

Eckhart-Rehbocksche Abbildung und Studysches Übertragungsprinzip.

Herrn Professor O. Varga anlässlich seines 50. Geburtstages zur Erinnerung
an seine Wiener Studienzeit gewidmet.

Von W. WUNDERLICH (Wien).

Inhalt: Vereinfachte, zusammenfassende Darstellung der linearen Abbildungen des Strahlraums nach L. ECKHART und F. REHBOCK, welchen sich das klassische Übertragungsprinzip von E. STUDY unterordnen läßt. Angabe linearer und im Falle einer nullteiligen Grundquadrik reell durchführbarer Konstruktionsvorschriften mit Anwendungsbeispielen und unter Berücksichtigung darstellend-geometrischer Interessen.

I. Seien $p_i (i=1, \dots, 6)$ PLÜCKERSche Linienkoordinaten im projektiven dreidimensionalen Raum, die der quadratischen Bedingung

$$p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0$$

genügen.¹⁾ L. ECKHART [1], [2] (S. 52—57) hat eine *lineare Abbildung des Strahlraums auf die Punkte einer Bildebene* ω eingeführt, welche analytisch durch

$$(1.1) \quad X_1 : X_2 : X_3 = (ap) : (bp) : (cp)$$

definiert wird. Hierin bedeuten die X_i homogene projektive Punktkoordinaten in ω und die Klammersymbole Linearformen mit konstanten Koeffizienten nach dem Muster

$$(ap) \equiv a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4 + a_5 p_5 + a_6 p_6.$$

Daß es sich dabei um eine auch im geometrischen Sinn *lineare Abbildung* handelt, geht aus der Betrachtung eines *Strahlbüschels* hervor, das man sich durch Linearkombination zweier ihm angehörender Strahlen p und q mit den Bildpunkten X und Y erzeugt denken kann. Für den Bildpunkt Z eines

¹⁾ Mit den üblichen Doppelindexsymbolen besteht der Zusammenhang: $p_1 = p_{01}$, $p_2 = p_{02}$, $p_3 = p_{03}$, $p_4 = p_{23}$, $p_5 = p_{31}$, $p_6 = p_{12}$.

beliebigen Büschelstrahls r folgt nämlich aus $r_i = \lambda p_i + \mu q_i$ sofort $Z_i = -\lambda X_i + \mu Y_i$, d. h.: *Die Strahlen eines Büschels werden vermöge (1.1) im allgemeinen auf die Punkte einer Geraden abgebildet, und zwar in projektiver Weise.*

Eine Ausnahme tritt ein, wenn die Strahlen p, q und damit alle Büschelstrahlen denselben Bildpunkt haben. Fragen wir aus diesem Anlaß nach der Gesamtheit aller Strahlen p , die zu einem angenommenen Bildpunkt X gehören: Es sind dies offenbar alle Strahlen, die den beiden linearen Komplexen (Gewinden)

$$(1.2) \quad X_3(ap) - X_1(cp) = 0, \quad X_3(bp) - X_2(cp) = 0$$

angehören, also die ∞^2 Strahlen eines Netzes, welches die ausgezeichnete Regelschar \mathfrak{R}

$$(1.3) \quad (ap) = (bp) = (cp) = 0$$

einer *Fundamentalquadrik* Ω enthält, wenn wir die drei Komplexe $(ap) = 0$, $(bp) = 0$, $(cp) = 0$ als linear unabhängig voraussetzen, was nachträglich geschehen soll, um Ausartungen zu vermeiden. Greifen wir jetzt aus dem Netz (1.2) jenen Strahl heraus, der etwa durch den Grundpunkt $O(1:0:0:0)$ des den Linienkoordinaten zugrundeliegenden Punktkoordinatensystems x_0, x_1, x_2, x_3 geht: Für diesen Strahl verschwinden p_4, p_5 und p_6 , während seine restlichen Koordinaten p_1, p_2, p_3 mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 seines der O gegenüberliegenden Koordinatenebene $\omega(x_0 = 0)$ angehörenden Punktes identifiziert werden können. Zuzufolge (1.2) oder (1.1) besteht daher die Relation

$$(1.4) \quad X_1 : X_2 : X_3 = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) : (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3) : (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3),$$

die bei nichtverschwindender Determinante (abc) als bloße Koordinatentransformation in der Bildebene ω gedeutet werden kann.

Da die Brennlinien des Strahlnetzes (1.2) der zweiten Erzeugendenschar von Ω — der „Leitschar“ \mathfrak{L} — angehören, ergibt sich für die ECKHARTSche Abbildung die folgende *geometrische Vorschrift*: „Man bringe den abzubildenden Strahl p mit der Quadrik Ω zum Schnitt, ziehe durch die beiden Schnittpunkte die Erzeugenden der auf Ω liegenden Regelschar \mathfrak{L} und lege an dieses Erzeugendenpaar die Treffgerade aus einem festen Punkt O ; deren Schnittpunkt mit der (passend angenommenen) Bildebene ω ist dann der p zugeordnete Bildpunkt“.

Nicht nur Veränderung der Bildebene ω , sondern auch Verlagerung des Zentrums O (das weder ω noch Ω angehören darf) bewirkt bloß eine kollineare Transformation des Bildfeldes, da die Linearität auf jeden Fall erhalten

bleibt. Die Elemente O und ω brauchen mithin keine irgendwie ausgezeichnete Lage einzunehmen.

2. Fast zur gleichen Zeit, jedoch von der synthetischen Seite her, war F. REHBOCK [3], [4] im wesentlichen zu derselben Abbildung gelangt. Er zeigte dabei, daß es die einzige derartige Abbildung ist, die gewisse natürliche Linearitätsforderungen erfüllt. Er gab überdies dem *dualen Bildfeld* den Vorzug, die folgende Vorschrift benutzend: „Man bringe den abzubildenden Strahl p mit einer festen Quadrik zum Schnitt, ziehe durch die beiden Schnittpunkte die Erzeugenden einer Schar \mathfrak{L} und suche deren Spurpunkte in einer (passend gewählten) Bildebene ω auf; die Verbindungsgerade dieser Spurpunkte ist dann die p zugeordnete Bildgerade“.

Diese in mancher Hinsicht übersichtlichere Abbildung des Strahlraums auf ein *Strahlfeld* kann natürlich ebenfalls durch den Ansatz (1.1) erfaßt werden, wenn man einfach die X_i nicht mehr als Punkt-, sondern als Geradenkoordinaten ansieht. Auch ECKHART verwendet im Grunde genommen die REHBOCKsche Vorschrift, übt aber anschließend im Bildfeld noch eine Korrelation aus.

Ein gewisser Schönheitsfehler der genannten Konstruktionsvorschriften für eine *lineare* Abbildung muß darin erblickt werden, daß sie selbst nicht rein linear sind, da sie den Schnitt einer Geraden mit der Grundquadrik verlangen. Wie dem abgeholfen werden kann, wird aus Abschnitt 4 hervorgehen.

3. Um die Abbildungsidee konstruktiv verwerten zu können, denken sich beide Autoren den Strahlraum auf die angegebene Art *doppelt* abgebildet; jedem Strahl wird sonach ein *Bildpaar* (von Punkten bzw. Geraden) zugeordnet, was erst die Rekonstruktion ermöglicht. Nichts liegt näher als sich hierzu der beiden (verschiedenen) Erzeugendenscharen \mathfrak{L} und \mathfrak{R} ein und derselben (nichtsingulären) Quadrik Ω zu bedienen; sie mögen hinfort durch die Benennungen „*Linksschar*“ und „*Rechtsschar*“ unterschieden werden, während die durch sie vermittelten Bilder eines Strahls dessen „*Rechtsriß*“ bzw. „*Linksriß*“ heißen sollen. Faßt man nämlich die Quadrik Ω als absolutes Gebilde einer *nichteuklidischen Metrik* CAYLEY—KLEINScher Prägung auf und bezeichnet man in Ausdehnung einer von W. K. CLIFFORD in der elliptischen Geometrie eingeführten Begriffsbildung allgemein zwei Geraden, die dasselbe Erzeugendenpaar der Linksschar (Rechtsschar) treffen, als „*rechtsparallel*“ („*linksparell*“), so läßt sich etwa die REHBOCKsche Abbildungsvorschrift folgendermaßen formulieren (Abb. 1): „Um einen Strahl p abzubilden, suche man in der Bildebene ω die zu ihm rechtsparelle Gerade p^r und die zu ihm linksparelle Gerade p^l auf“.

Die *Rekonstruktionsaufgabe* führt zunächst auf ein windschiefes Erzeugendenvierseit, bestehend aus den p^r treffenden Linkserzeugenden l_1, l_2 und den p^l treffenden Rechtserzeugenden r_1, r_2 (Abb. 1). Jede der beiden Diagonalen p, \bar{p} des Vierseits liefert das gegebene Bildpaar p^r, p^l , sodaß die Rekonstruktion *zweideutig* ausfällt. Da p und \bar{p} reziproke Polaren der Quadrik Ω sind, so gilt: „Je zwei absolute Polaren besitzen dasselbe Bildpaar“.

Auf die unschwer zu übersehenden Ausartungen soll hier nicht näher eingegangen werden, ebensowenig auf die Möglichkeit, durch Orientierung der Ding- und Bildstrahlen Eindeutigkeit zu erzielen.

4. Betrachten wir nunmehr speziell die Abbildung eines *Strahlfeldes* π — womit gleichzeitig auch die Abbildung des dazu bezüglich Ω polaren *Strahlbündels* P erledigt wird.

Die Feldebene π und die Bildebene ω seien ausdrücklich als nicht isotrop vorausgesetzt, sie sollen also die (reguläre) Quadrik Ω nicht berühren, sondern nach regulären Kegelschnitten u bzw. o schneiden. Durch die Regelschar \mathcal{Q} wird sodann zwischen den beiden Kegelschnitten eine projektive Beziehung hergestellt, die sich zu einer *kollinearen Beziehung* zwischen den Strahlfeldern $\pi(p)$ und $\omega(p^r)$ erweitern läßt. Den Übergang von π nach ω kann man sich dabei durch eine CLIFFORDSche „*Linksschiebung*“ vollzogen denken, das ist eine axiale Raumkollineation, deren Achsenpaar der Rechtschar \mathcal{R} angehört.

Eine solche *Linksschiebung* verschiebt alle Punkte auf linksparallelen Strahlen (den ∞^2 Treffgeraden des Achsenpaares), und zwar allesamt um dasselbe Stück im Sinne der auf Ω gegründeten Metrik. Insbesondere bleiben alle Erzeugenden der Linksschar \mathcal{L} einzeln fest, während jene der Rechtschar projektiv untereinander vertauscht werden (mit den beiden Achsen als Fixelementen). Da also die Maßfläche Ω in sich übergeht, handelt es sich bei der Schiebung um eine *kongruente Raumtransformation*. Ebenen drehen sich unter Einwirkung der Schiebung jeweils um den ihnen angehörenden Schiebstrahl, und zwar allesamt um denselben Winkel. Geraden gelangen in rechtsparelle Lagen, da sie in der Ausgangs- und Endposition jeweils dasselbe Schiebstrahlenpaar aus \mathcal{Q} treffen. Eine derartige Schiebung

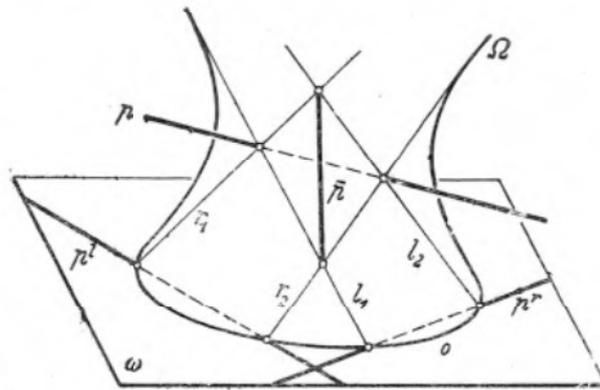


Abb. 1.

ist durch ein Paar (frei wählbarer) entsprechender Punkte oder entsprechender Ebenen vollkommen festgelegt.

Im vorliegenden Fall ist die Linksschiebung $\pi(p) \rightarrow \omega(p^r)$ durch das Ebenenpaar π, ω oder das Paar der absoluten Pole P, O eindeutig bestimmt. Das Achsenpaar besteht aus jenen beiden Rechtserzeugenden, welche die Schnittgerade $s = \pi\omega$ (und deren absolute Polare $\bar{s} = PO$) treffen. Die kollineare Beziehung zwischen $\pi(p)$ und $\omega(p^r)$ kann festgelegt werden durch die selbstentsprechende Gerade s und drei Paare entsprechender Punkte, die aus π und ω von \bar{s} und zwei beliebigen Linkserzeugenden ausgeschnitten werden. Damit eröffnet sich bei reellen Strahlflächen Ω ein Weg, die Abbildung $p \rightarrow p^r$ im Gegensatz zu den bisherigen Vorschriften *rein linear* auszuführen. Unter Umständen empfiehlt es sich, den abzubildenden Strahl p in die zu ω konjugierte Ebene $\pi = Op$ einzubetten, weil entsprechende Punkte dann gleichfalls konjugiert bezüglich Ω liegen.

Wesentlich für das Folgende ist die bisher anscheinend nicht beachtete, auf der Verwendung der CLIFFORDSchen Links- und Rechtsschiebungen beruhende Tatsache: *Ein nicht isotropes Strahlfeld ist zu seinen beiden Bildfeldern im Sinne der auf die Fundamentalquadrik gegründeten Metrik kongruent.*

Hieraus fließen unmittelbar einige Korollare (deren Ausartungsfälle außer acht bleiben sollen):

I. *Der Schnittwinkel zweier inzidenten Strahlen reproduziert sich unverändert in den beiden Rissen.*

II. *Damit zwei Strahlen einander schneiden, ist notwendig, daß sie im Rechtsriß und im Linksriß Winkel gleicher Größe bilden.*²⁾ Die Bedingung

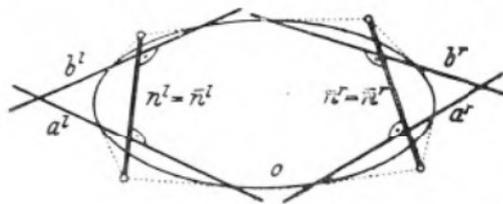


Abb. 2.

ist im allgemeinen nicht hinreichend, da sie auch ausdrücken kann, daß eine Gerade die absolute Polare der anderen schneidet. Im Falle *rechter Winkel* genügt sie allerdings, da jede Normale einer Geraden stets auch deren absolute Polare trifft. Damit ergibt sich eine höchst einfache Konstruktion der

beiden (bezüglich Ω polaren) *Gemeinlote* n, \bar{n} zweier Geraden a, b (Abb. 2): Sie erscheinen in Bild als Gemeinlot der Rechtsrisse a^r, b^r bzw. der Links-

²⁾ Gibt man von einem inzidenten Strahlenpaar a, b die Risse a^r, b^r und a^l, b^l vor, so kommen für b^l wegen $\sphericalangle a^r b^r = \sphericalangle a^l b^l$ nur die Tangenten eines gewissen (nichteuklidischen) Kreises mit der Mittellinie a^l in Betracht. Dieser den Maßkegelschnitt o der Bildebene auf a^l doppelt berührende Kegelschnitt wurde auf anderem Wege von F. REHBOCK als „Ordnungskegelschnitt“ eingeführt ([3], Abschn. 7).

rise a^l, b^l , das man als Polare des (scheinbaren) Schnittpunkts $a^r b^r$ bzw. $a^l b^l$ bezüglich des Maßkegelschnitts $o = \Omega \omega$ der Bildebene erhält.

III. *Strahlfelder und Strahlbündel bilden sich auf kongruente Transformationen $p^r \rightarrow p^l$ der Bildebene ab.* Dies folgt einfach aus $\omega(p^r) \cong \pi(p) \cong \omega(p^l)$. Damit ist eine nichteuklidische Verallgemeinerung der sogenannten „kinematischen Abbildung“ von W. BLASCHKE [6] und J. GRÜNWARD [7] gewonnen, wie schon ECKHART und insbesondere REHBOCK hervorgehoben haben [4]. Das genannte Abbildungsprinzip ([2], Abschn. 8; [5]; [8], 240 ff.), das den Strahlbündeln die euklidischen Bewegungen und den Strahlfeldern die euklidischen Umlegungen der Bildebene zuordnet, beruht auf einem Spezialfall der ECKHARTSchen Abbildung mit ausgearteter Grundquadrik: Sei I, \bar{I} das absolute Punktepaar der Bildebene ω und $\iota, \bar{\iota}$ ein konjugiert-imaginäres, zu ω paralleles Ebenenpaar; die Rechtsschar von Ω besteht dann aus den Strahlbüscheln (I, ι) und $(\bar{I}, \bar{\iota})$, die Linksschar aus den Büscheln $(I, \bar{\iota})$ und (\bar{I}, ι) , das Projektionszentrum O liegt im Unendlichen.

5. Wir wenden uns jetzt der folgenden *Spezialisierung* der ECKHARTSchen Abbildungsgleichungen (1.1) zu, wobei die zugrundeliegenden Punktkoordinatensysteme x_i und X_i kartesische sein sollen:

$$(5.1) \quad X_1 : X_2 : X_3 = (p_1 + \varepsilon p_4) : (p_2 + \varepsilon p_5) : (p_3 + \varepsilon p_6).$$

Für die Strahlen der ausgezeichneten Regelschar

$$(5.2) \quad p_1 + \varepsilon p_4 = p_2 + \varepsilon p_5 = p_3 + \varepsilon p_6 = 0$$

gilt zufolge der Plücker-Bedingung

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 0;$$

es handelt sich mithin um lauter Minimalstrahlen. Die sie tragende Quadrik Ω ist daher eine *Kugel*, und zwar, wie man leicht nachprüft, jene mit der Gleichung

$$(5.3) \quad \varepsilon^{-2} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Diese Kugel ist *reell* für *rein-imaginäres* ε (etwa $\varepsilon = i$) und bedingt somit eine *hyperbolische Raummetrik*. Die reellen Strahlen des Raumes werden dabei vermöge (5.1) abgebildet auf die komplexen Punkte einer Bildebene — oder, wenn man beide Erzeugendenscharen verwendet ($\varepsilon = \pm i$), auf die konjugiert-komplexen Punktepaare. Diese dem berühmten *Übertragungsprinzip* von E. STUDY [9], [10] zugrundeliegende Abbildung, welche es gestattet, geometrische Sätze aus der komplexen Ebene auf den hyperbolischen Raum zu übertragen, findet man kurz dargelegt bei E. A. WEISS ([11], § 24 ff.).

6. Für reelles ε liegt eine *nullteilige Kugel* Ω und demnach eine *elliptische Raummetrik* vor. Deutet man die X_i als homogene Geradenkoordinaten in der Fernebene $x_0=0$, so hat man eine Abbildung des reellen Strahlraums auf die reellen Ferngeraden genau nach dem REHBOCKschen Muster vor sich.³⁾

Zur zeichnerisch-konstruktiven Verwendung dieser Abbildung erscheint jedoch die unendlich ferne Bildebene schlecht geeignet. Für solche Zwecke ist die endliche Koordinatenebene $x_3=0$ vorzuziehen, weshalb wir eine geringfügige Modifikation der Abbildungsgleichung (5.1) vornehmen, nämlich zu

$$(6.1) \quad X_0 : X_1 : X_2 = (\varepsilon^{-1}p_3 + p_6) : -(p_2 + \varepsilon p_5) : (p_1 + \varepsilon p_4).$$

Man erkennt, daß die ausgezeichnete Regelschar (5.2) unverändert geblieben ist und daß jede Gerade $X_0x_0 + X_1x_1 + X_2x_2 = 0$ der Bildebene $\omega(x_3=0)$ mit ihrem Bildstrahl zusammenfällt, denn ihre Plückerkoordinaten $X_2 : -X_1 : 0 : 0 : X_0$ führen über (6.1) tatsächlich auf die Bildstrahlkoordinaten $X_0 : X_1 : X_2$.

Der Einfachheit halber setzen wir $\varepsilon^2=1$. Der durch (6.1) mit $\varepsilon=+1$ erklärte *Rechtsriß* p^r einer Geraden p ist die in der Bildebene ω verlaufende

CLIFFORDSche Rechtsparallele zu p ; sie bildet mit p ein im üblichen Sinne rechtsgewundenes Geradenpaar. Der zu $\varepsilon=-1$ gehörende *Linksriß* p^l hingegen ist die ω angehörende Linksparallele von p und p gegenüber linksgewunden.

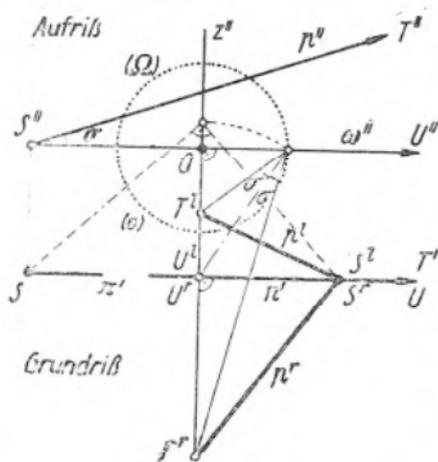


Abb. 3.

Um nun zu einer Geraden p , die wir uns durch ihren Grundriß p' (Normalriß auf ω), ihren Bildspurpunkt $S = p\omega$ und ihren Neigungswinkel $\sigma = \sphericalangle pp'$ gegeben denken, die REHBOCK-Bilder p^r und p^l zu konstruieren, betrachten wir gemäß Abschn. 4 diese Gerade als eingebettet in die zu ω konjugierte, also elliptisch-normale Ebene $\pi = pp'$.

Nunmehr haben wir auf p die zu $\pi\omega = p'$ parallele CLIFFORDSche Linksschiebung $p \rightarrow p^r$ bzw. Rechtsschiebung $p \rightarrow p^l$ vom Betrage $\pi/2$ auszuüben (Abb. 3). Der Spurpunkt $S = pp'$ rückt dabei auf dem Schiebstrahl p' in den leicht angebbaren konjugierten Punkt $S^r = S^l$, wo anschließend im Prinzip nur noch die elliptisch-kongruente Winkelübertragung $\sphericalangle p'p = \sphericalangle p'p^r = \sphericalangle p'p^l$ unter Beachtung des (Windungs-) Sinns

³⁾ Der Fall einer nullteiligen Fundamentalquadrk wird bei REHBOCK [4] ausdrücklich ins Auge gefaßt, doch fehlen reell durchführbare Konstruktionsvorschriften. Zusammenhänge mit dem STUDYSchen Übertragungsprinzip finden weder dort noch bei ECKHART Erwähnung.

vorzunehmen ist. Hierzu bedienen wir uns des vom Spurpunkt S und den Fernpunkten T, U von p und p' aufgespannten rechtwinkligen Dreiecks STU : Der Scheitel U des rechten Winkels gelangt auf p' in den konjugierten Punkt $U^r = U^l$, die Seite UT kommt auf den zu p' (auch im euklidischen Sinne) normalen Kugeldurchmesser zu liegen, und die Übertragung der durch den euklidischen Winkel σ gemessenen elliptischen Länge UT nach $U^r T^r$ und $U^l T^l$ geschieht auf die aus Abb. 3 ersichtliche einfache Weise. Damit ist dann $p^r = S^r T^r$ und $p^l = S^l T^l$ gefunden.⁴⁾

Auch die *Rekonstruktion* einer Geraden p aus ihrem Bildpaar p^r, p^l geht ohne Schwierigkeit von statten, wenn man zunächst den Grundriß p' als elliptische Symmetrale des Winkels $p^r p^l$ ermittelt. Die dabei auftretende Zweideutigkeit ließe sich durch *Orientierung* der Raum- und Bildstrahlen beseitigen (Übergang zu „Speeren“).

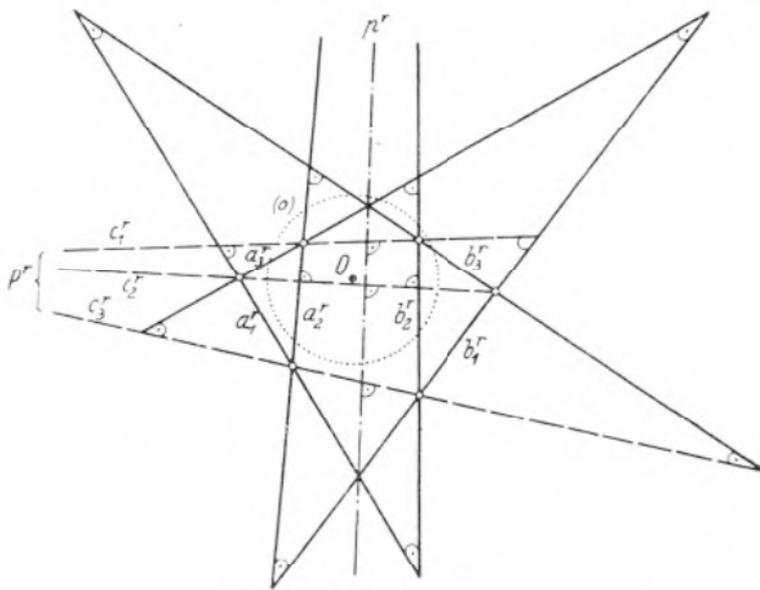


Abb. 4.

7. Nun läßt sich erstmalig auch das Paradebeispiel des STUDYSchen Übertragungsprinzips, die sogenannte *Konfiguration von PETERSEN—MORLEY*, zeichnerisch bequem verfolgen (Abb. 4).

Seien a_i ($i=1, 2, 3$) drei beliebige reelle, jedoch nicht parallele Gerade

⁴⁾ Eine andere Vorschrift, deren Erklärung hier zu weit führen würde, lautet bei Heranziehung der TUSCHELSchen „Netzprojektion“ ([2], Abschn. 5) folgendermaßen: Man projiziere den Fernpunkt T von p mittels des zum Kugeldurchmesser $z \perp \omega$ rechtsparallelen (linksparallelen) Strahls nach T^e (T^λ); p^r verläuft dann euklidisch normal zu ST^e durch S^r ($p^l \perp ST^\lambda$ durch S^l).

des elliptischen Raumes, gegeben durch ihre Rechtsrisse a_i^r und Linksrisse a_i^l (Abb. 4 zeigt der Übersichtlichkeit halber nur Rechtsrisse). Sucht man gemäß Abb. 2 die Bilder der drei Gemeinlotpaare b_i, \bar{b}_i von a_j, a_k auf — die gleichzeitig auch die Gemeinlote der absoluten Polaren \bar{a}_j, \bar{a}_k darstellen —, so erhält man etwa im Rechtsriß das zu $a_1^r a_2^r a_3^r (= \bar{a}_1^r \bar{a}_2^r \bar{a}_3^r)$ bezüglich des Bildmaßkreises o polare Dreieit $b_1^r b_2^r b_3^r (= \bar{b}_1^r \bar{b}_2^r \bar{b}_3^r)$. Sucht man weiterhin nach dem gleichen Muster noch die drei Gemeinlotpaare c_i, \bar{c}_i von a_i, b_i auf — die auch \bar{a}_i und \bar{b}_i unter rechten Winkeln treffen —, so erscheinen dieselben im Bild als Verbindungsstrahlen entsprechender Ecken der Dreiseite $a_1^r a_2^r a_3^r$ und $b_1^r b_2^r b_3^r$. Nach einem bekannten Satz der projektiven Geometrie, demzufolge zwei *polare Dreiecke* stets *perspektiv* liegen, müssen nun die drei Bildstrahlen $c_i^r (= \bar{c}_i^r)$ durch einen gemeinsamen Punkt P^r laufen (elliptischer Höhenschnittpunkt der genannten Dreiecke). Die Polare p^r von P^r ist die *Perspektivitätsachse*, auf welcher sich die Seitenpaare a_i^r, b_i^r schneiden. Diese Achse p^r schneidet offensichtlich die Strahlen c_i^r unter rechten Winkeln, und da dasselbe auch im linken Bildfeld eintritt, so legt das Bildpaar p^r, p^l ein *gemeinsames Paar von Gemeinloten* p, \bar{p} der Geraden c_i (und ihrer absoluten Polaren \bar{c}_i) fest, dessen Existenz die wesentliche Aussage des Satzes von J. PETERSEN (= HJELMSLEV) und F. MORLEY ist.

Läßt man den Betrag des Kugelradius über alle Schranken wachsen ($\varepsilon \rightarrow 0$), so gelangt man zum *euklidischen Grenzfall* des Theorems, das dann etwa folgendermaßen ausgesprochen werden kann: „Hat man im Raum ein windschiefes Sechseck mit lauter rechten Winkeln, so besitzen die Gemeinlote der drei Gegenseitenpaare ein gemeinsames Gemeinlot“. Es liegt hier eine räumliche Konfiguration von 10 Geraden mit 15 Schnittpunkten vor, wobei jede Gerade von drei anderen unter durchwegs rechten Winkeln getroffen wird.

E. STUDY ([10], §23, 24) gewinnt diesen Satz unter Verwendung seiner „dualen Zahlen“, komplexer Größen $x + \varepsilon y$, deren Einheit ε der Rechenregel $\varepsilon^2 = 0$ genügt. Anschaulich kann ε als „infinitesimale Größe 1. Kleinheitsordnung“ aufgefaßt werden, wie dies beispielsweise H. R. MÜLLER [14] tut; eine konstruktive Auswertung dieser Deutung, etwa mit Hilfe von Geschwindigkeiten, ist übrigens noch nicht versucht worden.

8. Kehren wir jetzt wieder zum ursprünglichen Ansatz (5.1) zurück und deuten wir nunmehr im ECKHARTSchen Sinne die X_i als homogene Punktkoordinaten in der Fernebene $\omega(x_0 = 0)$ — oder statt dessen als inhomogene Koordinaten im Raum, wobei

$$(8.1) \quad X_1 = \frac{x_1}{x_0}, X_2 = \frac{x_2}{x_0}, X_3 = \frac{x_3}{x_0}$$

gelten soll. Unter der Annahme $\varepsilon = \pm 1$ liefern dann die Gleichungen (5.1) die klassische STUDYSche Abbildung der reellen Strahlen p des elliptischen Raumes auf die Paare reeller Ursprungstrahlen p_r, p_l .⁵⁾ Der *Rechtsriß* p_r ($\varepsilon = +1$) ist dabei die durch den Ursprung O gehende CLIFFORDSche Rechtsparallele zu p und bildet mit p ein im üblichen Sinn rechtsgewundenes Geradenpaar. Der *Linksriß* p_l ($\varepsilon = -1$) hingegen ist die durch O gehende Linksparallele zu p und gegenüber p linksgewunden (Abb. 5).

Zur Klärung der Lageverhältnisse betrachten wir einen die X_1 -Achse treffenden und zur X_3 -Achse im Abstand a euklidisch parallelen Strahl p , was wegen der herrschenden Kugelsymmetrie keine wesentliche Einschränkung bedeutet (Abb. 5). Aus seinen Plückerkoordinaten

$$p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6 = 0 : 0 : 1 : 0 : -a : 0$$

ergeben sich vermöge (5.1) die beiden Bildstrahlen p_r, p_l mit

$$X_1 : X_2 : X_3 = 0 : \mp a : 1.$$

Hieraus folgt die nachstehende, unter Heranziehung von Hilfsmitteln der darstellenden Geometrie auch zeichnerisch jederzeit ausführbare Konstruktionsvorschrift (Abb. 5): „Um für den Fall einer nullteiligen Einheitskugel als

Fundamentalquadrk die STUDYSchen Bildstrahlen p_r, p_l einer Geraden p zu konstruieren, verschiebe man diese längs ihres Normalabstands in das Kugelzentrum und drehe sie anschließend um diese Abstandslinie um einen Winkel α , der mit der euklidischen Abstandsstrecke a durch $\operatorname{tg} \alpha = a$ zusammenhängt (also mit der elliptischen Abstandsstrecke übereinstimmt). Schiebung und Drehung haben dabei für p_r eine Linksschraube, für p_l eine Rechtsschraube zu ergeben“.

Beachten wir, daß für die Bahntangenten einer *euklidischen Schraubung* zwischen ihrem Achsenabstand a und ihrem Achsenwinkel α ein gleichartiger Zusammenhang der Bauart $c \cdot \operatorname{tg} \alpha = a$ besteht, wobei c den sogenannten „Schraubparameter“ (die reduzierte Ganghöhe) bedeutet, so läßt sich die obige Anweisung auch folgendermaßen formulieren: „Der *Rechtsriß* p_r (*Linksriß* p_l) eines Strahls p ist die Bahntangente des Kugelzentrums O , wenn dasselbe einer *euklidischen Rechtsschraubung* (*Linksschraubung*) vom Parameter 1 um die Achse p unterworfen wird“. Die Möglichkeit einer sinnvollen Orientierung der Ding- und Bildstrahlen liegt auf der Hand (Abb. 5).

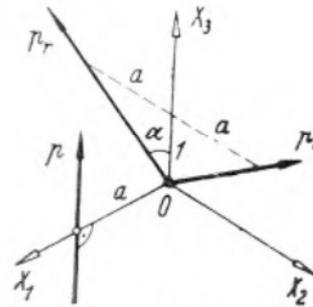


Abb. 5.

⁵⁾ Diese Abbildung wurde unabhängig von E. STUDY auch von J. PETERSEN [12] und G. FUBINI [13] angegeben. Den Zusammenhang mit dem ECKHARTSchen Ansatz hat erstmals K. STRUBECKER [18] bemerkt.

Genau diese „Schraubenabbildung“ $p \rightarrow p_r$ untersuchte unlängst, von einem praktischen Schraubentriebproblem ausgehend, W. NOLI in einer Gießener Dissertation [16], ohne das klassische Vorbild zu kennen. Die dabei festgestellten Tatsachen (und manches darüber hinaus) sind demnach meist einfache Folgerungen aus den Gesetzmäßigkeiten des STUDYSchen Abbildungsprinzips. Hierfür drei Beispiele:

I. Die Tangentenschar einer ebenen Kurve bildet sich auf die Erzeugendenschar eines korrelativen Kegels ab. Die dasselbe Bild liefernden absoluten Polaren \bar{p} der Kurventangenten p erfüllen nämlich einen Kegel K , dessen Spitze der absolute Pol P der Kurvenebene π ist und dessen Basis in π polar zur gegebenen Kurve k bezüglich des (nullteiligen) Kreises $\Omega\pi$ ist. Die Gesamtheit der Rechtsrisse $p_r = \bar{p}_r$ bildet demnach die Erzeugenden jenes Kegels K_r , der aus K durch die CLIFFORDSche Linksschiebung $P \rightarrow O$ hervorgeht (Abschn. 4), wobei übrigens die Basiskurve nur eine euklidisch-ähnliche Veränderung erfährt.

II. Wird eine ebene Strahlkurve einer kollinearen Umformung unterworfen, dann transformiert sich ihr Bildkegel affin. Die kollineare Beziehung zweier Kurvenlagen überträgt sich nämlich mit der korrelativen Zuordnung auf die Bildkegel. Kollineare Bündelgebilde können aber stets als affin angesehen werden.

III. Das Bild einer Regelschar 2. Grades ist ein projektiv auf sie bezogener Kegel 2. Ordnung. Denken wir uns die Regelschar etwa durch projektive Punktreihen erzeugt, so enthalten die Koordinaten der Reihenpunkte einen linearen Parameter t , der in die Linienkoordinaten p_i quadratisch eingeht. Zufolge (5.1) sind daher die Bildkoordinaten X_i gleichfalls quadratische Polynome in t , woraus die Behauptung folgt.

9. Wesentliche Eigentümlichkeiten der STUDYSchen Abbildung sind durch die metrisch spezielle Normierung bedingt. Die auf eine euklidische Kugel Ω gegründete elliptische Metrik fällt nämlich für die im Mittelpunkt O angebrachten Bildbündel mit der euklidischen Metrik zusammen.

Die elliptische Maßzahl des Winkels zweier einander schneidenden Strahlen a, b stimmt demnach mit dem euklidischen Winkelwert der Bildstrahlen a_r, b_r bzw. a_l, b_l überein — man hat sich bloß den Winkelscheitel durch eine Links- bzw. Rechtsschiebung nach O gebracht zu denken — und die Bildwinkelgleichheit $\sphericalangle a_r b_r = \sphericalangle a_l b_l$ kann wieder als notwendige *Schnittbedingung* für a und b angesehen werden, die sogar hinreicht, falls Ding- und Bildstrahlen gerichtet werden.

Für ein *Strahlbündel* $P(p)$ fallen demzufolge die beiden *Bildbündel* $O(p_r)$ und $O(p_l)$ *euklidisch kongruent* aus. Der Ursprungsstrahl $OP = q$ fällt mit

seinen Bildstrahlen q_r und q_l zusammen, und zwar unter Erhaltung der Orientierung, sodaß die beiden Bündel durch eine *Bewegung* auseinander hervorgehen, nämlich durch eine *Drehung* um q . Bezeichnet a den euklidischen Abstand OP , so lehrt die Betrachtung von Abb. 5, daß der Drehwinkel den Wert $2\alpha = 2 \arctg a$ hat; die Drehung $O(p_l) \rightarrow O(p_r)$ erfolgt dabei so, daß sie zusammen mit der Fortschreitrichtung $O \rightarrow P$ eine Rechtsschraube ergibt.⁶⁾

Die auf diese Weise hergestellte *Zuordnung zwischen den euklidischen Bündeldrehungen und den Punkten des elliptischen Raumes* geht im Grunde auf C. STEPHANOS [17] zurück. Sie leistet für die *sphärische Kinematik* dasselbe wie die bereits erwähnte kinematische Abbildung von BLASCHKE-GRÜNWALD (Abschn. 4) für die ebene Bewegungslehre. Grundlegende differentialgeometrische Zusammenhänge hierbei untersuchte mit Einsatz des eleganten Quaternionenkalküls H. R. MÜLLER [15]. Eine interessante Anwendung der Abbildungsidee gab K. STRUBECKER [18], [19], der eine Querverbindung zu einem reellen, nichteuklidischen Seitenstück der berühmten Strahl-Kugel-Transformation von S. LIE und damit zur Turbinengeometrie von E. KASNER herstellte.

Betrachtet man andererseits eine *Bewegung des elliptischen Strahlraums*, so folgt aus der Erhaltung aller Winkelwerte, daß die beiden *Bildbündel euklidische Bewegungen* vollführen. Insbesondere bewirkt etwa eine *Rechtsschiebung* eine *Drehung des rechten Bildbündels*, während das linke festbleibt; jeder Strahl p gelangt ja dabei in linksparallele Lagen, sodaß sein Linksriß p_l keine Änderung erfährt.

10. Abschließend soll die Abbildung einer *Quadrik* Φ mit zwei reellen Erzeugendenscharen \mathcal{E} und \mathcal{F} etwas näher betrachtet werden. Gemäß Abschn. 8, III erhalten wir zunächst zwei Paare projektiv aufeinander und auf die betreffende Regelschar bezogener Bildkegel 2. Grades $\mathcal{E}_r, \mathcal{E}_l$ und $\mathcal{F}_r, \mathcal{F}_l$. Bringen wir nun durch eine Rechtsschiebung eine Ecke des stets reell vorhandenen, gemeinsamen Poltetraeders von Φ und Ω nach O , so führen die rechten Bildkegel gewisse Drehungen aus, während die linken festbleiben. In dieser *konzentrischen Lage* von Φ und Ω , die im Folgenden vorausgesetzt sei, hängen die Erzeugendenscharen durch die zentrische Spiegelung an O zusammen; für zwei symmetrische Erzeugende e und f gilt aber (vgl. Abb. 5) $e_r = f_l$ und $e_l = f_r$, sodaß die Bildkegel \mathcal{E}_r und \mathcal{F}_l ebenso wie \mathcal{E}_l und \mathcal{F}_r zusammenfallen.

⁶⁾ Das zum Bündel $P(p)$ absolut polare *Strahlfeld* $\pi(\bar{p})$ besitzt dieselben Bildbündel, solange man von der Orientierung absieht. Werden die Feldstrahlen jedoch gerichtet, so erweisen sich die orientierten Bildbündel als *gegensinnig-kongruent*.

Bezeichne c die (nullteilige) *Schnittkurve 4. Ordnung* von Φ und Ω . Irgend eine Erzeugende l der Linksschar \mathfrak{L} von Ω trifft Φ in zwei Punkten von c ; die beiden durch diese Punkte laufenden Erzeugenden e^1 und e^2 aus \mathfrak{C} haben Rechtsrisse e_r^1 und e_r^2 , die definitionsgemäß Treffgeraden von l sind, also in derselben Ebene Ol liegen. Wählen wir nun für l eine der vier Erzeugenden aus \mathfrak{L} , die Φ und damit c berühren, dann rücken e^1 und e^2 und somit auch e_r^1 und e_r^2 zusammen, und die Ebene Ol wird zur *Tangentialebene* von \mathfrak{C}_r . Bedenkt man schließlich, daß die Ebene Ol die Kugel Ω berührt, und zwar in einem Fernpunkt, also eine *Minimalebene* ist, so erkennt man, daß der *Bildkegel* $\mathfrak{C}_r = \mathfrak{F}_l$ und der *Verbindungskegel* Oc *konfokal* sind. Da diese Überlegungen für jede weitere c enthaltende Quadrik aufrecht bleiben, so gilt allgemeiner:

Die rechten und die linken Bildkegel der Erzeugendenscharen sämtlicher Flächen eines Büschels, das von der Maßkugel Ω und einer konzentrischen Quadrik Φ aufgespannt wird (elliptisch-konzyklische Flächen), erfüllen eine Schar konfokaler Kegel 2. Grades.

Insbesondere sind also die zu Φ gehörigen Bildkegel $\mathfrak{C}_r = \mathfrak{F}_l$ und $\mathfrak{C}_l = \mathfrak{F}_r$ konfokal und daher mit Φ auch koaxial.

Sind e und f irgend zwei verschiedenartige, also einander schneidende Erzeugende der Quadrik Φ , dann gilt auf Grund der Schnittbedingung aus Abschn. 9 die Winkelgleichheit $\sphericalangle e_r f_r = \sphericalangle e_l f_l$. Dies ist eine unter dem Namen „*IVORYSches Theorem*“ bekannte Beziehung, welche im Bündel die Übereinstimmung der beiden Diagonalwinkel eines von vier konfokalen Kegeln 2. Grades erzeugten Vierkants besagt. Es bliebe demnach nur noch zu zeigen, daß auch die Bildstrahlen e_r und e_l sowie f_r und f_l auf zwei weiteren mit \mathfrak{C}_r (und \mathfrak{C}_l) konfokalen Kegeln 2. Grades liegen; ein rein geometrischer Beweis hierfür wäre erwünscht.

Literatur.

- [1] L. ECKHART, Über die Abbildungsmethoden der darstellenden Geometrie. *Sitzsber. Akad. Wiss. Wien* **132** (1923), 177—192.
 2] L. ECKHART, Konstruktive Abbildungsverfahren, *Wien*, 1926.
 [3] F. REHBOCK, Die linearen Punkt-, Ebenen- und Strahlabbildungen der darstellenden Geometrie (Diss. Univ. Berlin, 1925). *Z. angew. Math. Mech.* **6** (1926), 379—400, 449—468.
 [4] F. REHBOCK, Zur Abbildung des Punkt- und Ebenenraumes auf die Kinematik der hyperbolischen und elliptischen Ebene, *Mh. Math. Phys.* **38** (1931), 257—274.
 [5] F. REHBOCK, Über parabolische Risse, *Math. Ann.* **109** (1923), 17—59.
 [6] W. BLASCHKE, Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie, *Z. Math. Phys.* **60** (1911), 61—91, 203—204.

- [7] J. GRÜNWARD, Ein Abbildungsprinzip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft, *Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien* **120** (1911), 677—741.
- [8] E. MÜLLER und E. KRUPPA, Vorlesungen über Darstellende Geometrie. Bd. I: Die linearen Abbildungen, *Wien*, 1923.
- [9] E. STUDY, Über nichteuklidische und Liniengeometrie, *Jber. D. Math. Ver.* **11** (1902), 313—342.
- [10] E. STUDY, Geometrie der Dynamen, *Leipzig*, 1903.
- [11] E. A. WEISS, Einführung in die Liniengeometrie und Kinematik (Teubners Math. Leitfäden, Bd. 41), *Leipzig—Berlin*, 1935.
- [12] J. PETERSEN, Géométrie des droites dans l'espace non euclidien, *Veih. Dän. Akad. Kopenhagen* 1900, 305—330.
- [13] G. FUBINI, Il parallelismo di Clifford negli spazi ellittici (Diss. Pisa 1900), *Ann. Scuola norm. sup. Pisa* **9** (1904), 1—74.
- [14] H. R. MÜLLER, Über eine infinitesimale kinematische Abbildung, *Mh. Math.* **54** (1950), 108—129.
- [15] H. R. MÜLLER, Die Bewegungsgeometrie auf der Kugel, *Mh. Math.* **55** (1951), 28—42.
- [16] W. NOLI, Über Schraubenabbildungen, *Mitt. Math. Sem. Gießen*, Heft **51** (1954).
- [17] C. STEPHANOS, Mémoire sur la représentation des homographies binaires par des points de l'espace avec application à l'étude des rotations sphériques, *Math. Ann.* **22** (1883), 299—367.
- [18] K. STRUBECKER, Zur nichteuklidischen Geraden-Kugel-Transformation, *Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien* **139** (1930), 685—705.
- [19] K. STRUBECKER, Zur Geometrie sphärischer Kurvenscharen, *Jber. D. Math. Ver.* **44** (1934), 184—198.

(Eingegangen am 28. Januar 1959.)