\right)^{n-1} dr$ gesetzt. Dann erhält man für das Volumen $V(P_0, r)$ einer geodätischen Kugel die folgenden Sätze.

Satz 5. *Ist in einer Normalumgebung U eines Punktes P_0 stets $K(p, q) \geqq A$, so ist die Funktion $V(P_0, r) S^{-1}(r, A)$ in U eine monoton fallende Funktion von r. Ist sie konstant, so ist der V_n von konstanter Krümmung A.*

BEWEIS. Es ist

$$V(P_0, r) = \int_0^r \Omega(P_0, \sigma) d\sigma,$$

$$\{V(P_0, r) S^{-1}(r, A)\}' = \Omega(P_0, r) S^{-1}(r, A) - S^{-2}(r, A) S'(r, A) \int_0^r \Omega(P_0, \sigma) d\sigma.$$

Nun gilt für $0 \leqq \sigma \leqq r$ wegen Satz 3

$$\frac{\Omega(\sigma)}{S'(\sigma)} \geqq \frac{\Omega(r)}{S'(r)},$$

also

$$\Omega(\sigma) \geqq \frac{\Omega(r)}{S'(r)} S'(\sigma), \quad \frac{S'(r)}{S^2(r)} \int_0^r \Omega(\sigma) d\sigma \geqq \frac{\Omega(r)}{S^2(r)} \int_0^r S'(\sigma) d\sigma = \frac{\Omega(r)}{S(r)},$$

d. h. $\{V(P_0, r) S^{-1}(r, A)\}' \leqq o$, womit der erste Teil der Behauptung bewiesen ist. Ist aber $V(P_0, r) = \text{const} \cdot S(r, A)$, so ist offensichtlich $\Omega(P_0, r) = \text{const}\, S'(r, A)$ und wieder nach Satz 3 folgt der zweite Teil der Behauptung.

Satz 6. *Ist in einer Normalumgebung U eines Punktes P_0 stets $K(p, q) \leqq B$, so ist die Funktion $V(P_0, r) S^{-1}(r, B)$ in U eine monoton wachsende Funktion von r. Ist sie konstant, so ist der V_n von konstanter Krümmung B.*

BEWEIS. Analog zum Beweis von Satz 5.

In den voranstehenden Sätzen wurde unter einschränkenden Bedingungen für die Krümmung des V_n bewiesen, daß der V_n konstante Krümmung besitzt, falls auch nur für einen Punkt P_0 gilt $\Omega(P_0, r) \left(\frac{\sin \sqrt{A} r}{\sqrt{A}}\right)^{1-n} = \text{const}$. Es fragt sich, ob man das gleiche Resultat erhält, wenn man keine Bedingungen für die Krümmung voraussetzt, aber fordert, daß für alle Punkte P gilt $\Omega(P, r) = \text{const} \cdot \left(\frac{\sin \sqrt{A} r}{\sqrt{A}}\right)^{n-1}$. Der nachstehende Satz zeigt, daß dies wenigstens für einen V_3 richtig ist, (für einen V_2 ist es trivial).

Satz 7. *Es sei in einem V_3 der Klasse C^4 für alle Punkte P und für hinreichend kleine r stets*

$$\Omega(P, r) = 4\pi \left(\frac{\sin \sqrt{A} r}{\sqrt{A}}\right)^2$$

mit einer Konstanten A. Dann ist der V_3 von konstanter Krümmung A.

Beweis. Wir wählen einen Punkt P_0 und das zugehörige Normalkoordinatensystem mit $\overset{0}{g}_{ij} = \delta_{ij}$. Dann ist

$$\Omega(P_0, r) = \int_E r^2 (\sqrt{g})_r \, d\omega = 4\pi \left(\frac{\sin \sqrt{A}\, r}{\sqrt{A}} \right)^2,$$

oder

$$\int_E (\sqrt{g})_r \, d\omega = 4\pi \left(\frac{\sin \sqrt{A}\, r}{\sqrt{A}\, r} \right)^2. \tag{10}$$

Entwickelt man hier $\sqrt{g}$ bis zu den Gliedern zweiter Ordnung — wobei man die bekannte, in P_0 gültige Formel $\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^r \partial x^s} = -\frac{1}{3}(R_{rijs} + R_{sijr})$ und $\int_E x^i x^j d\omega = \frac{4\pi r^2}{3} \delta_{ij}$ zu verwenden hat —, so erhält man leicht durch Vergleich der in r quadratischen Glieder auf beiden Seiten von (10): $R = 6A$, wo R die skalare Krümmung des V_3 ist. Die letzte Beziehung ist zunächst in P_0 richtig, da P_0 aber beliebig war, gilt sie überall; R ist also insbesondere konstant.

Nunmehr berechnen wir die Gaußsche Krümmung K^* in einem Punkt einer Kugel um P_0 mit Radius r; eine solche Kugel besitzt in dem gewählten Normalkoordinatensystem die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r_2$. Daher läßt sich ihr zweiter Fundamentaltensor leicht berechnen. Man erhält nach einiger Rechnung und unter Benutzung der Gauß-Codazzischen Gleichung:

$$K^* = K_1 + \frac{1}{r^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} X(\log g) + \frac{1}{8} (X(\log g))^2 - \frac{1}{8} g^{ij} X(g_{jr}) g^{rs} X(g_{si}) \right\}.$$

Hierin bedeutet K_1 die Riemannsche Krümmung des die Kugel tangierenden Flächenelementes. Seien nun x^i die Koordinaten des betrachteten Kugelpunktes, dann ist $\frac{x^i}{r}$ der Flächennormalenvektor. Wählt man in (x^i) drei zueinander orthogonale Richtungen 1, 2, 3, von denen 3 die Richtung der Flächennormalen besitzt, so ist

$$R_{i\,.\,jk}^{\,.\,k} \frac{x^i x^j}{r^2} = -K(3,1) - K(3,2) = -(K(1,2) + K(2,3) + K(3,1)) + K(1,2) =$$
$$= -\frac{R}{2} + K(1,2) = -\frac{R}{2} + K_1.$$

Damit erhalten wir:

$$K^* = R_{i\,.\,jk}^{\,.\,k} \frac{x^i x^j}{r^2} + \frac{R}{2} + \frac{1}{r^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} X(\log g) + \frac{1}{8} (X(\log g))^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{8} g^{ij} X(g_{jr}) g^{rs} X(g_{si}) \right\}.$$

Hierin läßt sich nun der erste Term auf der linken Seite mittels der Relation (2) berechnen, und wir erhalten

$$K^* - \frac{R}{2} - \frac{1}{r^2} = \frac{1}{2r^2}\Big\{ XX(\log g) + 2X(\log g) + \frac{1}{4}(X(\log g))^2 +$$

$$+ \frac{1}{4} g^{ij} X(g_{jr}) g^{rs} X(g_{si}) \Big\}.$$

Diese Gleichung integrieren wir über die gesamte Kugeloberfläche und beachten die folgenden, aus der Voraussetzung sich leicht ergebenden Formeln:

$$\int_E \sqrt{g}\, d\omega = 4\pi \left(\frac{\sin \sqrt{A}r}{\sqrt{A}r} \right)^2,$$

$$\int_E X(\log g) \sqrt{g}\, d\omega = 16\pi \frac{\sin \sqrt{A}r}{\sqrt{A}r} \Big\{ \cos \sqrt{A}r - \frac{\sin \sqrt{A}r}{\sqrt{A}r} \Big\}$$

$$\int_E \Big\{ XX(\log g) + \frac{1}{2}(X(\log g))^2 \Big\} \sqrt{g}\, d\omega =$$

$$= 16\pi \Big\{ 1 - 2\sin^2 \sqrt{A}r - 3 \frac{\sin \sqrt{A}r}{\sqrt{A}r} \cos \sqrt{A}r + 2\left(\frac{\sin \sqrt{A}r}{\sqrt{A}r} \right)^2 \Big\}.$$

Ferner ist nach dem Gauß-Bonnetschen Integralsatz:

$$\int_E K^* r^2 \sqrt{g}\, d\omega = 4\pi.$$

Wir erhalten schließlich

$$\text{(11)} \qquad \frac{1}{8\cdot 4\pi} \int_E \{ g^{ij} X(g_{rj}) g^{rs} X(g_{si}) - (X(\log g))^2 \} \sqrt{g}\, d\omega =$$

$$= - \Big\{ \cos \sqrt{A}r - \frac{\sin \sqrt{A}r}{\sqrt{A}r} \Big\}^2.$$

Wir bezeichnen das Integral links mit I und werten es aus, indem wir die Komponenten des Fundamentaltensors g_{ij} im Punkt P_0 entwickeln. Unter Beachtung der Formeln

$$X(g_{rs}) = -\frac{2}{3} \overset{0}{R}_{ri_1i_2s} x^{i_1} x^{i_2} + \cdots, \quad X(\log g) = -\frac{2}{3} \overset{0}{R}_{i_1i_2} x^{i_1} x^{i_2} + \cdots$$

erhalten wir also

$$I = \frac{4}{9} (\overset{0}{R}{}^{ij}_{\cdot i_1 i_2} \overset{0}{R}_{i i_3 i_4 j} - \overset{0}{R}_{i_1i_2} \overset{0}{R}_{i_3i_4}) \int_E x^{i_1} x^{i_2} x^{i_3} x^{i_4} d\omega + \cdots$$

und daraus

$$I = \frac{4 \cdot 4\pi}{3 \cdot 9 \cdot 5} r^4 \{ \overset{0}{R}{}^{i}{}_{.\, i_1 i_2 .}{}^{j} \overset{0}{R}_{i i_3 i_4 j} - \overset{0}{R}_{i_1 i_2} \overset{0}{R}_{i_3 i_4} \} \{ \delta^{i_1 i_2} \delta^{i_3 i_4} + \delta^{i_1 i_3} \delta^{i_2 i_4} + \delta^{i_1 i_4} \delta^{i_2 i_3} \} + \cdots$$

$$= \frac{4 \cdot 4\pi}{3 \cdot 9 \cdot 5} r^4 \{ \overset{0}{R}{}^{i_1 i_2 i_3 i_4} \overset{0}{R}_{i_1 i_2 i_3 i_4} + \overset{0}{R}{}^{i_1 i_2 i_3 i_4} \overset{0}{R}_{i_1 i_3 i_2 i_4} - \overset{0}{R}{}^{i_1 i_2} \overset{0}{R}_{i_1 i_2} - R^2 \}.$$

Beachtet man noch $2 \overset{0}{R}{}^{i_1 i_2 i_3 i_4} \overset{0}{R}_{i_1 i_3 i_2 i_4} = \overset{0}{R}{}^{i_1 i_2 i_3 i_4} \overset{0}{R}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ und die, aus dem identischen Verschwinden des Konformkrümmungstensors sich ergebende Relation

$$R^{i_1 i_2 i_3 i_4} C_{i_1 i_2 i_3 i_4} = R^{i_1 i_2 i_3 i_4} R_{i_1 i_2 i_3 i_4} - 4 R^{i_1 i_2} R_{i_1 i_2} + R^2 = 0$$

so erhält man schließlich

$$I = \frac{4 \cdot 4\pi}{3 \cdot 9} r^4 \left\{ \overset{0}{R}{}^{i_1 i_2} \overset{0}{R}_{i_1 i_2} - \frac{1}{2} R^2 \right\} + \cdots .$$

Andererseits gilt

$$\left(\cos \sqrt{A} r - \frac{\sin \sqrt{A} r}{\sqrt{A} r} \right)^2 = \frac{1}{9} A^2 r^4 + \cdots = \frac{1}{9 \cdot 9 \cdot 4} R^2 r^4 + \cdots .$$

Damit erhält man aus der Gleichung (11) sofort die Beziehung

$$\overset{0}{R}{}^{ij} \overset{0}{R}_{ij} - \frac{1}{3} R^2 = \left(\overset{0}{R}{}^{ij} - \frac{1}{3} R g^{ij} \right) \left(\overset{0}{R}_{ij} - \frac{1}{3} R g_{ij} \right) = 0,$$

d. h. $\overset{0}{R}_{ij} = \frac{1}{3} R g_{ij}$. Diese Gleichung gilt wiederum zunächt in P_0, da P_0 aber beliebig gewählt war, gilt sie überall. Damit ist die Behauptung bewiesen.

§ 3. Wir geben noch eine Anwendung unserer Sätze auf harmonische Riemannsche Räume. (Vergleiche hierzu SCHOUTEN [5], p. 381 ff.) In einem zentralharmonischen V_n mit dem Zentrum P_0 ist $\sqrt{g}$ in Normalkoordinaten bekanntlich eine Funktion von r allein und durch

$$\chi(r) = \int_a^r \frac{d\sigma}{\sigma^{n-1} \sqrt{g(\sigma)}}, \; a > 0$$

wird eine Grundlösung der zum V_n gehörigen Potentialgleichung $\Delta_2 u = o$ geliefert. (a kann beliebig klein gewählt werden.) Wir setzen noch

$$T(r, A) = \int_a^r \left(\frac{\sin \sqrt{A} \sigma}{\sqrt{A}} \right)^{1-n} d\sigma.$$

Die Funktion T stellt offensichtlich die Grundlösung eines Raumes der konstanten Krümmung A dar.

Satz 8. *In einer Normalumgebung U des Punktes P_0 eines bezügl. P_0 zentralharmonischen V_n sei stets $K(p,q) \geqq A$ (bzw. $K(p,q) \leqq A$). Dann ist in U die Funktion $\chi(r) T^{-1}(r, A)$ monoton wachsend (bzw. monoton fallend). Besitzt der Raum die Grundlösung $T(r, A)$ so ist er von konstanter Krümmung A.*

BEWEIS. Es genügt, den Fall $K(p,q) \geqq A$ zu behandeln. Dann ist

$$(\chi T^{-1})' = \chi' T^{-1} - \frac{\chi}{T^2} T' = \frac{1}{T}\left\{\frac{1}{r^{n-1}\sqrt{g}} - \frac{\chi}{T}\left(\frac{\sin\sqrt{A}r}{\sqrt{A}}\right)^{1-n}\right\}.$$

Nun gilt nach Satz 1 für $\sigma \leqq r$

$$\chi'(\sigma) = \frac{1}{\sigma^{n-1}\sqrt{g(\sigma)}} = \left(\frac{\sin\sqrt{A}\sigma}{\sqrt{A}}\right)^{1-n} \frac{1}{\gamma_1(\sigma)} \leqq \left(\frac{\sin\sqrt{A}\sigma}{\sqrt{A}}\right)^{1-n} \frac{1}{\gamma_1(r)} =$$

$$= \left(\frac{\sin\sqrt{A}r}{\sqrt{A}}\right)^{n-1} \left(\frac{\sin\sqrt{A}\sigma}{\sqrt{A}}\right)^{1-n} \cdot \frac{1}{r^{n-1}\sqrt{g(r)}} = \left(\frac{\sin\sqrt{A}r}{\sqrt{A}}\right)^{n-1} \left(\frac{\sin\sqrt{A}\sigma}{\sqrt{A}}\right)^{1-n} \chi'(r).$$

Also für $a \leqq \sigma \leqq r$

$$\chi(r) = \int_a^r \chi'(\sigma)\, d\sigma \leqq \left(\frac{\sin\sqrt{A}r}{\sqrt{A}}\right)^{n-1} \chi'(r) \int_a^r \left(\frac{\sin\sqrt{A}\sigma}{\sqrt{A}}\right)^{1-n} d\sigma =$$

$$= \left(\frac{\sin\sqrt{A}r}{\sqrt{A}}\right)^{n-1} \chi'(r)\, T(r, A).$$

Für $r \leqq a$ erhält man analog die gleiche Abschätzung. Demnach

$$\frac{\chi(r)}{T}\left(\frac{\sin\sqrt{A}r}{\sqrt{A}}\right)^{1-n} \leqq \chi',$$

d. h. $(\chi T^{-1})' \geqq o$, χT^{-1} monoton wachsend.

Besitzt der Raum die Grundlösung $T(r, A)$, so muß wegen

$$T'(r) = \chi'(r) = \frac{1}{r^{n-1}\sqrt{g(r)}} = \left(\frac{\sin\sqrt{A}r}{\sqrt{A}}\right)^{1-n}$$

die Funktion γ_1 offenbar konstant sein, woraus wieder nach Satz 1 auch die zweite Behauptung folgt.

BEMERKUNG. Aus Satz 8 folgt offenbar, daß jeder einfach zentralharmonische V_n mit $K(p,q) \geqq 0$ bzw. $K(p,q) \leqq 0$ euklidisch ist. Aufgrund der Bemerkung 1 vom Satz 1 folgt noch, daß jeder einfach zentralharmonische V_n mit $R_{ij} = 0$ euklidisch ist.

Wir geben noch eine Anwendung auf die Hadamardsche Grundlösung der Gleichung $\Delta_2 u = o$. (Vergl. hierzu HADAMARD [4]). Zu diesem Zweck setzen wir voraus, daß der V_n von der Klasse C^ω ist, d. h. einen Fundamentaltensor mit analytischen Koeffizienten besitzt. Dann besitzt die Gleichung $\Delta_2 u = o$ eine Grundlösung mit dem Pol P_0 der Gestalt

$$u(P_0, P) = \begin{cases} \dfrac{U}{r^{n-2}} & \text{für } n \text{ ungerade,} \\[2ex] \dfrac{U}{r^{n-2}} + V \log r & \text{für } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

wo U, V analytisch sind und Entwicklungen der Gestalt

$$U = U_0 + U_1 r^2 + \cdots, \quad V = V_0 + V_1 r^2 + \cdots$$

besitzen. Die Funktion U_0 bestimmt sich aus der längs jeder von P_0 ausgehenden geodätischen Linie gültigen Gleichung

$$(*) \qquad 2X(U_0) + \left(\frac{\Delta_2 r^2}{2} - n\right) U_0 = 0, \quad U_0(P_0) = 1$$

während sich die anderen Koeffizienten leicht durch ein Rekursionsverfahren bestimmen. Ist hierbei $\Delta_2 U_0 = o$, so verschwinden alle Koeffizienten außer U_0 (und nur dann), und die Differentialgleichung hat die Grundlösung

$$u(P_0, P) = \frac{U_0}{r^{n-2}}.$$

Die Bedingung $\Delta_2 U_0 = o$ ist für $n = 3$ notwendig und hinreichend für die Gültigkeit des Huygensschen Prinzips (im engeren Sinne) bei der hyperbolischen Gleichung $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_2 u = o$, während sie für $n \geqq 3$ notwendig und hinreichend für die Gültigkeit des Huygensschen Prinzips[3]) bei der Darbouxschen Gleichung $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{n-1}{t}\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta_2 u = o$ ist. (Letztere Behauptung soll an anderer Stelle gezeigt werden.)

Satz 9. *In einer Normalumgebung eines Punktes P_0 habe die Differentialgleichung $\Delta_2 u = 0$ die Grundlösung*

$$u(P_0, P) = \frac{U_0}{r^{n-2}}.$$

[3]) Bezüglich des singulären Anfangswertproblems mit $t = 0$ als Anfangsfläche.

Ist dann stets $K(p,q) \geqq 0$ (bezw. $K(p,q) \leqq o$), so ist der V_n euklidisch und $U_0 \equiv 1$. (Die Grundlösung braucht nur für den Punkt P_0 als Pol von der speziellen Form vorausgesetzt zu werden.)

BEWEIS: Wir führen das Normalkoordinatensystem mit dem Ursprung P_0 ein, es sei $\overset{0}{g}_{ij} = \delta_{ij}$. Dann ist

$$\frac{1}{2} \Delta_2 r^2 = \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{1}{\partial x^i} (\sqrt{g} g^{ij} 2\delta_{ij} x^j) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} x^i) = n + X(\log \sqrt{g}),$$

woraus wegen (*) sofort

$$U_0 = g^{-\frac{1}{4}} \quad \text{folgt.}$$

Nun ist für $K(p,q) \geqq o$ die Funktion g nach Satz 1 längs jeder von P_0 ausgehenden geodätischen Linie monoton fallend, U_0 also monoton wachsend. Betrachtet man ein Gebiet, das den Punkt P_0 im Inneren enthält, so ist also auf dessen Rand $U_0 \geqq 1$, in P_0 aber $U_0 = 1$. Da ferner $\Delta_2 U_0 = o$ sein muß, folgt aus dem Maximumprinzip, daß $U_0 \equiv 1$ und damit $g \equiv 1$ sein muß. Dann ist aber nach Satz 1 der V_n euklidisch.

Ist $K(p,q) \leqq o$, so verfährt man in Anlehnung an Satz 2 ganz analog.

Literatur.

[1] E. Cartan, Lecons sur la géométrie des espaces de Riemann, *Paris*, 1951.

[2] S. Helgason, Differential operators on homogeneous spaces, *University of Chicago*, 1958.

[3] G. Herglotz, Über die Bestimmung eines Linienelementes in Normalkoordinaten aus dem Riemannschen Krümmungstensor, *Math. Ann.*, **93** (1925), 46—53.

[4] J. Hadamard, Lectures on Cauchys Problem in linear partial differential equations, *New Haven*, 1923.

[5] J. A. Schouten, Ricci Calculus, *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1954.

(Eingegangen am 19. Januar, 1959.)