Sur les prolongements des systèmes différentiels extérieurs.

A M. O. Varga à l'occasion de son cinquantième anniversaire.

Par MENDEL HAIMOVICI (Jaşi).

Introduction.

Etant donné un système de Pfaff

$$\theta_j = 0$$

en involution à p formes de Pfaff ω_α indépendantes, CARTAN ([1], p. 114, [2]) a démontré que le prolongement total de ce système est aussi en involution aux mêmes formes de Pfaff indépendantes.

Dans sa démonstration, CARTAN supposait que

$$d\theta_j = \overline{\omega}_{j\alpha} \wedge \omega_\alpha \quad (\operatorname{mod} \theta)$$

et que, par suite, le prolongement est donné par les relations

$$\overline{\omega}_{h\alpha} = \lambda_{h\alpha\beta} \omega_\beta,$$

où les $\lambda_{h\alpha\beta}$ vérifient un certain système de relations algébriques.

Ce théorème a été démontré par M. Y. MATSUSHIMA [3] pour le prolongement total d'un système différentiel quelconque en involution à p pfaffiens indépendants.

Cependant, comme l'observait déjà CARTAN, ses conclusions cessent d'être toujours vraies, si au lieu des prolongements totaux, on considère des prolongements partiels.

Ces prolongements partiels peuvent ne pas être pourvus d'intérêt dans la recherche de certaines propriétés des systèmes en involution. CARTAN même ([1], pp. 115—117) et SCHOUTEN et VAN DER KULK ([4], pp. 461—510) les emploient pour la démonstration de certains théorèmes. Ils ont aussi intérêt dans l'étude des décompositions des systèmes extérieurs, comme nous aurons l'occasion de le montrer ailleurs.

C'est pourquoi nous avons cru utile d'étudier dans quelles conditions le théorème cité plus haut de CARTAN reste vrai pour ces prolongements partiels.

Tout d'abord, pour définir un tel prolongement général, nous définissons le prolongement algébrique (Chap. I) partiel ou total. Après quoi, nous précisons cette définition, en introduisant la notion de prolongement algébrique régulier.

A l'aide de ces notions, nous définissons le prolongement analytique, ou fermé, généré par le prolongement algébrique et enfin nous démontrons qu'un prolongement algébrique régulier donne lieu à un prolongement fermé en involution. Au cours de ces considérations nous donnons une nouvelle démonstration du théorème de CARTAN, pour des systèmes différentiels quelconques, démonstration qui nous semble plus simple.

I. Prolongement algébrique d'un système extérieur.

1. Rappel de quelques notions sur les systèmes extérieurs. Notations. Soit un système algébrique Σ d'équations extérieures en n variables $u_i (i=1, 2, \ldots, n)$

$$(\Sigma) \qquad A_{\gamma \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\nu} u_{\alpha_1} \wedge u_{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge u_{\alpha_\nu} = 0;$$

on dit qu'un plan à k dimensions qui passe par l'origine du système de coordonées (élément plan par l'origine) appartient à ce système ou le vérifie, lorsque ses équations, introduites en (Σ), donnent des identités. Nous désignerons un plan qui appartient à Σ par E_k, ou E'_k ou E^*_k.

Si les coordonnées grassmanniennes du k-plan sont $p_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il appartienne à Σ est

$$(1) \qquad A_{\nu \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\nu} p_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\nu \alpha_{\nu+1} \ldots \alpha_k} = 0$$

pour tout $\nu \leq k$ [1].

Etant donné un E_k appartenant à Σ, cherchons un E_1 qui forme avec E_k un $E_{k+1} = E_1 \times E_k$ appartenant à Σ. Les coordonnées de E_1 doivent vérifier un système d'équations linéaires. Nous appellerons ce système $S(E_k)$. Le rang de $S(E_k)$ est au plus $n-k$, puisqu'il a toujours k solutions indépendantes correspondant à k directions indépendantes contenues dans E_k. Si ce rang est précisément $n-k$, alors la direction E_1 appartient à E_k et l'E_{k+1} n'existe pas. Mais si ce rang est moindre, alors notre problème a des solutions. E_1 en étant une, nous dirons qu'il est *associé* à E_k. Le lieu des éléments linéaires (par l'origine) associés à E_k est l'élément *plan polaire* de E_k. Il sera désigné par $P(E_k)$.

Lorsque, l'élément plan à k dimensions variant dans un certain voisinage de E_k, le rang de $S(E_k)$ ne change pas, nous le désignerons par r_k.

On peut considérer une suite de plans appartenant à Σ

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_q.$$

Une telle suite sera appelée une chaîne. Si les systèmes $S(E_1), S(E_2), \ldots, S(E_q)$ sont respectivement de rangs $r_0, r_1, \ldots, r_q$, nous dirons que *la chaîne est régulière*.

D'après ce que nous venons de dire sur le rang des systèmes S, on aura

$$r_0 < n,\ r_1 < n-1, \ldots, r_q \leqq n-q;$$

si $r_q = n-q$, nous dirons que q est *le genre* du système et nous le désignerons par p.

Un *plan* E_k *de* Σ *est régulier*, lorsqu'il appartient à une chaîne régulière qui va de l'indice 0 à p.

Les quantités $s_0 = r_0, s_1 = r_1 - r_0, \ldots, s_k = r_k - r_{k-1}$ sont *les caractères* du système. On a évidemment

$$s_0 + s_1 + \cdots + s_k = r_k, \quad s_0 + s_1 + \cdots + s_p + p = n.$$

Les premiers membres des équations du système Σ définissent, dans l'anneau des formes extérieures à n variables, un idéal, que nous désignerons par $I(\Sigma)$.

2. Définition du prolongement algébrique. Nous allons ajouter à Σ un système extérieur Σ_1 dans les mêmes variables, dont les coefficients sont des polinômes en M paramètres $\varkappa_a (a = 1, 2, \ldots, M)$, éventuellement liés par un système de relations algébriques

$$G_l(\varkappa) = 0. \tag{1}$$

Nous désignerons par Σ^* ou par $\Sigma + \Sigma_1$ le système formé par les équations de Σ et par celles de Σ_1.

Le système Σ_1 est supposé jouir des propriétés suivantes:

1) Etant donné un élément plan à p dimensions E_p régulier de Σ, la condition pour qu'il appartienne aussi à Σ détermine uniquement les valeurs de $N (\leqq M)$ fonctions rationnelles $\lambda_\varrho(\varkappa_a)$, de manière que le système $\Sigma + \Sigma_1$ devienne bien déterminé par la condition que les λ_ϱ aient ces valeurs. Lorsque l'élément plan à p dimensions varie dans un certain voisinage de E_p, il détermine les mêmes fonctions $\lambda_\varrho(\varkappa_a)$.

2) Etant donné un système de valeurs $\varkappa_a$, vérifiant (1) il existe des éléments plans à p dimensions E_p appartenant à $\Sigma + \Sigma_1$.

Définition I. Le système $\Sigma^* = \Sigma + \Sigma_1$ sera appelé *prolongement algébrique de* Σ.

Tandis que l'idéal $I(\Sigma^*)$ est uniquement défini, il n'en est évidemment pas de même pour l'idéal $I(\Sigma_1)$.

En particulier, on peut supposer qu'entre les équations de Σ_1, on ne peut pas éliminer les paramètres $\varkappa_a$ par des combinaisons linéaires à coefficients indépendants des variables u_i.

Définition II. Si, de quelque manière qu'on choisisse Σ_1, tous ses éléments plans pour un système quelconque de valeurs des $\varkappa_a$ (vérifiant (1)) sont solutions de Σ, nous dirons que Σ^* est un prolongement *quasi-total* de Σ. Si on peut choisir Σ_1, de manière qu'il existe de ses éléments plans qui n'appartiennent pas à Σ, le prolongement sera dit *partiel*.

Définition III. Si toutes les equations de Σ_1 sont des équations de Pfaff, le prolongement sera dit *linéaire*.

Définition IV. Un prolongement quasi-total linéaire, sera dit *total*.

3. Considérons un prolongement total algébrique régulier et soit

$$U_h = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, k)$$

le système Σ_1 (linéaire) correspondant. Tous ses éléments plans à $n-k$ dimensions, appartiennent aussi à Σ. On en déduit aisément que $n-k=p$, c'est-à-dire

$$k = n - p.$$

En supposant que, sur un élément plan à p dimensions régulier de Σ, les variables $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sont indépendantes, on peut résoudre le système Σ_1 pour cet élément plan, par rapport aux variables $u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots, u_n$, que nous nommerons $v_1, v_2, \ldots, v_{n-p}$

$$v_h = \lambda_{h\alpha} u_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, p;\; h = 1, 2, \ldots, n-p). \tag{2}$$

Dans ce cas, la même propriété est vraie aussi pour un voisinage d'éléments plans à p dimensions de Σ.

Les coefficients $\lambda_{h\alpha}$ sont, dans ce voisinage fonctions des paramètres $\varkappa_a$ et sont uniquement déterminés par un E_p de Σ. Ils vérifient un certain nombre de relations (multilinéaires) qui s'obtiennent en remplaçant (2) dans Σ et en annulant les coefficients des formes trouvées. Nous appellerons ce système

$$T_\tau(\lambda) = 0. \tag{T}$$

4. Considérons maintenant un prolongement algébrique quelconque. En introduisant (2) dans Σ_1 et en imposant la condition que ce système soit vérifié identiquement, il résulte un système — soit (σ) — de relations entre les $\varkappa_a$ et les $\lambda_{h\alpha}$. D'après la définition du prolongement algébrique, ces équations dépendent des $\varkappa_\alpha$ par l'intermédiaire d'un nombre fini N de fonctions λ_ϱ, dont les valeurs déterminent Σ_1. Ces λ_ϱ sont déterminés par le système (σ) en fonction des $\lambda_{h\alpha}$.

Si le prolongement algébrique est quasi-total, alors, réciproquement, tous les systèmes de valeurs $\lambda_{h\alpha}$ qui (avec un système quelconque de valeurs des $\varkappa_\alpha$-vérifiant (1)) vérifient (σ), déterminent des E_p de Σ.

5. Soit $E_k (k < p)$ un élément plan régulier de Σ, qui, pour un système de valeurs des paramètres $\varkappa_\alpha$, appartient aussi à Σ_1.

Pour qu'un élément linéaire E_1 soit associé à E_k dans Σ, ses coordonnées doivent vérifier le système $S(E_k)$, de rang r_k (v. no. 1), — pour qu'il soit associé à E_k dans Σ_1 (avec le même système de valeurs des paramètres) ses coordonnées devront vérifier un autre système — soit $S_1(E_k)$. En tout, pour que E_1 soit associé à E_k dans Σ^*, ses coordonnées doivent vérifier un système d'équations linéaires que nous désignons par $S^*(E_k)$.

Supposons que E_k soit régulier aussi pour Σ^* et soit, dans ce cas, $\bar{r}_k$ le rang du système $S^*(E_k)$. Supposons de plus que, lorsque les paramétres $\varkappa$ varient dans un certain voisinage, ce rang ne varie pas et, si cette condition est remplie, désignons $\bar{r}_k$ par r_k^*.

Une chaîne régulière de Σ

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_k,$$

telle que ses éléments plans appartiennent aussi à Σ^* et que les rangs de $S^*(E_1), S^*(E_2), \ldots, S^*(E_k)$ soient respectivement $r_1^*, r_2^*, \ldots, r_k^*$ sera appelée régulière de Σ et Σ^*.

Etant donnée une telle chaîne, si $r_k^* + k < n$, il y a en général par E_k un élément plan E_{k+1} à $k+1$ dimensions, régulier de Σ, appartenant à Σ^* et tel que le rang de $S^*(E_k)$ soit r_{k+1}^*. En effet, si, pour un système de valeurs des $\varkappa_\alpha$ et pour tous les éléments plans à $k+1$ dimensions de Σ^* par E_k, le rang $\bar{r}_{k+1}$ est plus petit que r_{k+1}^*, alors on peut varier aussi peu que l'on veut les valeurs des $\varkappa_\alpha$ de maniére que ce rang atteigne la valeur r_{k+1}^*. Dans ce cas, il faut varier aussi les éléments plans $E_1, E_2, \ldots, E_k$ de la chaîne, de manière qu'elle continue à appartenir à Σ^*. Si cette variation est assez petite, on est sûr que la chaîne reste régulière pour Σ et pour Σ^* et on est arrivé à avoir le rang de $S^*(E_{k+1})$ égal à r_{k+1}^*.

Si maintenant tous les éléments plans à $k+1$ dimensions de Σ^* passant par E_k sont singuliers pour Σ, prenons par E_k un E'_{k+1} régulier de Σ, voisin d'un élément plan E_{k+1} régulier de Σ^* et contenant E_k. En variant les paramètres $\varkappa_\alpha$, on arrive à former le système Σ^* tel qu'il contienne l'élément E'_{k+1}. Il faut, comme plus haut, varier aussi les éléments de la chaîne, de manière que cela n'affecte pas sa régularité pour Σ et pour Σ^*. E'_{k+1} est régulier pour Σ. S'il n'est pas régulier pour Σ^*, on peut en prendre un autre E''_{k+1}, voisin de E'_{k+1}, régulier pour Σ^*. Le rang de $S^*(E^*_{k+1})$ est r^*_{k+1}, puisque le système de valeurs des paramètres est voisin de celui pris antérieurement, pour lequel ce rang était r^*_{k+1}.

Nous allons désigner par ϱ_k la différence $r^*_k - r_k \cdot \varrho_k$ est le nombre d'équations de $S_1(E_k)$ indépendantes entre elles et de $S(E_k)$.

On voit que la suite des r^*_k est non décroissante, et peut être prolongée jusqu'à un indice q, tel que

$$r^*_q + q = n. \tag{3}$$

L'élément plan E_q n'admet pas d'élément linéaire E_1 associé dans Σ^*, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'élément plan E_{q+1} contenant E_q et appartenant à Σ^*.

Définition V. Si, quelles que soient les valeurs des paramètres $\varkappa_a$, on a $q = p$, nous dirons que le prolongement est *algébriquement régulier*.

6. *Un prolongement total est algébriquement régulier*. Il est, en effet, clair que le genre du système (2) est égal à p. Or, en vertu de (2), les équations de Σ sont identiquement vérifiées; donc on a

$$r^*_k = n - p < n - k \tag{4}$$

ce qui prouve la proposition.

7. Soit donné un prolongement algébrique régulier Σ^* de Σ. On a

$$r^*_p + p = r_p + \varrho_p + p = n. \tag{5}$$

d'où on tire

$$\varrho_p = 0.$$

Les caractères de Σ^* sont en général

$$s^*_0 = r^*_0, \quad s^*_1 = r^*_1 - r^*_0, \ldots, s^*_p = r^*_p - r^*_{p-1}$$

et par suite

$$s^*_0 = s_0 + \sigma_0, \quad s^*_1 = s_1 + \sigma_1, \ldots, s^*_p = s_p + \sigma_p,$$

où nous avons posé

$$\sigma_0 = \varrho_0, \quad \sigma_1 = \varrho_1 - \varrho_0, \ldots, \sigma_p = \varrho_p - \varrho_{p-1}.$$

II. Prolongement fermé d'un système différentiel extérieur.

1. Considérons maintenant un système différentiel extérieur fermé Σ, de genre p. Nous supposons que les coefficients sont des fonctions analytiques dans le domaine où nous considérons ce système. Cette supposition est justifiée par le fait que les théorèmes d'existence de Cartan sont démontrés seulement dans cette hypothèse. En réalité, nous aurions pu supposer que les coefficients sont de classe C^2, puisque nous n'utilisons que les dérivées du 2-e ordre.

Observons encore que les propriétés, que nous étudions, ont un caractère local.

Au système Σ nous pouvons appliquer les considérations algébriques du chapitre précédent et avec les mêmes notations. Un élément plan de Σ est appelé *élément plan integral.*

DÉFINITION VI. La fermeture Σ' du système Σ^* est appelée *le prolongement fermé* ou, plus simplement, *le prolongement* de Σ. Ce prolongement sera *partiel, quasi-total,* ou *total* selon que Σ^* est resp. un prolongement algébrique partiel, quasi-total ou total.

Nous pouvons désigner les variables z_a par $z_\tau (\tau = n+1, n+2, \ldots)$.

DÉFINITION VII. Un élément plan intégral E'_k de Σ' sera appelé *prolongement de l'élément plan intégral E_k* de Σ si les coordonnées grassmanniennes, dont tous les indices sont compris entre 1 et n, sont les coordonnées grassmanniennes de E_k. Dans ce cas E_k sera appelé *projection de E'_k*.

DÉFINITION VIII. Si tout élément plan E_k intégral régulier de Σ a un prolongement dans Σ', nous disons que ce prolongement est *compatible.*

DÉFINITION IX. Si les éléments plans intégraux de Σ, appartenant à une chaîne régulière [1, 4, 5]

$$P = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_p, \tag{7}$$

ont dans Σ' des prolongements appartenant à une chaîne régulière

$$P'_0 = E'_0 \subset E'_1 \subset \cdots \subset E'_p, \tag{8}$$

nous disons que le prolongement est *régulier.*

2. Nous démontrerons maintenant le

Théorème. *Un prolongement total est régulier.*

Ce théorème a été démontré par CARTAN [2] pour les systèmes du 2-e degré formés par la fermeture d'un système de Pfaff, dans le cas où les équations du 2-e degré peuvent être mis sous la forme

$$A_{\varrho h \alpha}\, \overline{\omega}_h \wedge \omega_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, p;\ h = 1, 2, \ldots, n-p-s_0),$$

où s_0 est le nombre d'équations de Pfaff indépendantes, qui appartiennent au système, $\overline{\omega}_h, \omega_\alpha$ sont des formes de Pfaff indépendantes et sur un élément plan intégral régulier (d'un certain voisinage d'éléments plans intégraux réguliers) les formes ω_α sont indépendantes entre elles. M. Y. MATSUSHIMA a démontré le même théorème en général. Nous donnerons, dans ce qui suit, une autre démonstration — qui nous semble plus simple — du même théorème général.

A cette fin, considérons d'abord un point $P = E_0$, intégral régulier de Σ. Il admet un prolongement $P' = E_0'$. D'après la définition du prolongement algébrique (no. 2 chap. I) — et d'après la proposition démontrée au no. 6 chap. I, il suit que, au point P, le nombre d'équations linéaires indépendantes de Σ^*, qui est en même temps le nombre d'équations linéaires indépendantes de Σ', est $s_0^* = s_0 + \sigma_0 = n - p$.

Soit maintenant E_k un élément plan intégral régulier de Σ. Il fait partie d'une chaîne régulière (7) d'éléments plans intégraux réguliers de Σ. Supposons que les prolongements $E_0', E_1', \ldots, E_k'$ des éléments plans $E_0, E_1, \ldots, E_k$ forment une chaîne

$$E_0' \subset E_1' \subset \cdots \subset E_k' \tag{9}$$

et qu'un élément plan $E_l'(0 \leqq l \leqq k)$ de cette chaîne a la propriété que son élément plan polaire a précisément $n - \nu_l'$ dimensions, où nous avons désigné par r_l' le nombre d'équations linéaires indépendantes auxquelles doit satisfaire un élément linéaire $E_1'^{(k+1)}$ pour être associé à E_k' — étant supposé que ce nombre reste constant quand E_k' varie dans un voisinage d'un élément plan intégral.

Pour que les éléments plans de la chaîne (9) soient réguliers, il faut encore démontrer que cette chaîne peut être prolongée jusqu'à l'indice p, avec les mêmes propriétés.

3. Dans ce but, considérons le prolongement total algébrique $\overline{\Sigma}^*$ qui génère le prolongement total fermé $\overline{\Sigma}'$

$$\varphi_h = \overline{\omega}_h - \lambda_{h\alpha}\omega_\alpha = 0. \tag{10}$$

Supposons que la chaîne (7) soit déterminée par les éléments linéaires $E_1^{(1)}, E_1^{(2)}, \ldots, E^{(p)}$ déterminés resp. par les systèmes de différentielles $d_1, d_2, \ldots, d_p$, avec

$$\omega_\alpha(d_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \tag{11}$$

de manière que

$$E_1 = E_1^{(1)}, E_2 = E_1^{(1)} \times E_1^{(2)}, \ldots, E_p = E_{p-1} \times E_1^{(p)}.$$

Les éléments plans de la chaîne (9) son déterminés respectivement par une suite correspondante d'éléments linéaires $E_1'^{(1)}, E_1'^{(2)}, \ldots, E_1'^{(k)}$ qui ont $E_1^{(1)}, E_1^{(2)}, \ldots, E_1^{(k)}$ comme projections. Les coordonnées d'un $E_1'^{(l)}$ $(0 \leqq l \leqq k)$ sont, outre $\omega_\alpha(d_l), \overline{\omega}_h(d_l)$, encore un système d'accroissements $d_l\lambda_{h\alpha}$. Pour trouver un élément linéaire $E_1'^{(k+1)}$, associé à E_k', nous avons d'abord a satisfaire aux équations de Σ jusqu'au degré $k+1$. A tel but, nous pouvons prendre $E_1^{(k+1)}$ comme nous avons fait plus haut pour les éléments de la chaîne (7). Ensuite, il faut que soit vérifié le système

$$d\varphi_h = -d\lambda_{h\alpha} \wedge \omega_\alpha - \lambda_{h\alpha} d\omega_\alpha + d\bar{\omega}_h = 0, \tag{12}$$

qui ferme le système Σ^*. En posant $d_{k+1}\lambda_{h\alpha} = \delta\lambda_{h\alpha}$ et, en général, $\delta = d_{k+1}$, nous avons de (12), en tenant compte de (11),

$$\delta\lambda_{h\beta} - d_\beta\lambda_{h,\,k+1} + \lambda_{h\alpha} d\omega_\alpha(\delta, d_\beta) - d\bar{\omega}_h(\delta, d_\beta) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \ldots, k). \tag{13}$$

Les valeurs $\delta\lambda_{h\beta}$ en résultent pour $\beta = 1, 2, \ldots, k$. Les valeurs des mêmes différentielles pour $\beta = h+1, h+2, \ldots,$ restent indéterminées.

4. Mais, outre (12), les $\delta\lambda_{h\beta}$ doivent encore vérifier un système d'équations, qui résulte en différentiant (T)

$$\delta T_\tau = 0. \tag{T'}$$

Nous allons démontrer que ce système est identiquement vérifié, si l'on prend $\delta\lambda_{h\beta}(\beta = 1, 2, \ldots, k)$ comme nous l'avons montré plus haut et $\delta\lambda_{h,\,k+1}$, $\delta\lambda_{h,\,k+2}, \ldots, \delta\lambda_{hp}$ arbitrairement (sauf la restriction de vérifier (T')).

A ce but, observons les équations de Σ, soit

$$F_\nu(\bar{\omega}, \omega) = 0.$$

En y remplaçant $\bar{\omega}_h$ des relations

$$\varphi_h = \bar{\omega}_h - \lambda_{h\alpha}\omega_\alpha,$$

on trouve le même système sous la forme

$$K_\nu(\varphi, \omega) = 0. \tag{14}$$

K_ν sont des formes extérieures en φ, ω. Les coefficients des termes qui ne contiennent pas φ, mais seulement ω, s'annullent en vertu de (T) et c'est précisément leur annulation qui donne les relations (T), car elle exprime que les relations (14) sont vérifiées en vertu du système $\bar{\Sigma}^*$, c'est-à-dire (10).

Mais, Σ étant un système fermé, cela veut dire qu'en vertu des mêmes relations, on a

$$dK_\nu = 0.$$

En supposant K_ν du degré γ, écrivons

$$K_\nu = A_{\nu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\gamma}\omega_{\alpha_1} \wedge \omega_{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge \omega_{\alpha_\gamma} + A_{\nu h_1\alpha_2\ldots\alpha_\gamma}\varphi_{h_1} \wedge \omega_{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge \omega_{\alpha_\gamma} + \ldots,$$

où les termes non écrits contiennent au moins deux facteurs φ. Le système $A_{\nu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\gamma} = 0$ est équivalent au système (T). On voit, par suite de (11), que les relations qui résultent d'ici pour $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\gamma \leqq k$ sont les relations (T) pour $\lambda_{h\beta}$ avec $\beta \leqq k$.

On déduit immédiatement, en vertu des mêmes relations (T),

$$dK_\nu = dA_{\nu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\gamma} \wedge \omega_{\alpha_1} \wedge \omega_{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge \omega_{\alpha_\gamma} + \\ + A_{\nu h_1\alpha_2\ldots\alpha_\gamma} d\varphi_{h_1} \wedge \omega_{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge \omega_{\alpha_\gamma} \pmod{\varphi_h}. \tag{15}$$

Supposons maintenant $\gamma \leqq k$ et qu'on ait pris (15) pour $\gamma+1$ systèmes de différentielles dont un est δ et les autres correspondent à γ des éléments linéaires $E_1'^{(1)}, E_1'^{(2)}, \ldots, E_1'^{(k)}$. En tenant compte du fait que E_k' est un élément plan intégral et que $E_1'(\delta)$ a été pris de manière qu'on ait (12), il suit

$$dA_{\nu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\gamma} \wedge \omega_{\alpha_1} \wedge \omega_{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge \omega_{\alpha_\gamma} = 0.$$

Remarquons qu'on a

$$d_1 A_{\nu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\gamma} = \cdots = d_k A_{\nu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\gamma} = 0,$$

car les éléments linéaires $E_1'^{(1)}, E_1'^{(2)}, \ldots, E_1'^{(k)}$ sont contenus dans E_k' et celui-ci est élément plan intégral de Σ'. Vu (11), il résulte

$$\delta A_{\nu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\gamma} = 0 \quad (\alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_\gamma \leqq k).$$

Ces équations forment un système équivalent à celui qui s'obtient de (T′) pour $\delta\lambda_{h\beta}$ ($\beta \leqq k$) et ainsi notre affirmation est démontrée.

Puisqu'elle est vraie pour $k=0$, il suit qu'elle est vraie pour tout $0 \leqq k \leqq p-1$ et ainsi le théorème est démontré.

5. Faisons encore l'observation suivante: Le système (13) détermine uniquement $\delta\lambda_{h\beta}$ pour $\beta = 1, 2, \ldots, k$. Pour trouver $\delta\lambda_{h,k+1}, \delta\lambda_{h,k+2,\ldots}$, nous avons à utiliser les relations (T′) restantes. Celles-ci nous offrent pour $\delta\lambda_{h,k+1}, \delta\lambda_{h,k+2,\ldots}$ un système linéaire du même rang que celui du système offert par (T) pour $\lambda_{h,k+1}, \lambda_{h,k+2,\ldots}$.

Si l'élément plan E_k' est régulier, alors ce rang (qui est le nombre d'équations indépendantes que doivent vérifier les coordonnées d'un élément plan intégral à p dimensions de Σ contenant E_k) est le même pour tout élément intégral à k dimensions, voisin à E_k. On peut donc affirmer que le rang du système d'équations, que doivent vérifier $\delta\lambda_{h,k+1}, \delta\lambda_{h,k+2\ldots}$ est le même quand E_k varie dans le même voisinage. Il suit le

Théorème. *Le prolongement total d'un élément plan intégral régulier E_k, est régulier.*

6. Considérons maintenant un prolongement quelconque Σ' de Σ. Nous supposons que Σ' a été obtenu comme fermeture d'un prolongement algébrique régulier Σ^* de Σ.

Si, sur un élément plan régulier à p dimensions de Σ, les pfaffiens $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ sont indépendants, alors, d'aprés ce qui a été établi antérieurement, le prolongement total $\bar{\Sigma}'$ existe, et on sait qu'il est régulier et qu'on peut l'obtenir à partir du prolongement algébrique (10). Soient

$$L_\mu(\bar{\omega}, \omega, \lambda_\varrho) = 0 \tag{16}$$

les équations Σ_1, qu'on ajoute à Σ pour former le prolongement algébrique Σ^*. Les L_μ sont des formes différentielles extérieures en ω, $\bar{\omega}$, dont les coefficients dépendent des λ_ϱ. Si nous remplaçons, dans (16), les formes $\bar{\omega}$ par φ comme nous l'avons fait au no. 10, nous trouvons (16) sous la forme

$$\bar{L}_\mu(\varphi, \omega, \lambda_\varrho) = 0. \tag{16'}$$

Dans les coefficients des formes L, entrent encore les paramètres $\lambda_{h\alpha}$, dont on sait qu'ils vérifient le système (T). En vertu des relations (10), il faut que soient vérifiées (16'), ce qui impose un système de conditions, qui (avec (1)) déterminent uniquement les λ_ϱ en fonction des $\lambda_{h\alpha}$ (et, naturellement, des x)

$$\lambda_\varrho = \lambda_\varrho(\lambda_{h\alpha}). \tag{17}$$

7. Pour examiner si le prolongement Σ' est régulier, il faut considérer les équations

$$dL_\mu = 0 \tag{18}$$

ou, ce qui revient au même,

$$d\bar{L}_\mu(\varphi, \omega, \lambda_\varrho) = 0. \tag{18'}$$

Evidemment, ces dernières équations ne dépendent de $d\lambda_{h\alpha}$ qu'en apparence, car elles sont identiques aux équations (18) qui n'en dépendent pas.

En remplaçant dans (18') les coordonnées d'un élément plan $\bar{E}_k'$ intégral du prolongement total $\bar{\Sigma}'$ — et en tenant compte du fait que les λ_ϱ sont donnés par (17) et

$$d\lambda_\varrho = \frac{\partial \lambda_\varrho}{\partial \lambda_{h\alpha}} d\lambda_{h\alpha} + \frac{\partial \lambda_\varrho}{\partial x_i} dx_i, \tag{17'}$$

il est évident que les (18') sont vérifiées, comme le sont d'ailleurs (16) et (18).

8. Soit Σ^* un prolongement algébrique régulier de Σ et E_k un élément plan intégral régulier de Σ et Σ^* (v. no. 5, chap. I). Nous supposons que Σ' est la fermeture de Σ^*. Il y a un système de valeurs λ_ϱ tel que E_k soit un élément plan intégral régulier de Σ^*. Les λ_ϱ étant remplacés par ce système de valeurs, il existe par E_k un E_p intégral régulier de Σ^*. Cet E_p est défini par un système de valeurs $\lambda_{h\alpha}$ vérifiant le système (T).

L'élément plan E_k' peut être défini par k éléments linéaires $E_1'^{(\gamma)}(d_\gamma)$ ($\gamma = 1, 2, \ldots, k$) se projetant respectivement sur les k éléments linéaires $E_1^{(\gamma)}(d_\gamma)$ de Σ. Pour trouver les $E_1'^{(\gamma)}(d_\gamma)$, il est nécessaire de connaître les différentielles $d_\gamma \lambda_\varrho$. Celles-ci peuvent être données de la manière suivante. Considérons les éléments linéaires $\bar{E}_1'^{(\gamma)}(d_\gamma)$ — prolongements de $E_1^{(\gamma)}(d_\gamma)$ dans le prolongement total $\bar{\Sigma}'$. Cela veut dire considérer aussi les différentielles $d_\gamma \lambda_{h\alpha}$, correspondantes à ces prolongements totaux. Pour $d_\gamma \lambda_\varrho$ on peut alors prendre les expressions données par (17'). Avec cela, on obtient en effet un élément plan E_k' intégral de Σ', comme il résulte des considérations faites à la fin du no. précédent.

Donc un élément plan E_k intégral régulier de Σ a un prolongement E_k' dans Σ'.

Supposons maintenant que $l'E_k'$ trouvé de cette manière, fasse partie d'une chaîne d'éléments plan intégraux

$$E_0' \subset E_1' \subset \cdots \subset E_k'$$

qui ont la propriété que l'élément plan polaire de l'un d'entre eux, E_l', a $n - r_l'$ dimensions. Cela veut dire que la dimension du plan polaire ne varie pas, lorsqu'on remplace E_l' par un autre élément plan d'un certain voisinage.

Par cette méthode, on peut trouver un élément linéaire $E_1'(\delta)$ associé à E_k' — dont la projection est un E_1 associé à E_k — de manière que l'élément plan $E_{k+1}' = E_1' \times E_k'$ jouisse des mêmes propriétés. En effet, on n'a qu'à trouver d'abord un élément linéaire $\bar{E}_1'(\delta)$ associé à $\bar{E}_k'$ dans $\bar{\Sigma}'$; on trouve ainsi un $\bar{E}_{k+1}'$ prolongement d'un E_{k+1} de Σ, contenant E_k. L'$E_1'(\delta)$ trouvé comme plus haut en déterminant les $\delta\lambda_\varrho$, à l'aide des $\delta\lambda_{h\alpha}$ correspondants à $\bar{E}_1'$, répond à notre question.

9. Mais on peut montrer qu'inversement, étant donné un E_1' associé à E_k', il peut être trouvé par la même méthode.

En effet, si E_k' est donné, cela veut dire qu'on connaît les différentielles $d_\gamma \varkappa_i$, $d_\gamma \lambda_\varrho$ et par hypothèse elles s'expriment comme fonctions des $d_\gamma \varkappa_i, d_\gamma \lambda_{h\alpha}$ par l'intermédiaire de (17'). Si l'on connaît encore $E_1'(\delta)$ associé à E_k', cela veut dire qu'on connaît $\delta\varkappa_i, \delta\lambda_\varrho$ et, pour l'exprimer à l'aide des (17'), il faut encore connaître les $\delta\lambda_{h\alpha}$ vérifiant (T') et les relations qui expriment que $\bar{E}_1'(\delta)$ est associé à $\bar{E}_k'$ dans $\bar{\Sigma}'$.

Partons de (18) et observons que, cette relation étant vérifiée sur E_{k+1}', (18') l'est aussi, sans que cela implique d'autres conditions pour $\lambda_{h\alpha}$ ou leurs différentielles. Les formes $\bar{L}_\mu$ ont l'expression

$$\begin{aligned} \bar{L}_\mu = {} & B_{\mu h_1 h_2 \ldots h_\gamma} \varphi_{h_1} \wedge \varphi_{h_2} \wedge \cdots \wedge \varphi_{h_\gamma} + \\ & + B_{\mu h_1 h_2 \ldots h_{\gamma-1} \beta_\gamma} \varphi_{h_1} \wedge \varphi_{h_2} \wedge \cdots \wedge \varphi_{h_{\gamma-1}} \wedge \omega_{\beta_\gamma} + \cdots \\ & \cdots + B_{\mu h_1 \beta_2 \ldots \beta_\gamma} \varphi_{h_1} \wedge \omega_{\beta_2} \wedge \cdots \wedge \omega_{\beta_\gamma} + B_{\mu \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_\gamma} \omega_{\beta_1} \wedge \omega_{\beta_2} \wedge \cdots \wedge \omega_{\beta_\gamma}, \end{aligned} \tag{19}$$

quioqu'elles ne dépendent effectivement que des λ_ϱ et non des $\lambda_{h\alpha}$. Si on impose, à ces dernières, la condition de vérifier (T) et $\varphi_h = 0$ et à leurs différentielles la condition de vérifier les équations $d\varphi_h = 0$, il résulte de (19) et (18′)

$$d\bar{L} = dB_{\mu\beta_1\beta_2\ldots\beta_\gamma} \wedge \omega_{\beta_1} \wedge \omega_{\beta_2} \wedge \cdots \wedge \omega_{\beta_\gamma}.$$

Vu que

$$d_1 B_{\mu\beta_1\beta_2\ldots\beta_\gamma} = d_2 B_{\mu\beta_1\beta_2\ldots\beta_\gamma} = \cdots = d_k B_{\mu\beta_1\beta_2\ldots\beta_\gamma} = 0,$$

il résulte de (19), par un raisonnement analogue à celui du no. 4, que

$$\delta B_{\mu\beta_1\beta_2\ldots\beta_\gamma} = 0. \tag{20}$$

Les relations

$$B_{\mu\beta_1\beta_2\ldots\beta_\gamma} = 0 \tag{21}$$

étant équivalentes aux (17), il suit que les (20) sont équivalentes aux (17′).

Les systèmes (21) et (T) étant, avec nos hypothèses, compatibles en $\lambda_{h,k+1}, \lambda_{h,k+2}, \ldots, \lambda_{h,p}$, il suit que (20) et (T′) sont compatibles en $\delta\lambda_{h,k+1}$, $\delta\lambda_{h,k+2}, \ldots, \delta\lambda_{h,p}$, les $\delta\lambda_{h,\gamma}$ ($\gamma = 1, 2, \ldots, k$) étant donnés par (13).

Avec cela, notre affirmation est démontrée. Cela veut dire que l'$\bar{E}'_{k+1}$, trouvé par la méthode décrite au no. 8, est le plus général qui satisfasse aux conditions requises.

10. Il résulte de ces considérations qu'on peut trouver par E'_k un prolongement E'_{k+1} de E_{k+1}, qui constitue une continuation de la chaîne $E'_0 \subset E'_1 \subset \cdots \subset E'_k$ et qui jouisse de la propriété que le système $S'(E'_{k+1})$ que doit vérifier un élément linéaire, pour être intégral et associé à lui, ait le même rang que pour tout élément plan integral à $k+1$ dimensions voisin.

On en conclut le

Théorème. *Etant donné le système Σ de genre p, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un prolongement soit régulier est que ce prolongement soit généré par un prolongement algébrique régulier.*

Bibliographie.

[1] E. Cartan, Les systèmes différentiels extérieures et leurs applications géométriques, *Paris,* 1945.

[2] E. Cartan, Sur la structure des groupes infinis. *Oeuvres Complètes,* Partie II, **2**, 571—573, *Annales Éc. Norm.* **21** (1904), 153–175.

[3] Y. Matsushima, On a theorem concerning the prolongation of a differential system, *Nagoya Math. J.* **6** (1953), 1—17.

[4] I. J. Schouten et W. v. d. Kulk, Pfaff's Systems and its generalisations, *Oxford,* 1949.

[5] E. Kähler, Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, *Leipzig,* 1934.

(Reçu le 27 avril 1959.)