Sur la décomposabilité et les groupes d'holonomie des espaces A_n.

Hommage à M. O. Varga à l'occasion de son cinquantième anniversaire.

Par G. VRANCEANU (Bucarest).

Nous allons donner ici quelques théorèmes relatifs à la décomposabilité d'un espace à connexion affine A_n, dans le produit direct d'un espace A_m et d'un espace A_{n-m}, qui généralisent et complètent un théorème de FICKEN,[1]) et nous allons appliquer les résultats aux groupes d'holonomie d'un espace A_n décomposable.

I.

Étant donnés deux espaces $A_m(x^1, \ldots, x^m)$ et $A_{n-m}(x^{m+1}, \ldots, x^n)$ on peut considérer l'espace $A_n(x^1, \ldots, x^n) = A_m \times A_{n-m}$ que l'on peut appeller suivant FICKEN, l'espace produit de A_m et A_{n-m}.

Inversement, étant donné un espace A_n on peut dire que cet espace est le produit $A_m \times A_{n-m}$ d'un espace A_m et un espace A_{n-m} s'il est possible de choisir un système de coordonnées dans A_n de façon que les seules composantes non nulles de la connexion Γ^i_{jk} soient celles pour lesquelles i, j, k sont plus petits ou égaux à m, ou plus grands que m et que les composantes $\Gamma^i_{jk}(i, j, k \leqq m)$ soient fonctions seulement des variables $x^1, \ldots, x^m$, tandis que $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(\alpha, \beta, \gamma > m)$ sont fonctions seulement des variables $x^{m+1}, \ldots, x^n$. Nous dirons que le produit $A_m \times A_{n-m}$ est un produit direct, si les espaces A_m et A_{n-m} sont des espaces invariants dans A_n et en ce cas nous dirons aussi que l'espace A_n est décomposable dans A_m et A_{n-m}.

Il est évident donc que dans le cas où A_n est décomposable en A_m et A_{n-m} le groupe de mouvement de l'espace A_n est le produit direct des groupes de mouvement des espaces A_m et A_{n-m}. Ficken ne fait pas distinction entre le produit direct ou non, mais considère le problème de voir dans

[1]) F. A. FICKEN, The Riemannian and affine differential geometry of product spaces, *Ann. of Math.*, **40** (1939), 892—913.

quelles conditions le groupe de mouvement du produit $A_m \times A_{n-m}$ est produit direct des groupes de mouvement de A_m et A_{n-m} et démontre le théorème suivant:

Si les espaces A_m et A_{n-m} n'ont pas des champs parallels, le groupe de mouvement de l'espace $A_n = A_m \times A_{n-m}$, est le produit direct des groupes de mouvement de l'espace A_m et de l'espace A_{n-m}.

La démonstration de Ficken est basée sur l'utilisation des transformations infinitésimales du groupe de mouvement de l'espace A_n. Nous allons utiliser ici une méthode directe. Pour cela, observons que la propriété de l'espace A_n d'avoir les composantes Γ^i_{jk} nulles dès qu'un des indices est plus petit ou égal à m et un autre est plus grand que m, et que Γ^i_{jk} et $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ sont respectivement fonctions de $x^1, \ldots, x^m$ et de $x^{m+1}, \ldots, x^n$ se transmet aussi aux composantes du tenseur de courbure[2])

$$(1) \qquad \Gamma^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jl} - \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{jk}$$

et aux tenseurs dérivés de courbure de différents ordres. Considérons alors la matrice formée par le tenseur de courbure et les tenseurs dérivés

$$(2) \qquad M = (\Gamma^i_{jkl},\ \Gamma^i_{jkl,p},\ \ldots)$$

et indiquons avec M^i cette matrice quand i est l'indice des lignes et $j, k, l, p, \ldots$, ceux des colonnes et avec M_j quand j est l'indice des lignes et $i, k, l, p, \ldots$ ceux des colonnes.

Cela dit, nous allons démontrer le théorème suivant:

Si l'espace A_n est égal au produit $A_m \times A_{n-m}$ et si les matrices M^i et M_j sont de rang maximum m, l'espace A_n est décomposable.

En effet, considèrons une transformation quelconque de variables

$$(3) \qquad x'^i = x'^i(x^1, \ldots, x^n), \quad x'^\alpha = x'^\alpha(x^1, \ldots, x^n)$$

et demandons-nous dans quelles conditions cette transformation conserve la propriété de l'espace A_n d'être un produit $A_m \times A_{n-m}$.

On sait que par une transformation de variables, nous avons

$$(4) \qquad \Gamma'^i_{rst} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} \frac{\partial x'^t}{\partial x^l} = \Gamma^s_{jkl} \frac{\partial x'^i}{\partial x^s}$$

où les indices prennent des valeurs de 1 à n. De même nous avons des formules analogues pour les tenseurs dérivés de courbure.

---

[2]) Certains auteurs utilisent les Γ^i_{jk} changés de signe.

Dans notre cas, le premier membre de la formule (4) est identiquement nul si $i = \alpha > m$, donc nous avons

$$\Gamma^{s}_{jkl} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{s}} = 0 \qquad (j, k, l \leqq m). \tag{4'}$$

De même, nous avons des formules analogues pour les tenseurs dérivés de courbure

$$\Gamma^{s}_{jkl,\,p} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{s}} = 0, \ldots, \qquad (j, k, l, p, s \leqq m) \tag{4''}$$

ce qui nous dit, dans le cas où la matrice M^{i} est de rang m que les x'^{α} ne dépendent pas des $x^{i} (i \leqq m)$, donc que l'espace A_{n-m} est un invariant du problème. Supposons maintenant que dans les formules (4) un des indices j, k, l par exemple $j > m$. Nous avons alors

$$\Gamma'^{i}_{rst} \frac{\partial x'^{r}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{s}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x'^{t}}{\partial x^{l}} = 0 \qquad (\alpha > m;\ i, k, l \leqq m) \tag{5}$$

où les indices r, s, t varient seulement de 1 à m. En tenant compte de la formule (4) pour des indices $i, j, k, l \leqq m$ et du fait que le déterminant fonctionnel $\left| \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{j}} \right|$ est différent de zéro, cette formule s'écrit

$$\Gamma^{i}_{skl} \frac{\partial x^{s}}{\partial x'^{r}} \frac{\partial x'^{r}}{\partial x^{\alpha}} = 0.$$

Comme nous avons

$$\frac{\partial x^{s}}{\partial x'^{r}} \frac{\partial x'^{r}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial x^{s}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} = 0,$$

il en résulte que les équations (5) sont équivalentes aux équations

$$\Gamma^{i}_{skl} \frac{\partial x^{s}}{\partial x'^{\lambda}} = 0 \tag{5'}$$

et que nous avons de même les équations formées avec les tenseurs dérivés de courbure

$$\Gamma^{i}_{skl,\,p} \frac{\partial x^{s}}{\partial x'^{\lambda}} = 0, \ldots. \tag{5''}$$

Les équations (5') et (5'') nous disent que dans le cas où la matrice M_{j} est de rang m, les variables x^{s} ne dépendent pas de x'^{λ}, donc que l'espace A_{m} est invariant dans A_{n} et le théorème est démontré.

Considérons maintenant les matrices M^α, M_β formées avec les tenseurs $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma\delta}, \Gamma^\alpha_{\beta\gamma\delta,\varrho_1} \ldots$ et considérons les équations correspondantes aux équations (4′), (4″), (5′), (5″).

$$\Gamma^\varrho_{\lambda\beta\gamma}\frac{\partial x'^i}{\partial x^\varrho}=0, \quad \Gamma^\varrho_{\lambda\beta\gamma,\delta}\frac{\partial x'^i}{\partial x^\varrho}=0, \ldots$$

$$\Gamma^\alpha_{\varrho\beta\gamma}\frac{\partial x^\varrho}{\partial x'^i}=0, \quad \Gamma^\alpha_{\varrho\beta\gamma,\delta}\frac{\partial x^\varrho}{\partial x'^i}=0, \ldots .$$

Il en résulte que si la matrice M^α est de rang maximum $n-m$, l'espace A_m est un espace invariant dans A_n, tandis que si M_β est de rang $n-m$, l'espace A_{n-m} est un espace invariant. Donc l'espace A_n est décomposable aussi si les M^α et M_β sont de rang $n-m$, ce qui était evidemment à cause de la symétre, mais il en résulte aussi qu'il est décomposable si M^i et M^α sont de rang maximum m et $n-m$, ou bien si M_j et M_β ont cette propriété.

Pour démontrer le théorème de Ficken il suffit d'observer que si l'on considère les transports parallels

$$dV^i=\Gamma^i_{jk}V^j dx^k, \quad dV_i=-\Gamma^j_{ik}V_j dx^k,$$

ces transports n'ont pas de champs parallels de vecteurs contrevariants dans A_m si M_j est de rang m et n'ont pas des champs de vecteurs covariants si M^i est de rang m.

Les considérations faites plus haut montrent que l'on peut compléter le théorème de Ficken sous la forme suivante:

Le groupe de mouvement de l'espace A_n est le produit direct des groupes de A_m et A_{n-m} s'il n'existe pas dans A_m et dans A_{n-m} des champs de vecteurs parallels contrevariants (ou covariants).

On peut maintenant observer que toutes ces conditions sont suffisantes pour que le groupe de mouvement de l'espace $A_n=A_m\times A_{n-m}$ soit le produit direct des groupes de mouvement des espaces A_m et A_{n-m}, mais elles ne sont pas nécessaires. En effet, en général le groupe de mouvement d'un espace $A_n=A_m\times A_{n-m}$ est l'identité, même si les matrices $M^i, M_j, M^\alpha, M_\beta$ ne sont pas de rang maximum, donc dans ce cas les groupes de mouvement de A_m et de A_{n-m} sont aussi les groupes identités, et le produit $A_m\times A_{n-m}$ est un produit direct.

Comme un exemple, on peut considérer le produit $A_4=A_2(x^1,x^2)\times$ $\times B_2(x^3,x^4)$ de deux espaces à deux dimensions dont les seules composantes non nulles de la connexion soient Γ^2_{22}, Γ^4_{44} tandis que Γ^2_{22} est une fonction quelconque des variables x^1, x^2 et Γ^4_{44} une fonction quelconque des variables x^3, x^4, le groupe de l'espace A_4 est l'identité et par conséquent l'espace A_4

est décomposable quoique dans ce cas toutes les matrices M^i, M_j, M^α, M_β sont de rang 1, donc ne sont pas de rang maximum.

Supposons maintenant que l'espace A_n est décomposable dans A_m et dans un espace euclidien E_{n-m}. Donc son groupe de mouvement est le produit direct des groupes de mouvement de A_m et de E_{n-m}. Comme le groupe de ce dernier s'écrit

$$x'^\alpha = a^\alpha_\beta x^\beta + a^\alpha$$

et contient par conséquent $(n-m)^2+n-m$ paramètres, il en résulte que le groupe de mouvement d'un espace A_n décomposable en A_m et E_{n-m} est au moins à $(n-m)^2+n-m$ paramètres et au plus à $(n-m)^2+n-m+m^2$ en tenant compte de ce que le groupe de mouvement de l'espace A_m est au plus à m^2 paramètres.

Si l'espace $A_n = A_m \times E_{n-m}$ n'est pas décomposable, et si E_{n-m} n'est pas un invariant de l'espace A_n, le groupe de A_n possède plus que $(n-m)^2+$ $+n-m$ paramètres.

II.

Nous allons démontrer maintenant une généralisation des théorèmes précédents. En effet, supposons que dans un certain système de congruences (λ)

$$ds^\alpha = \lambda^\alpha_i dx^i,$$

les composantes du tenseur de courbure γ^a_{bcd} sont nulles dès qu'un des indices a, b, c, d est plus grand que m et qu'un autre est plus petit ou égal à m et que cette propriété a lieu aussi pour les tenseurs dérivés de courbure. En ce cas nous avons

$$\text{(7)} \qquad \begin{aligned} &\gamma^i_{\alpha kl,d} = \gamma^i_{skl}\gamma^s_{\alpha d} = 0 && (i, j, s, k, l \leqq m,\ \alpha > m) \\ &\gamma^\alpha_{jkl,d} = \gamma^s_{jkl}\gamma^\alpha_{sd} = 0, && \gamma^i_{jkl,d} = 0, \quad (d = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

De même, nous avons les formules

$$\text{(7')} \qquad \gamma^i_{jkl,p}\gamma^s_{\alpha d} = 0, \qquad \gamma^s_{jkl,p}\gamma^\alpha_{sd} = 0, \ \ldots .$$

On voit donc que si les matrices M^i et M_j formées avec $\gamma^i_{jkl}, \gamma^i_{jkl,p}, \ldots$ sont de rang m, les premières de ces équations nous donnent

$$\gamma^i_{\alpha d} = \gamma^\alpha_{id} = 0 \qquad (i \leqq m,\ \alpha > m).$$

En considérant les composantes infinitésimales [3])

$$\text{(7'')} \qquad ds^a_b = \gamma^a_{be}\, ds^e$$

[3]) G. Vranceanu, Leçons de géométrie différentielle I, *Bucarest*, (1957); chap. IV.

de la connexion affine par rapport aux congruences (λ) nous avons $ds^i_\alpha = ds^\alpha_i = 0$ et les équations de structure de E. Cartan de l'espace s'écrivent

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
\Delta s^i &= [ds^j ds^i_j],\\
\Delta s^i_j &= -[ds^i_j ds^j_j] + \frac{1}{2}\gamma^i_{jkl}[ds^k ds^l]\\
\Delta s^\alpha &= [ds^\beta ds^\alpha_\beta]\\
\Delta s^\alpha_\beta &= -[ds^\alpha_\lambda ds^\lambda_\beta] + \frac{1}{2}\gamma^\alpha_{\beta\gamma\delta}[ds^\gamma ds^\delta].
\end{aligned}
$$

Il est facile à voir qu'on peut satisfaire à ces équations en supposant que ds^i, ds^i_j sont fonctions seulement des $x^1, \ldots, x^m$ et ds^α, ds^α_β fonctions seulement des variables $x^{m+1}, \ldots, x^n$, ce qui nous dit que l'espace A_n est un produit $A_m \times A_{n-m}$. En effet, on peut satisfaire aux premières équations en considérant ds^i et ds^i_j fonctions seulement des variables $x^1, \ldots, x^m$, car la dernière equation (7) nous dit que les γ^i_{jkl} ne dépendent pas des x^α et la même propriété est valable pour les $ds^\alpha, ds^\alpha_\beta$ et x^α, donc on peut choisir les variables de A_n de façon que dans ces variables Γ^i_{jk} soient nulles si un des indices i, j, k au moins est plus grand que m et l'autre plus petit ou égal à m et que $\Gamma^i_{jk}(i, j, k \leqq m)$ soient fonctions seulement des variables $x^1, \ldots, x^m$ et $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(\alpha, \beta, \gamma > m)$ fonctions seulement des x^α.

Nous avons donc le théorème:

Si dans un système quelconque de congruences les seules composantes non nulles du tenseur de courbure et des tenseurs dérivés de courbure sont celles dont les indices sont plus petits ou égaux à m ou bien plus grands que m et si les matrices M^i, M_j formées avec γ^i_{jkl}, $\gamma^i_{jkl,p}$ sont de rang m; l'espace A_n est décomposable dans un espace A_m et un espace A_{n-m}.

III.

Nous allons donner une application aux groupes homogènes d'holonomie d'un espace A_n. On sait que ces groupes peuvent être considérés comme définis par les opérateurs construits avec le tenseur de courbure et les tenseurs dérivés

$$
(9)\qquad Z_{cd} = \gamma^a_{bcd}\, x^b \frac{\partial \varphi}{\partial x^a}, \qquad Z_{cdf} = \gamma^a_{bcd,f}\, x^b \frac{\partial \varphi}{\partial x^a}.
$$

Dans ce cas, la condition que les composantes du tenseur de courbure et des tenseurs dérivés non nulles soient celles pour lesquels les indices aient des valeurs plus petites ou égales à m revient à dire que le groupe homogène d'holonomie transforme entre elles les variables $x^1, \ldots, x^m$ et laisse invariantes les variables $x^{m+1}, \ldots, x^n$.

Inversement si les opérateurs (5) contiennent seulement les variables $x^1, \ldots, x^m$ il faut que nous ayons

$$\gamma^{\alpha}_{bcd} = \gamma^{a}_{\alpha cd} = \gamma^{\alpha}_{bcd,f} = \gamma^{a}_{\alpha cd,f} = 0, \ldots .$$

Il en résulte que toutes les composantes γ^{a}_{bcd} dont un des indices est plus grand que m sont nulles sauf éventuellement

$$\gamma^{i}_{jk\alpha} \tag{10}$$

qui doit être en vertu de l'identité

$$\gamma^{i}_{jk\alpha} + \gamma^{i}_{k\alpha j} + \gamma^{i}_{\alpha jk} = 0$$

symétrique en j, k.

Nous avons donc le théorème:

S'il existe un système de congruences dans un espace A_n par rapport auquel le groupe homogène d'holonomie conserve les variables $x^{m+1}, \ldots, x^n$ et transforme entre elles les variables $x^1, \ldots, x^m$, l'espace A_n est le produit direct d'un A_m et d'un espace euclidien E_{n-m} si $\gamma^{i}_{jk\alpha} = 0$ et si la matrice $M = (\gamma^{i}_{jkl})$ est de rang m.

Étant donné un espace A_n ayant comme groupe complet d'holonomie, un groupe G_1 à un paramètre, on peut montrer que l'on peut s'arranger de façon que les seules composantes du tenseur de courbure non nulles soient γ^{a}_{112}, γ^{a}_{212} et si la matrice carrée

$$\left(\gamma^{a}_{b12}\right) \qquad (a, b = 1, 2) \tag{11}$$

est de rang deux, on peut réduire à zéro les composantes γ^{a}_{112}, γ^{a}_{212} $(a > 2)$. En utilisant le théorème donnée plus haut il en résulte qu'un espace A_n à groupe complet d'holonomie un G_1, est décomposable dans un espace A_2 et un espace E_{n-2}, si la matrice (11) est de rang deux. Cela arrive toujours si l'espace A_n est un V_n et en ce cas la propriété constitue le théorème de Liber[4]) qui dit qu'un espace de Riemann à groupe complet G_1 d'holonomie est le produit direct d'un V_2 et d'un E_{n-2} métrique.

Il en résulte que le théorème de Liber se généralise aux espaces A_n seulement en partie, car il existe des espaces à groupe complet d'holonomie

[4]) А. Е. Либер, О пространствах линейной аффинной связности с однопараметрическими группами голономии, Докл. Акад. Наук СССР **66** (1949), 1045—1046

G_1 qui ne sont pas décomposables [5]), mais tous les espaces A_n à groupe d'holonomie G_1 sont des produits $A_m \times E_{n-m}$ $(2 \leqq m \leqq 4)$. Des considérations analogues sont valables dans le cas où le groupe d'holonomie transforme separamment les variables $x^1, \ldots, x^m$ et $x^{m+1}, \ldots, x^n$.

(Reçu le 29 janvier 1959.)

---

[5]) G. Vranceanu, Espaces A_n à groupe G_1 d'holonomie, *Mathematica* (Cluj) (1959), sous presse.