Déformation projective des congruences paraboliques.

Dedié à M. O. Varga à l'occasion de son cinquantenaire.

Par EDUARD ČECH (Prague).

1. Bien que la déformation projective des congruences de droites de l'espace S_3 ait été considérée pour la première fois déjà en 1920 [1] il semble que jusqu'à présent rien n'a été publié pour le cas particulier des congruences paraboliques. C'est ce cas que je considère ici en me limitant d'ailleurs aux congruences L, lieux d'une (la "première") famille des tangentes asymptotiques à une surface non développable F (surface focale de L); la déformation projective des congruences paraboliques qui possèdent une ligne directrice fera l'objet d'un Mémoire ultérieur. Une déformation projective T (droite $\rightarrow$ droite) de L transforme L dans L' et détermine une transformation ponctuelle t de F dans F' (surface focale de L'); or on trouve que t est ce que j'ai appelé en 1928 [2] une *déformation demi-asymptotique* de F (relative à la première famille d'asymptotiques) et inversement, chaque telle t donne naissance à une déformation projective de L. Il en résulte que condition nécessaire et suffisante pour la déformation projective de la congruence parabolique L est l'invariance de la *forme élémentaire* de BOMPIANI de la surface focale F (relative à la première famille d'asymptotiques). En transportant le théorème d'existence relatif aux déformations demiasymptotiques ([3], p. 242) on voit que chaque congruence parabolique qui possède une surface focale est projectivement déformable et que la déformation dépend de cinq fonctions arbitraires d'un argument; je donne ici une démonstration directe de ce résultat fondamental.

Tout comme pour les congruences non paraboliques [6] et [7], aussi pour chaque déformation projective T d'une congruence L ici considérée à chaque génératrice g de L appartient une *homographie osculatrice* H de T (réalisant un contact du second ordre entre les images sur l'hyperquadrique de Klein des deux congruences L, L') univoquement déterminée. Au point de contact de g avec F, H est en général seulement une *homographie tangente* de la transformation t portant F dans F'; H est une homographie osculatrice de t si et seulement si t est une déformation projective de F. Selon

E. Cartan [1] on devrait appeler *singulière* chaque déformation projective T de L pour laquelle t est une déformation projective de F; or dans notre cas il convient de restreindre la notion de déformation projective singulière de L au cas où t est une déformation projective de F du type R_0 relatif à la première famille d'asymptotiques.

T étant une déformation projective arbitraire de la congruence parabolique L, on peut étendre la transformation droite $\rightarrow$ droite T en une transformation ponctuelle T_1 de l'espace S_3 (à proprement parler, d'un domaine de S_3) en définissant comme image d'un point arbitraire B d'une génératrice quelconque g de L le point HB, où H est l'homographie osculatrice de T appartenant à la génératrice g. Pour chaque g il existe une homographie H_1 qui est tangente à la déformation ponctuelle T_1 tout le long de g. Nous appellerons T_1 *extension ponctuelle* de T et H_1 *homographie ponctuellement associée* à T dans la génératrice g. Pour que T soit singulière dans notre sens, il faut et il suffit que H_1 soit identique à H (pour chaque g). J'appelle T *demisingulière* si T n'est pas singulière et si pour chaque g il existe des points B non situés sur g et, néanmoins, ayant la propriété $H_1B = HB$. Si T n'est ni singulière ni demisingulière, le lieu des points B tels que $H_1B = HB$ est la droite g. Les T demisingulières dépendent de huit fonctions arbitraires d'un argument et n'existent par suite que pour des surfaces focales F particulières. Les déformations projectives T singulières possèdent la propriété caractéristique d'être *totalment asymptotiques* (résultat essentiellement contenu déjà dans [6], p. 182—184) ce qui veut dire que, pour chaque surface réglée non développable R faisant partie de L, l'extension ponctuelle T_1 de t porte chaque courbe asymptotique de R en une courbe asymptotique de la surface réglée transformée de R. Si T est demisingulière, aucune surface réglée $R \subset L$ n'est transformée asymptotiquement par T_1. Enfin, si T n'est ni singulière ni demisingulière, alors il existe une et une seule manière de recouvrir L par une famille ∞^1 des surfaces réglées non développables transformées asymptotiquement par T_1. Ces théorèmes sont formellement identiques aux théorèmes connus (v. [6] et [7]) pour les congruences non paraboliques. Dans le cas actuel de congruences paraboliques, il faut ajouter que le cas où la transformation t de F qui correspond à la déformation projective T de L est une déformation projective de F est identique au cas où les surfaces réglées $R \subset L$ qui touchent F le long d'une courbe asymptotique de la deuxième famille sont transformées asymptotiquement par T_1.

2. Pour démontrer les résultats énoncés nous ferons usage de la méthode du repère mobile d'E. Cartan. Le sommet A_0 du repère mobile

$$A_0, A_1, A_2, A_3 \tag{2.1}$$

décrira la surface focale F. En outre (2. 1) est assujetti à la condition que pour

$$X = x_0 A_0 + x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3$$

les équations des quadriques de Darboux de F au point A_0 soient

$$x_0 x_3 - x_1 x_2 + \lambda x_3^2 = 0.$$

Pour simplifier quelques formules nous posons encore la condition non essentielle

$$[A_0 A_1 A_2 A_3] = 1. \tag{2.2}$$

Les coefficients ω_{ij} des équations de structure $dA_i = \sum_j \omega_{ij} A_j$ sont alors soumis aux conditions

$$\omega_{03} = 0, \tag{2.3}$$

$$\omega_{13} = \omega_2, \quad \omega_{23} = \omega_1, \tag{2.4}$$

$$\omega_{00} + \omega_{33} = \omega_{11} + \omega_{22} = 0, \tag{2.5}$$

où nous avons posé

$$\omega_{01} = \omega_1, \quad \omega_{02} = \omega_2. \tag{2.6}$$

La différentiation extérieure de (2. 4) donne

$$\omega_{12} = \alpha_1 \omega_1, \quad \omega_{21} = \alpha_2 \omega_2. \tag{2.7}$$

Les équations de structure sont donc

$$\begin{aligned} dA_0 &= \omega_{00} A_0 + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2, \\ dA_1 &= \omega_{10} A_0 + \omega_{11} A_1 + \alpha_1 \omega_2 A_2 + \omega_2 A_3, \\ dA_2 &= \omega_{20} A_0 + \alpha_2 \omega_2 A_1 - \omega_{11} A_2 + \omega_1 A_3, \\ dA_3 &= \omega_{30} A_0 + \omega_{31} A_1 + \omega_{32} A_2 - \omega_{00} A_3. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Outre le repère ponctuel (2. 1) il convient de considérer le repère planaire duel à (2. 1)

$$E_0, E_1, E_2, E_3 \tag{2.9}$$

défini par

$$E_0 = [A_1 A_2 A_3], \quad E_1 = -[A_0 A_2 A_3], \quad E_2 = [A_0 A_1 A_3], \quad E_3 = -[A_0 A_1 A_2]. \tag{2.10}$$

Les équations duelles à (2. 8) sont alors

$$\begin{aligned} dE_0 + \omega_{00} E_0 + \omega_{10} E_1 + \omega_{20} E_2 + \omega_{30} E_3 &= 0, \\ dE_1 + \omega_1 E_0 + \omega_{11} E_1 + \alpha_2 \omega_2 E_2 + \omega_{31} E_3 &= 0, \\ dE_2 + \omega_2 E_0 + \alpha_1 \omega_1 E_1 - \omega_{11} E_2 + \omega_{32} E_3 &= 0, \\ dE_3 + \omega_2 E_1 + \omega_1 E_2 - \omega_{00} E_3 &= 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

On voit sans peine que

$$[A_0 dA_0 \delta A_0] = -[\omega_1 \omega_2] E_3,$$
$$[E_0 dE_0 \delta E_0] = -[\omega_1 \omega_2] A_0,$$

d'où il résulte (v. p. ex. [3], p. 65, où on suppose la validité des formules (6_1), p. 39) que l'*élément linéaire projectif* (Fubini) *de la surface* F est, (A, E) étant le produit scalaire du point A et du plan E,

$$\frac{(d^2 A_0, dE_3) - (dA_0, d^2 E_3)}{2(dA_0, dE_3)}$$

ou bien, selon (2.8) et (2.11),

$$\frac{\alpha_1 \omega_1^3 + \alpha_2 \omega_2^3}{2\omega_1 \omega_2}. \tag{2.12}$$

La première *forme élémentaire* (Bompiani) *de la surface* F est donc

$$\frac{\alpha_1 \omega_1^2}{\omega_2}. \tag{2.13}$$

Les asymptotiques de F sont données par les équations $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 0$; celles données par $\omega_2 = 0$ seront dits de former la *première famille d'asymptotiques* de F. La tangente à l'asymptotique de la première famille passant par le point A_0 de F est

$$[A_0 A_1]. \tag{2.14}$$

Nous allons supposer que *les asymptotiques de la première famille de la surface F ne sont pas rectilignes,* ce qui est exprimé par l'inégalité

$$\alpha_1 \neq 0. \tag{2.16}$$

Il y a donc ∞^2 droites (2.14) qui forment une congruence parabolique dont F est la surface focale; cette congruence sera désignée par L.

Nous sommes intéressés dans les déformations projectives $L \rightarrow L'$, où la congruence L' est nécessairement de la même sorte comme L. Nous allons introduire pour L' des notations analogues à celle que nous venons d'introduire pour L, en indiquant avec des accents toutes les expressions relatives à L'. Nous allons poser

$$\tau_{ij} = \omega'_{ij} - \omega_{ij} \qquad (0 \leqq i, j \leqq 3). \tag{2.16}$$

3. Au lieu de répéter pour le repère

$$A'_0, A'_1, A'_2, A'_3 \tag{3.1}$$

les suppositions faites plus haut pour le repère (2.1) nous choisirons le repère

(3. 1) de telle manière que les équations

$$HA_0 = A'_0,\ HA_1 = A'_1,\ HA_2 = A'_2,\ HA_3 = A_3 \tag{3.2}$$

donnent l'homographie osculatrice de la déformation projective $L \to L'$ étudiée; cette déformation sera désignée par T, et t sera la transformation correspondante de la surface focale F de L. Il sera commode de supposer encore

$$[A'_0, A'_1, A'_2, A'_3] = 1. \tag{3.3}$$

Les coordonnées non homogènes du point A_0 de F et celles du plan tangent E_3 de F au point A_0 peuvent être calculées en fonctions des coordonnées non homogènes de la génératrice $[A_0 A_1]$ de L et de ses différentielles. En se rappelant la définition géométrique de H on en déduit sans peine que H est une homographie tangente à la transformation ponctuelle t de F en F' et aussi à la transformation correspondante des plans tangents à F.

Les équations (2. 2) et (3. 3) entraînent

$$\tau_{00} + \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = 0. \tag{3.4}$$

Le fait que H est une homographie tangente à la transformation ponctuelle t est exprimé par les équations

$$\tau_{01} = 0, \quad \tau_{02} = 0, \quad \tau_{03} = 0 \tag{3.5}$$

et le fait que H est tangente pour la transformation correspondante des plans tangents à F par les équations

$$\tau_{13} = 0, \quad \tau_{23} = 0. \tag{3.6}$$

Des équations (3. 5) et (3. 6) on déduit par différentiation extérieure

$$[\tau_{00} - \tau_{11}\,\omega_1] - [\tau_{21}\,\omega_2] = 0, \quad [\tau_{12}\,\omega_1] - [\tau_{00} - \tau_{22}\,\omega_2] = 0, \tag{3.7}$$

$$[\tau_{00} - \tau_{11} + \tau_{22} - \tau_{33}\,\omega_1] = 0, \quad [\tau_{00} + \tau_{11} - \tau_{22} - \tau_{33}\,\omega_2] = 0. \tag{3.8}$$

Maintenant on a

$$d[A_0 A_1] = (\omega_{00} + \omega_{11})[A_0 A_1] + \omega_{12}[A_0 A_2] + \omega_2[A_0 A_3] - \omega_2[A_1 A_2],$$

$$d[A'_0 A'_1] = (\omega'_{00} + \omega'_{11})[A'_0 A'_1] + \omega'_{12}[A'_0 A'_2] + \omega_2[A'_0 A'_3] - \omega_2[A'_1 A'_2]$$

et comme H est une homographie tangente à T,

$$\tau_{12} = 0 \tag{3.9}$$

d'où on déduit par différentiation extérieure

$$\alpha_1[\tau_{11} - \tau_{22}\,\omega_1] + [\tau_{10} - \tau_{32}\,\omega_2] = 0. \tag{3.10}$$

Maintenant on a

$$[A_0'A_1'] = H[A_0A_1],$$

$$d[A_0'A_1'] = Hd[A_0A_1] + (\tau_{00} + \tau_{11})[A_0'A_1'],$$

$$d^2[A_0'A_1'] = Hd^2[A_0A_1] + 2(\tau_{00} + \tau_{11})d[A_0'A_1'] + (\cdot)[A_0'A_1'] +$$
$$+ \{(\tau_{22} - \tau_{11})\alpha_1\omega_1 - (\tau_{10} - \tau_{32})\omega_2\}[A_0'A_2'] + (\tau_{33} - \tau_{11})\omega_2[A_0'A_3'] -$$
$$- (\tau_{22} - \tau_{00})\omega_2[A_1'A_2'].$$

L'hypothèse que H est une homographie osculatrice à T est donc exprimée par les équations

$$\tau_{22} - \tau_{00} = 0, \quad \tau_{33} - \tau_{11} = 0, \tag{3.11}$$

$$(\tau_{22} - \tau_{11})\alpha\omega_1 - (\tau_{10} - \tau_{32})\omega_2 = 0. \tag{3.12}$$

De (3.8) et (3.12) on déduit que $[\tau_{22} - \tau_{11}\omega_1] = 0$ de sorte que (3.12) donne, ayant égard à (2.15),

$$\tau_{11} - \tau_{22} = 0, \tag{3.13}$$

$$\tau_{10} - \tau_{32} = 0. \tag{3.14}$$

De (3.4), (3.11) et (3.13) il résulte que $\tau_{00} = \tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = 0$. Les déformations projectives de la congruence parabolique L donnée s'obtiennent donc en intégrant le système de Pfaff

$$\tau_{01} = \tau_{02} = \tau_{03} = \tau_{13} = \tau_{23} = \tau_{12} = \tau_{00} = \tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = \tau_{10} - \tau_{32} = 0. \tag{3.15}$$

La différentiation extérieure de (3.15) donne

$$\begin{gathered}[\tau_{21}\omega_2] = 0, \quad \alpha_1[\tau_{21}\omega_1] + 2[\tau_{20}\omega_2] = 0,\\ 2[\alpha_1\tau_{21} - \tau_{10}\omega_1] + [\tau_{20} + \tau_{31}\omega_2] = 0, \quad \alpha_1[\tau_{21}\omega_1] + 2[\tau_{31}\omega_2] = 0,\\ \alpha_1[\tau_{20} + \tau_{31}\omega_1] + 2[\tau_{30}\omega_2] = 0.\end{gathered} \tag{3.16}$$

De (3.16) on déduit sans peine que le système (3.15) est en involution et que ses solutions dépendent de 5 fonctions arbitraires d'un argument. De (3.15) il résulte encore que, bien que nous ne l'ayons pas supposé explicitement, *le rapère* (3.1) *est en réalité soumis aux conditions, analogues aux conditions* (2.3), (2.4), (2.5), *remplies par le repère* (2.1). L'équation (3.9) comparée à (2.7_1) donne

$$\alpha_1' = \alpha_1. \tag{3.17}$$

Il en résulte que si la transformation T de L en L' est une déformation projective les formes élémentaires (2.13) des surfaces focales F et F' sont identiques l'une à l'autre de manière que la transformation t de F en F' correspondante à T est une demidéformation asymptotique.

4. Nous allons démontrer la validité de l'inverse de l'énoncé à la fin du n° 3. Partons du repère (2. 1) soumis aux conditions (2. 3), (2. 4), (2. 5) et du repère (3. 1) soumis aux conditions analogues

$$\omega'_{03}=0, \quad \omega'_{13}=\omega'_{02}, \omega'_{23}=\omega'_{01}, \omega'_{00}+\omega'_{33}=\omega'_{11}+\omega'_{22}=0. \tag{4.1}$$

Remarquons que les conditions imposées au repère (2. 1) restent satisfaites si on le remplace par le repère

$$r_0 A_0, r_1 A_1, r_1^{-1} A_2, r_0^{-1} A_3. \tag{4.2}$$

L'hypothèse que la transformation t de F en F' qui porte le point A_0 de F au point A'_0 de F' soit une demidéformation asymptotique relative aux asymptotiques $\omega_2=0$ de la première famille est exprimée par les équations

$$\omega'_{01}=s_1\omega_1, \quad \omega'_{02}=s_2\omega_2, \tag{4.3}$$

$$\alpha'_1=\alpha_1 \tag{4.4}$$

où

$$\omega'_{12}=\alpha'_1\omega'_{01}. \tag{4.5}$$

Or si on remplace le repère (2. 1) par le repère (4. 2), les formes ω_1, ω_2 se trouvent remplacées par

$$r_0 r_1^{-1}\cdot\omega_1, \quad r_0 r_1\cdot\omega_2$$

ce qui permet de donner aux équations (4. 3) la forme plus simple

$$\omega'_{01}=\omega_1, \quad \omega'_{02}=\omega_2. \tag{4.6}$$

En résumé, le choix des deux repères (2. 1) et (3. 1) peut être fait de telle manière que la condition que t soit une demidéformation asymptotique de F relative aux asymptotiques $\omega_2=0$ est exprimée par les équations (2. 3), (2. 4), (2. 5), (2. 7_1) jointes aux équations

$$\tau_{01}=\tau_{02}=\tau_{03}=\tau_{13}=\tau_{23}=\tau_{00}+\tau_{33}=\tau_{11}+\tau_{22}=\tau_{12}=0. \tag{4.7}$$

La différentiation extérieure de (4. 7) donne

$$[\tau_{00}-\tau_{11}\omega_1]=0, \quad [\tau_{00}-\tau_{22}\omega_2]=0, \quad [\tau_{21}\omega_2]=0,$$
$$[\tau_{10}-\tau_{32}\omega_1]+[\tau_{20}-\tau_{31}\omega_2]=0, \quad \alpha_1[\tau_{11}-\tau_{22}\omega_1]+[\tau_{10}-\tau_{32}\omega_2]=0$$

ce qui permet de poser

$$\begin{gathered}\tau_{11}-\tau_{00}=2u\omega_1, \quad \tau_{22}-\tau_{00}=-(\tau_{00}+\tau_{11})=2v\omega_2,\\ \tau_{32}-\tau_{10}=2\alpha_1 v\omega_1+2w\omega_2.\end{gathered} \tag{4.8}$$

Nous devons prouver l'existence, pour chaque point A_0 de F, d'une homographie H réalisant un contact analytique du second ordre pour la transformation T (droite $\rightarrow$ droite) qui porte chaque droite $[A_0A_1]$ dans la droite correspondante $[A'_0 A'_1]$. Comme au n° 3, on voit qu'une telle H doit réaliser un contact analytique du premier ordre pour la transformation ponctuelle t qui porte le point A_0 au point A'_0 et aussi pour la transformation planaire correspondante qui porte le plan $[A_0 A_1 A_2]$ au plan $[A'_0 A'_1 A'_2]$. Or il résulte de (2. 3), (2. 4), (2. 5) et (4. 7) que

$$dA_0 = \omega_{00} A_0 + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2, \quad dA'_0 = (\omega_{00} + \tau_{00}) A'_0 + \omega_1 A'_1 + \omega_2 A'_2,$$
$$d[A_0 A_1 A_2] = \omega_{00}[A_0 A_1 A_2] + \omega_1 [A_0 A_1 A_3] - \omega_2 [A_0 A_2 A_3],$$
$$d[A'_0 A'_1 A'_2] = (\omega_{00} + \tau_{00})[A'_0 A'_1 A'_2] + \omega_1 [A'_0 A'_1 A'_3] - \omega_2 [A'_0 A'_2 A'_3].$$

On en déduit que les deux contacts analytiques dont nous venons de parler ont lieu si et seulement si

$$HA_0 = \varrho A'_0, \quad HA_1 = \varrho A'_1 + (\cdot) A'_0, \quad HA_2 = \varrho A'_2 + (\cdot) A'_0,$$
$$HA_3 = \varrho A'_3 + (\cdot) A'_0 + (\cdot) A'_1 + (\cdot) A'_2.$$

Les équations (2. 2) et (3. 3) donnent $\varrho^4 = 1$, mais il est aisé de voir qu'on peut supposer $\varrho = 1$ sans restreindre la généralité. Par suite

$$\begin{gathered} HA_0 = A'_0, \quad HA_1 = A'_1 + p_1 A_0, \quad HA_2 = A'_2 + p_2 A'_0, \\ HA_3 = q_0 A'_0 + q_1 A'_1 + q_2 A'_2 + A'_3. \end{gathered} \tag{4. 9}$$

Or il résulte de (2. 8) que

$$\begin{aligned} d[A_0 A_1] &= (\omega_{00} + \omega_{11})[A_0 A_1] + \alpha_1 \omega_1 [A_0 A_2] + \omega_2 [A_0 A_3] - \omega_2 [A_1 A_2], \\ d[A_0 A_2] &= \alpha_2 \omega_2 [A_0 A_1] + (\omega_{00} - \omega_{11})[A_0 A_2] + \omega_1 [A_0 A_3] + \omega_1 [A_1 A_2], \\ d[A_0 A_3] &= \omega_{31}[A_0 A_1] + \omega_{32}[A_0 A_2] + \omega_1 [A_1 A_3] + \omega_2 [A_2 A_3], \\ d[A_1 A_2] &= -\omega_{20}[A_0 A_1] + \omega_{10}[A_0 A_2] + \omega_1 [A_1 A_3] - \omega_2 [A_2 A_3] \end{aligned} \tag{4. 10}$$

de manière que

$$\begin{gathered} d^2[A_0 A_1] = (\cdot)[A_0 A_1] + \{d(\alpha_1 \omega_1) + 2\alpha_1 \omega_{00} \omega_1 + \\ + \omega_2(\omega_{32} - \omega_{10})\}[A_0 A_2] + \{d\omega_2 + \alpha_1 \omega_1^2 + (\omega_{00} + \omega_{11})\omega_2\}[A_0 A_3] - \\ - \{d\omega_2 - \alpha_1 \omega_1^2 + (\omega_{00} + \omega_{11})\omega_2\}[A_1 A_2] + 2\omega_2^2 [A_2 A_3]. \end{gathered} \tag{4. 11}$$

Les équations analogues relatives au repère (3. 1) sont, compte tenu de (4. 7)

$$\begin{gathered} d[A'_0 A'_1] = (\omega_{00} + \omega_{11} + \tau_{00} + \tau_{11})[A'_0 A'_1] + \alpha_1 \omega_1 [A'_0 A'_2] + \\ + \omega_2 [A'_0 A'_3] - \omega_2 [A'_1 A'_2], \end{gathered} \tag{4. 12}$$

$$\begin{gathered} d^2[A'_0 A'_1] = (\cdot)[A'_0 A'_1] + \{d(\alpha_1 \omega_1) + 2\alpha_1 (\omega_{00} + \tau_{00})\omega_1 + \\ + \omega_2(\omega_{32} - \omega_{10} + \tau_{32} - \tau_{10})\}[A'_0 A'_2] + \{d\omega_2 + \alpha_1 \omega_1^2 + (\omega_{00} + \omega_{11} + \\ + \tau_{00} + \tau_{11})\omega_2\}[A'_0 A'_3] - \{d\omega_2 - \alpha_1 \omega_1^2 + (\omega_{00} + \omega_{11} + \\ + \tau_{00} + \tau_{11})\omega_2\}[A'_1 A'_2] + 2\omega_2^2 [A'_2 A'_3]. \end{gathered} \tag{4. 13}$$

On doit prouver qu'il est possible de choisir p_1, p_2, q_0, q_1, q_2 de manière que l'homographie H soit osculatrice pour T, c'est-à-dire de manière qu'il existe une forme de Pfaff ϑ telle qu'on ait

$$d[A_0'A_1'] = Hd[A_0A_1] + \vartheta[A_0'A_1'], \tag{4.14}$$

$$d^2[A_0'A_1'] = Hd^2[A_0A_1] + 2\vartheta d[A_0'A_1'] + (\cdot)[A_0'A_1']. \tag{4.15}$$

Or les équations (4. 9) entraînent

$$\begin{gathered} H[A_0A_1] = [A_0'A_1'],\ H[A_0A_2] = [A_0'A_2'],\ H[A_0A_3] = q_1[A_0'A_1'] + q_2[A_0'A_2'] + \\ + [A_0'A_3'],\ H[A_1A_2] = [A_1'A_2'] - p_2[A_0'A_1'] + p_1[A_0'A_2'], \\ H[A_1A_3] = (p_1q_1 - q_0)[A_0'A_1'] + p_1q_2[A_0'A_2'] + p_1[A_0'A_3'] + q_2[A_1'A_2'] + [A_1'A_3'], \\ H[A_2A_3] = p_2q_1[A_0'A_1'] + (p_2q_2 - q_0)[A_0'A_2'] + p_2[A_0'A_3'] - q_1[A_1'A_2'] + [A_2'A_3']. \end{gathered} \tag{4.16}$$

Donc il résulte de (4. 10$_1$)

$$\begin{gathered} Hd[A_0A_1] = \{\omega_{00} + \omega_{11} + (q_1 + p_2)\omega_2\}[A_0'A_1'] + \\ + \{\alpha_1\omega_1 + (q_2 - p_1)\omega_2\}[A_0'A_2'] + \omega_2[A_0'A_3'] - \omega_2[A_1'A_2'] \end{gathered}$$

de manière que (4. 12) donne

$$d[A_0'A_1'] = Hd[A_0A_1] + \{\tau_{00} + \tau_{11} - (q_1 + p_2)\omega_2\}[A_0'A_1'] + (p_1 - q_2)\omega_2[A_0'A_2'].$$

Condition nécessaire et suffisante pour pouvoir vérifier la relation (4. 14) est donc

$$q_2 = p_1 \tag{4.17}$$

et on a alors (4. 14) avec

$$\vartheta = \tau_{00} + \tau_{11} - (q_1 + p_2)\omega_2. \tag{4.18}$$

Les équations (4. 11) et (4. 16) entraînent

$$\begin{gathered} Hd^2[A_0A_1] = (\cdot)[A_0'A_1'] + \{d(\alpha_1\omega_1) + (q_2 - p_1)d\omega_2 + 2\alpha_1\omega_{00}\omega_1 + \\ + (\omega_{32} - \omega_{10})\omega_2 + (p_1 + q_2)\alpha_1\omega_1^2 + (q_2 - p_1)(\omega_{00} + \omega_{11})\omega_2 + \\ + 2(p_2q_2 - q_0)\omega_2^2\}[A_0'A_2'] + \{d\omega_2 + \alpha_1\omega_1^2 + (\omega_{00} + \omega_{11})\omega_2 + 2p_2\omega_2^2\}[A_0'A_3'] - \\ - \{d\omega_2 - \alpha_1\omega_1^2 + (\omega_{00} + \omega_{11})\omega_2 + 2q_1\omega_2^2\}[A_1'A_2'] + 2\omega_2^2[A_2'A_3'] \end{gathered}$$

de sorte qu'il résulte de (4. 13) et (4. 17)

$$\begin{gathered} d^2[A_0'A_1'] = Hd^2[A_0A_1] + (\cdot)[A_0'A_1'] + \\ + \{2\alpha_1\tau_{00}\omega_1 + (\tau_{32} - \tau_{10} + 2\cdot\overline{q_0 - p_1p_2}\cdot\omega_2)\omega_2 - 2p_1\alpha_1\omega_1^2\}[A_0'A_2'] + \\ + (\tau_{00} + \tau_{11} - 2p_2\omega_2)\omega_2[A_0'A_3'] - (\tau_{00} + \tau_{11} + 2q_1\omega_2)\omega_2[A_1'A_2']. \end{gathered}$$

On a donc en vertu de (4. 12) et (4. 18)

$$d^2[A_0'A_1'] = Hd^2[A_0A_1] + 2\vartheta d[A_0'A_1'] + (\cdot)[A_0'A_1'] +$$
$$+ \{-2\alpha_1\tau_{11}\omega_1 + (\tau_{32}-\tau_{10})\omega_2 - 2\alpha_1 p_1\omega_1^2 + 2\alpha_1(q_1+p_2)\omega_1\omega_2 + 2(q_0-p_1p_2)\omega_2^2\}\cdot$$
$$\cdot[A_0'A_2'] - (\tau_{00}+\tau_{11}+2q_1\omega_2)\omega_2[A_0'A_3'] + (\tau_{00}+\tau_{11}-2\cdot\overline{2q_1+p_2}\cdot\omega_2)\omega_2[A_1'A_2']$$

ou bien, ayant égard à (4. 8),

$$d^2[A_0'A_1'] = Hd^2[A_0A_1] + 2\vartheta d[A_0'A_1'] + (\cdot)[A_0'A_1'] + 2\{-\alpha_1(p_1+u)\omega_1^2 +$$
$$+ \alpha_1(q_1+p_2+2v)\omega_1\omega_2 + (q_0-p_1p_2+w)\omega_2^2\}[A_0'A_2'] +$$
$$+ 2(v-q_1)\omega_2^2[A_0'A_3'] - 2(v+2q_1+p_2)\omega_2^2[A_1'A_2']$$

de sorte que l'équation (4. 15) sera vérifiée si on choisit

$$p_1 = q_2 = -u, \quad q_1 = v, \quad p_2 = -3v, \quad q_0 = 3uv + w.$$

5. Considérons de nouveau une déformation projective T portant la congruence parabolique L dans la congruence L' (droite $\rightarrow$ droite) et comme auparavant, désignons par t la transformation ponctuelle portant la surface focale F de L dans la surface focale F' de L'. Le choix des repères (2. 1) et (3. 1) soit le même comme au n° 3 de sorte que nous avons les équations (2. 3), (2. 4), (2. 5), (3. 15) et (3. 16) et que l'homographie osculatrice de T a la forme (3. 2). Pour que non seulement T, mais aussi t soit une déformation projective, il faut et il suffit que l'élément linéaire projectif de Fubini de F' soit identique à celui de F ce qui, dans le cas actuel, est exprimé par

$$\tau_{21} = 0. \tag{5. 1}$$

Dans ce cas l'homographie osculatrice H de T est osculatrice aussi pour t, car il résulte de (2. 7), (2. 8), (3. 2) et (3. 15) que

$$HA_0 = A_0',$$
$$HdA_0 = dA_0',$$
$$Hd^2A_0 = d^2A_0' - (\omega_1\tau_{10} + \omega_2\tau_{20})A_0' - \omega_2\tau_{21}A_1'.$$

Remarquons que la relation (5. 1) est équivalente à

$$[\tau_{10}\omega_1] = 0. \tag{5. 2}$$

En effet si on suppose la validité de (5. 1), on déduit de ($3.\,16_{2,4}$) que $[\tau_{20} + \tau_{31}\omega_2] = 0$ de sorte que ($3.\,16_3$) donne (5. 2). Inversement la validité de (5. 2) entraîne, compte tenu de ($3.\,16_3$), que

$$2\alpha_1[\tau_{21}\omega_1] + [\tau_{20} + \tau_{31}\omega_2] = 0;$$

d'autre part il résulte de (3. $16_{2,4}$) que

$$\alpha_1[\tau_{21}\omega_1]+[\tau_{20}+\tau_{31}\omega_2]=0.$$

Vu (2. 15) on déduit que $[\tau_{21}\omega_1]=0$ et la comparaison avec (3. 16_1) conduit à (5. 1).

Notons encore le cas particulier

$$\tau_{10}=0 \tag{5. 3}$$

de la relation (5. 2). Nous allons prouver que c'est le cas où t est une déformation projective de F du type R_0 relativement aux asymptotiques $\omega_2=0$. If suffit (v. [5], p. 9 ou [6], p. 57; l'énoncé fait [3], p. 89, n'est pas exact pour les tangentes asymptotiques) de vérifier que (5. 3) exprime la condition pour que H réalise un contact analytique du troisième ordre entre chaque asymptotique de F et la courbe qui y correspond moyennant t. Or on vérifie sans difficulté que les relations (2. 8), (3. 15) et (3. 16) entraînent

$$\begin{gathered} HA_0\equiv A_0', \quad HdA_0\equiv dA_0', \quad Hd^2A_0\equiv d^2A_0'-\omega_1\tau_{10}A_0', \\ Hd^3A_0\equiv d^3A_0'-3\omega_1\tau_{10}dA_0'+2\omega_1^2\tau_{10}A_1' \end{gathered} \tag{5. 4}$$

où le signe $\equiv$ indique des égalités valables le long de chaque asymptotique $\omega_2=0$. De (5. 4) on déduit pour le contact du troisième ordre dont nous sommes intéressés la condition

$$[\tau_{10}\omega_2]=0 \tag{5. 5}$$

et il est aisé de voir que sous la supposition (5. 1) la relation (5. 5) entraîne (5. 3), car ayant égard à (3. $16_{2,3,4}$) (5. 5) conduit à $[\tau_{10}\omega_1]=0$ et cette relation jointe à (5. 5) donne (5. 3).

Revenons à la considération d'une déformation projective arbitraire T de la congruence parabolique L. Remarquons que (3. 16_3) donne $[\tau_{10}\omega_1\omega_2]=0$; vu l'inégalité (2. 15), on peut donc poser

$$\tau_{10}=\alpha_1 f\omega_1+g\omega_2. \tag{5. 6}$$

La transformation T porte droites en droites; ce n'est pas une transformation ponctuelle. Nous obtenons cependant (localement) une transformation ponctuelle de l'espace S_3 que nous indiquerons par T_1 et que nous appellerons *extension ponctuelle* de T en faisant correspondre à chaque point $B=x_0A_0+x_1A_1$ d'une génératrice quelconque $[A_0A_1]$ de L l'image $HB=T_1B$ de B moyennant l'homographie osculatrice H correspondante à la génératrice $[A_0A_1]$ considérée. Outre l'homographie osculatrice H, nous allons attacher à $[A_0A_1]$ l'homographie H_1 définie par

$$H_1A_0=A_0', \quad H_1A_1=A_1', \quad H_1A_2=A_2'+fA_0', \quad H_1A_3=A_3'+gA_0'+fA_1'. \tag{5. 7}$$

On vérifie sans difficulté, faisant usage de (2. 8), (3. 15) et (5. 7) que l'on a

$$
\begin{aligned}
&H_1(x_0A_0+x_1A_1)=x_0A_0'+x_1A_1',\\
(5.8)\qquad &H_1d(x_0A_0+x_1A_1)=d(x_0A_0'+x_1A_1')+f\omega_2(x_0A_0'+x_1A_1').
\end{aligned}
$$

Ces équations montrent que H_1 est une homographie tangente à la transformation ponctuelle T_1 tout le long de la droite $[A_0A_1]$ et on prouve sans peine que c'est là une propriété charactéristique de H_1 que nous appellerons *homographie ponctuellement associée* à la déformation projective T.

La congruence parabolique L et sa déformation projective T étant des notions autoduelles on peut aussi considérer l'*extension planaire* T_2 de T qui fait correspondre à chaque plan β passant par une génératrice quelconque $[A_0A_1]$ de L l'image $H\beta=T_2\beta$ du plan β moyennant H. Au lieu de H_1 on obtient alors l'*homographie planairement associée* à la déformation projective T que nous désignons par H_2. Je laisse au lecteur le soin de vérifier que l'on a

$$(5.9)\qquad H_2A_0=A_0',\quad H_2A_1=A_1',\quad H_2A_2=A_2'-fA_0',\quad H_2A_3=A_3'-gA_0'-fA_1'.$$

La déformation projective T s'appelle *singulière* si les trois homographies H, H_1 et H_2 coïncident; la condition pour qu'il en soit ainsi est (5. 3) et nous en connaissons la signification géométrique. La déformation projective T s'appelle *demisingulière* si elle n'est pas singulière et si pour chaque position de la droite $[A_0A_1]$ il existe un point B hors de $[A_0A_1]$ tel que $HB=H_1B$ (et par suite aussi $=H_2B$). La condition pour la demisingularité est évidemment $f=0\neq g$ ou bien

$$(5.10)\qquad [\tau_{10}\omega_2]=0\neq\tau_{10}.$$

L'équation (3. 16_1) permet de poser $\tau_{21}=2u\omega_2$. Ensuite les équations (2. $16_{2,4}$) donnent $[\tau_{20}+\tau_{31}\omega_2]=2\alpha_1u[\omega_1\omega_2]$ et (3. 16_3) donne $[\tau_{10}\omega_1]=-\alpha_1u[\omega_1\omega_2]$. Dans le cas demisingulier on a (5. 10) et par suite $\tau_{10}=\alpha_1u\omega_2$ avec $u\neq 0$. Notons encore que les relations (3. $16_{2,4}$) entraînent $[\tau_{31}-\tau_{20}\omega_2]=0$; on peut dont poser $\tau_{31}-\tau_{20}=2v\omega_2$. Par suite les déformations projectives demisingulières des congruences paraboliques s'obtiennent en intégrant le système de Pfaff

$$
\begin{aligned}
&\omega_{03}=0,\ \omega_{13}=\omega_2,\ \omega_{23}=\omega_1,\ \omega_{00}-\omega_{11}-\omega_{22}+\omega_{33}=0,\ \omega_{12}=\alpha_1\omega_1,\ \omega_{21}=\alpha_2\omega_2,\\
(5.11]\qquad &\tau_{01}=\tau_{02}=\tau_{03}=\tau_{13}=\tau_{23}=\tau_{00}=\tau_{11}=\tau_{22}=\tau_{33}=\tau_{12}=0,\\
&\tau_{21}=2u\omega_2,\ \tau_{10}=\tau_{32}=\alpha_1u\omega_2,\ \tau_{31}-\tau_{20}=2v\omega_2
\end{aligned}
$$

sous l'hypothèse $\alpha_1u\neq 0$. La différentiation extérieure de (5. 11) donne les relations

$$
\begin{aligned}
&[\omega_{32}-\omega_{10}\omega_1]+[\omega_{31}-\omega_{20}\omega_2]=0,\\
&[d\alpha_1+\alpha_1(\omega_{00}-2\omega_{11}+\omega_{22})\omega_1]+[\omega_{32}-\omega_{10}\omega_2]=0,\\
&[\omega_{31}-\omega_{20}\omega_1]+[d\alpha_2+\alpha_2(\omega_{00}+\omega_{11}-2\omega_{22})\omega_2]=0,\\
&[\tau_{20}-\alpha_1 u\,\omega_1\omega_2]=0,\quad \alpha_1[\tau_{20}+\tau_{31}\omega_1]+2[\tau_{30}\omega_2]=0,\\
&[du+u(\omega_{00}+\omega_{11}-2\omega_{22})-v\,\omega_1\omega_2]=0,\\
&[u\,d\alpha_1+\alpha_1 u(\omega_{00}-2\omega_{11}+\omega_{22})+2\alpha_1 v\,\omega_1\omega_2]=0,\\
&-[\tau_{30}\omega_1]+[dv+2v(\omega_{00}-\omega_{22})-u(\omega_{10}+\omega_{32})\omega_2]=0
\end{aligned}
$$

qui montrent que pour $\alpha_1 u\neq 0$ le système (5. 11) est en involution et que ses solutions dépendent de huit fonctions arbitraires d'un argument.

Revenons à la considération d'une déformation projective quelconque T de la congruence parabolique L engendrée par la droite $[A_0A_1]$. Pour chaque position de $[A_0A_1]$ on a

$$T_1(x_0A_0+x_1A_1)=x_0A_0'+x_1A_1'=H(x_0A_0+x_1A_1).$$

Supposons que le point $x_0A_0+x_1A_1$ décrit une surface réglée $R\subset L$ qui n'est pas développable, d'où $\omega_2\neq 0$. D'après (3. 15) on a

$$
\begin{aligned}
&H(x_0A_0+x_1A_1)=x_0A_0'+x_1A_1',\\
&Hd(x_0A_0+x_1A_1)=d(x_0A_0'+x_1A_1')-x_1\tau_{10}A_0',\\
&Hd^2(x_0A_0+x_1A_1)=d^2(x_0A_0'+x_1A_1')+(\cdot)A_0'+(\cdot)A_1'-2x_1\omega_2\tau_{10}A_2'.
\end{aligned}
$$

Le plan tangent à la surface R au point $x_0A_0+x_1A_1$ est

$$\varrho=[A_0,\,A_1,\,(x_0\omega_2+\alpha_1x_1\omega_1)A_2+x_1\omega_2A_3]$$

et le plan tangent à la surface T_1R image de R moyennant l'extension ponctuelle T_1 de T est le plan $H\varrho$. Si le point $x_0A_0+x_1A_1$ décrit une courbe asymptotique c (qui n'est pas une génératrice rectiligne de L) de la surface R, alors le point $d^2(x_0A_0+x_1A_1)$ est situé dans le plan ϱ. Pour que la courbe transformée T_1c soit asymptotique sur la surface T_1R il faut et il suffit que le point $d^2(x_0A_0+x_1A_1)$ soit situé dans le plan $H\varrho$ ce qui arrive si et seulement si le point $\omega_2\tau_{10}A_2$ est situé dans ϱ. Or $\omega_2\neq 0$ puisque R n'est pas développable. Donc pour que T_1 transforme *asymptotiquement* R et T_1R il faut et il suffit qu'on ait

(5. 12) $$\tau_{10}=0 \text{ le long de } R.$$

Si T est singulière, on a l'identité (5. 3) et T_1 est dans ce cas totalement asymptotique. Si T est demisingulière on a (5. 10), et (5. 12) est impossible puisque $\omega_2 \neq 0$ le long de R. Si T n'est ni singulière ni demisingulière il existe une et une seule décomposition de L en ∞^1 surfaces réglées non développables transformées asymptotiquement par T_1. Si T est telle que la transformation correspondante t de la surface focale F de L est une déformation projective de F, alors les surfaces réglées $R \subset L$ qui touchent F le long des asymptotiques $\omega_1 = 0$ sont transformées asymptotiquement par T_1, car dans ce cas on a (5. 1) et nous savons que (5. 1) équivaut à (5. 2).

Bibliographie.

[1] E. Cartan, Sur le problème général de déformation (C. R. du Congrès Int. des Math. de Strasbourg en 1920), *Annales de Toulouse* 1921, 397—406.

[2] E. Čech, Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces, *Rendiconti dei Lincei* (6) **8** (1928), 484—486.

[3] G. Fubini et E. Čech, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, *Paris,* 1931.

[4] E. Čech, Géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces V (en russe, avec un court résumé en francais), *Czechoslovak Math. J.* **2** (1952), 167—188.

[5] E. Čech, Déformazioni proiettive nel senso di Fubini e generalizzazioni, *Confer. Sem. Mat. Univ. Bari,* cah. **9** (1955), 12 p.

[6] E. Čech, Deformazioni di congruenze di rette, *Univ. e Politec. Torino, Rend. Sem. Mat.* **14** (1954/55), 55—66.

[7] E. Čech, Transformations développables des congruences de droites, *Czechoslovak Math. J.* **6** (1956), 260—286.

(Reçu le 29 janvier 1959.)