Eine Kennzeichnung der euklidischen Ebene unter den Minkowskischen Ebenen.

Herrn Professor O. Varga zum 50. Geburtstag zugeeignet.

Von S. GOŁĄB (Kraków) und L. TAMÁSSY (Debrecen).

Der Begriff der Orthogonalität der Richtungen in einem Riemannschen Raum wird bekanntlich in einem Finslerschen Raum durch den der Transversalität ersetzt. Bei dieser Verallgemeinerung gehen im allgemeinen folgende zwei Eigenschaften verloren. Betrachten wir in einem Riemannschen Raum die Menge $\mathfrak{M}$ von allen in einem gegebenen Punkte p festgesetzten Vektoren.

Eigenschaft 1. Gehören v_1 und v_2 zu $\mathfrak{M}$ und ist v_2 orthogonal zu v_1, so ist v_1 orthogonal zu v_2.

Eigenschaft 2. Gehören v_1 und v_2 zu $\mathfrak{M}$ und sind v_1 und v_2 zueinander orthogonal, so sind auch v_1 und $(-v_2)$ zueinander orthogonal.

Diese beiden Eigenschaften übertragen sich auf einen Finslerschen Raum dann und nur dann, wenn die Indikatrix des Punktes p ein zentrisches Ellipsoid ist.[1])

Da die Eigenschaft 2 im allgemeinen nicht erfüllt ist, so muß man im zweidimensionalen Fall über die zu r transversale Richtung nur in diesem Sinne sprechen, wenn r orientiert ist, da die zu $(-r)$ transversale Richtung im allgemeinen von der zu r transversalen verschieden ist.

Nehmen wir eine Minkowskische Ebene in Betracht, d. h. eine Ebene die mit einer Indikatrix I (Eichkurve) versehen ist. Die Indikatrix I (zusammen mit ihrem Anfangspunkt a) bestimmen die (Minkowskische) Metrik in der Ebene. Damit wir über die transversalen Richtungen sprechen können, setzen wir voraus, daß die Indikatrix I in jedem Punkte p eine Tangente besitzt, also differenzierbar ist. Legen wir auf I auch einen Umlaufssinn fest, so ist damit auch jede Tangente orientiert. So können wir jeder Richtung r in eindeutiger Weise eine transversale Richtung r^* zuordnen, indem r^* die Richtung

[1]) Vgl. [1], Theorème II. p. 141.

der orientierten Tangenten in jenem Punkte p von I bedeutet, in welchem der Radius mit Anfang a und mit der Richtung r die Indikatrix I schneidet.

Bei diesen Voraussetzungen kann man für jedes orientierte Dreieck $q_1q_2q_3$ die sog. Pseudohöhen definieren. Sei nämlich q_i eine der Ecken des Dreieckes D. Zu der Richtung $r_i=\overrightarrow{q_{i+1}\,q_{i+2}}$ $(q_4=q_1,\, q_5=q_2)$ nehmen wir die transversale Richtung r_i^* (in bezug auf I). Die gerichtete Gerade durch q_i mit der Richtung r_i^* nennen wir *Pseudohöhe* der Ecke q_i.

Ein orientiertes Dreieck besitzt drei Pseudohöhen. Bei der entgegengesetzten Orientierung des Dreieckes können sich die Pseudohöhen ändern (im euklidischen Fall fallen sie natürlich mit den ersten drei Pseudohöhen zusammen).

In der euklidischen Ebene haben wir den wohlbekannten Satz, der besagt, daß alle drei Höhen eines beliebigen Dreieckes sich in einem Punkte schneiden. Es entsteht in der Minkowskischen zweidimensionalen Geometrie die Frage wann die drei Pseudohöhen einen gemeinsamen Punkt haben. Es kann natürlich vorkommen, daß für gewisse Dreiecke diese Eigenschaft (nennen wir sie E) besteht, für andere dagegen nicht. Es handelt sich bei dieser Problemstellung darum, daß die Eigenschaft E für alle Dreiecke bestehen soll. Wir beweisen den folgenden

Satz. *Notwendig und hinreichend dafür, daß für jedes Dreieck D seine drei Pseudohöhen sich in einem Punkte schneiden, ist, dass die Indikatrix I eine zentrische Ellipse sei (d. h. daß der Anfang a der Indikatrix das Zentrum der Ellipse sei).*

Wir geben zwei verschiedene Beweise dieses Satzes wieder. Der erste stammt von dem ersten, der zweite von dem zweiten Verfasser. Der erste ist, im Gegensatz zu dem zweiten rein analytisch. Im ersten Beweise wird das Problem auf eine Differentialgleichung zurückgeführt, die sich effektiv integrieren läßt. Der eine Teil des Beweises ist trivial. Die Eigenschaft E ist nämlich bei den zentroaffinen Transformationen der Ebene invariant. Bei einer zentroaffinen Transformation geht eine Ellipse I in einen Kreis über; die Minkowskische Ebene wird also zu einer euklidisch-metrischen Ebene und in diesem Falle ist die Eigenschaft E für alle Dreiecke erfüllt. Es handelt sich also nur darum, die *Notwendigkeit* zu beweisen. In dieser Hinsicht beweisen wir viel mehr. Wie aus dem Beweisgange hervorgeht, genügt es die Eigenschaft E nur für eine *einparametrige Familie* von Dreiecken zu verlangen um den Schluß zu ziehen, daß I eine zentrische Ellipse sein muß.

I. *Analytischer Beweis.* Wir bedienen uns der Gleichung der Indikatrix im Polarkoordinatensystem, wo der Pol sich im Anfang a der Indikatrix befindet

$$\varrho=f(\varphi).$$

Die Funktion f besitzt laut Voraussetzung die Ableitung $f'(\varphi)$. Die Richtungsparameter $(\lambda(\varphi), \mu(\varphi))$ der Tangenten lauten

$$(1) \qquad \begin{cases} \lambda = f' \cos\varphi - f \sin\varphi \\ \mu = f' \sin\varphi + f \cos\varphi. \end{cases}$$

Die Gleichung der Tangenten ist folglich

$$\begin{cases} x = f \cos\varphi + \lambda t \\ y = f \sin\varphi + \mu t. \end{cases}$$

Nehmen wir nun einen festen Winkel α mit der Eigenschaft

$$0 < \alpha < \pi$$

und bezeichnen wir mit r_0 und r_α die beiden Radien mit Anfang in a die den Werten $\varphi = 0$ und $\varphi = \alpha$ entsprechen. Wir betrachten weiter die Schar S der Dreiecke $q_1 q_2 q_3$, wo $q_1 = a$, $q_2 = p(0)$, $q_3 \in r_\alpha$ ist, und $p(\varphi)$ denjenigen Punkt der Indikatrix bedeutet, der der Amplitude φ entspricht. Als Parameter der Schar S kann die Amplitude β des Punktes q_3 angenommen werden, welche der Vektor $\overrightarrow{q_2 q_3}$ mit der Polarachse einschließt. Der Variabilitätsbereich der Veränderlichen β ist also

$$\alpha < \beta < \pi.$$

Sprechen wir jetzt die Bedingung dafür aus, daß drei Geraden die auf den Pseudohöhen des orientierten Dreieckes $\overrightarrow{q_1 q_2 q_3}$ liegen, einen gemeinsamen Punkt haben. Sind die Gleichungen dieser drei Geraden in der Parameterform

$$\begin{cases} x = a_i + \lambda_i t \\ y = b_i + \mu_i t \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

gegeben, so lautet die Bedingung für die Eigenschaft E

$$(2) \qquad \det[\lambda_i, \mu_i, \lambda_i b_i - \mu_i a_i] = 0.$$

Bei uns ist

$$q_i = (a_i, b_i) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Die Richtungsparameter (λ_i, μ_i) ergeben sich aus den Formeln (1) und zwar für $\varphi = \varphi_{i+1}$ $(i = 1, 2, 3)$, wobei

$$\varphi_1 = \operatorname{ampl}(\overrightarrow{q_1 q_2}) = 0, \quad \varphi_2 = \operatorname{ampl}(\overrightarrow{q_2 q_3}) = \beta, \quad \varphi_3 = \operatorname{ampl}(\overrightarrow{q_3 q_1}) = \alpha + \pi.$$

Es sind also (λ_2, μ_2), und (λ_3, μ_3) konstant und nur (λ_1, μ_1) hängt von β ab.

Es ist nämlich

$$(3)\qquad \begin{cases} \lambda_1 = f'(\beta)\cos\beta - f(\beta)\sin\beta \\ \mu_1 = f'(\beta)\sin\beta + f(\beta)\cos\beta \\ \lambda_2 = f(\alpha+\pi)\sin\alpha - f'(\alpha+\pi)\cos\alpha \\ \mu_2 = -f(\alpha+\pi)\cos\alpha - f'(\alpha+\pi)\sin\alpha \\ \lambda_3 = f'(0),\ \mu_3 = f(0). \end{cases}$$

Weiter haben wir

$$(4)\qquad \begin{cases} a_1 = b_1 = 0, \quad a_2 = f(0) = \mu_3, \quad b_2 = 0, \\ a_3 = a_2 \cos\alpha \dfrac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}, \quad b_3 = a_2 \sin\alpha \dfrac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}. \end{cases}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann auch vorausgesetzt werden, daß $\lambda_3 = 0$ ist. Dies geht nämlich auf die Festlegung der Polarachse (in Richtung eines lokalen Extremums von $f(\varphi)$ zurück). Die Bedingung (2) lautet dann in expliziter Form

$$\begin{vmatrix} \lambda_1, & \mu_1, & \lambda_1 b_1 - \mu_1 a_1 \\ \lambda_2, & \mu_2, & \lambda_2 b_2 - \mu_2 a_2 \\ \lambda_3, & \mu_3, & \lambda_3 b_3 - \mu_3 a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & 0 \\ \lambda_2 & \mu_2 & -\mu_2\mu_3 \\ 0 & \mu_3 & -\mu_3 a_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder ausgeschrieben

$$\lambda_1 \mu_2 \mu_3(\mu_3 - a_3) + \mu_1 \mu_3 \lambda_2 a_3 = 0.$$

Da $\mu_3 > 0$ ist, kann die Gleichung durch μ_3 gekürzt werden, und wir erhalten unsere Bedingung in der Form

$$(5)\qquad \lambda_1 \mu_2(\mu_3 - a_3) + \mu_1 \lambda_2 a_3 = 0.$$

Das Einsetzen der Werte (3) und (4) in (5) ergibt

$$\mu_2\mu_3(f'(\beta)\cos\beta - f(\beta)\sin\beta)\left(1 - \cos\alpha \frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}\right) +$$
$$+ \lambda_2\mu_3 \cos\alpha \frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}(f'(\beta)\sin\beta + f(\beta)\cos\beta) = 0.$$

Nach elementaren Umrechnungen erhalten wir daraus

$$\frac{f'(\beta)}{f(\beta)} = \frac{(\sin\alpha\,\mu_2 + \cos\alpha\,\lambda_2)\sin\beta\cos\beta}{\sin\alpha\,\mu_2\cos^2\beta - \cos\alpha\,\lambda_2\sin^2\beta}.$$

Da λ_2, μ_2, α konstant sind, können wir die obige Differentialgleichung in der Form

$$(6)\qquad \frac{f'(\beta)}{f(\beta)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{M'}{M}$$

schreiben, wobei der Kürze halber

$$M = \mu_2 \sin\alpha \cos^2\beta - \lambda_2 \cos\alpha \sin^2\beta \tag{7}$$

gesetzt wurde. Daraus bekommen wir

$$f(\beta) = \frac{C}{\sqrt{|M|}},$$

wo C eine beliebige positive Konstante ist. Die Gleichung

$$\varrho = \frac{C}{\sqrt{|A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi|}} \qquad \begin{pmatrix} A = \sin\alpha\, \mu_2 \\ B = -\cos\alpha\, \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

stellt offenbar im Polarkoordinatensystem einen Kegelschnitt mit Zentrum im Anfang des Koordinatensystems dar. Die Gleichung (8) besteht jedenfalls für

$$\alpha < \varphi < \pi.$$

Da α beliebig gewählt werden kann, gilt die Formel (8) für alle φ, die den Ungleichungen

$$0 < \varphi < \pi$$

genügen, und aus Stetigkeitsgründen auch für das geschlossene Intervall $[0, \pi]$. Ein analoges Verfahren führt zu der Formel

$$\varrho = \frac{C^*}{\sqrt{|A^*\cos^2\varphi + B^*\sin^2\varphi|}} \quad \text{für} \quad \pi \leqq \varphi \leqq 2\pi. \tag{9}$$

Die Übereinstimmung der Konstanten ($A^* = A$, $B^* = B$, $C^* = C$) kann aus folgenden Gründen geschlossen werden. Im Innern des Intervalles $(0, \pi)$ muß ein φ_0 existieren, für welchen

$$f(\varphi) = \frac{C}{\sqrt{|A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi|}}$$

ein lokales Extremum besitzt. Wendet man nun das obige Verfahren für ein $\alpha_0 > \varphi_0$ an, so erhält man die Formel

$$f(\varphi) = \frac{C^{**}}{\sqrt{|A^{**}\cos^2\varphi + B^{**}\sin^2\varphi|}}, \tag{10}$$

gültig im Intervall $(\varphi_0, \varphi_0 + \pi)$. Da im Intervall (φ_0, π) die rechten Seiten von (8) und (10), im Intervall $(\pi, \varphi_0 + \pi)$ die rechten Seiten von (9) und (10) übereinstimmen müssen, folgt daraus

$$A = A^*, \quad B = B^*, \quad C = C^*,$$

so daß die Formel (8) im ganzen Intervall $(0, 2\pi)$ gilt. Da die Indikatrix voraussetzungsgemäss eine stetige Kurve ist, sind die Hyperbeln ausgeschlossen und es bleibt also nur die Möglichkeit, dass I eine zentrische Ellipse ist. Damit ist der Beweis beendet.

II. *Geometrischer Beweis.* Zunächst behaupten wir, daß, falls die Eigenschaft E für jedes Dreieck besteht, die Indikatrix eine Radonsche Kurve sein muß. Eine Radonsche Kurve nennt man eine solche, für welche zu jeder Richtung r die transversale r^* eine konjugierte Richtung ist, d. h. die transversale zu r^* mit $(-r)$ zusammenfällt. RADON hat zum ersten Mal konstatiert, daß es solche Kurven gibt, die mit den zentrischen Ellipsen nicht identisch sind.[2])

Zwecks Zurückführung ad absurdum nehmen wir vorläufig an, dass I — wie oben gesagt wurde — eine differenzierbare, also stetige, aber keine Radonsche Kurve ist. Dies bedeutet, daß es eine solche Richtung r_0 gibt, dass die Transversale $(r_0^*)^*$ nicht zu r_0 parallel ist, wenn mit r^* die zu r Transversale bezeichnet wird. Nehmen wir nun das Dreieck apq, wo p derjenige Punkt der Indikatrix ist, der der Richtung r_0 entspricht. Der Punkt q sei so gewählt, daß $\overrightarrow{pq}$ die Richtung r_0^* haben soll. r_0^* kann nicht zu r_0 parallel sein und apq bilden also ein echtes Dreieck. Betrachten wir nun die drei Pseudohöhen im orientierten Dreieck $\overrightarrow{apq}$. Die Pseudohöhe durch q ist parallel zu pq, also die Gerade pq. Die Pseudohöhe durch a kann nicht mit der Geraden pa zusammenfallen, sonst wäre r_0^* zu r_0 konjugiert, entgegen der Voraussetzung. Die Pseudohöhe durch a schneidet also die Gerade pq (also die Pseudohöhe durch q) in einem Punkte s, der verschieden von p ist. Der Schnittpunkt s der Pseudohöhen durch a und q ist also unabhängig von der Lage des Punktes q auf dem Strahl von p in der Richtung von r_0^*. Daraus folgt, da die Pseudohöhe durch p durch s gehen muß, daß $(-r_0^*)$ transversal zu jeder Richtung r sein muß, die zwischen $(-r_0)$ und $(-r_0^*)$ liegt. Dies ist aber unmöglich. Betrachten wir nämlich das Intervall das zwischen diesen zwei Richtungen fällt. In diesem Intervall müßte aber die Tangente nach dem Satz von Darboux zwischen der Anfangs- und Endstellung jede Stellung mindestens einmal annehmen, wogegen die transversale Richtung d. h. die Stellung der Tangenten im Inneren dieses Intervalles konstant bleibt. Damit haben wir bewiesen, daß I jedenfalls eine Radonsche Kurve sein muß.

Wir nehmen jetzt zwei Paare der Richtungen (r_1, r_1^*) und (r_2, r_2^*) die sich trennen. Solche transversale Richtungspaare muß es geben. Widrigenfalls liegt die Transversale r_3^* zur Richtung r_3 die den Winkel $\varphi = \sphericalangle(r_1 r_2)$ halbiert, in diesem Winkel, also $\sphericalangle(r_3, r_3^*) \leqq \frac{\varphi}{2}$ und durch widerholte Anwendung dieses Verfahrens gelangen wir zu einer Richtung r_0 von der Eigenschaft $r_0 = r_0^*$, was für eine Radonsche Kurve nie passieren kann.

---

2) Vgl. [2].

Bezeichnen wir nun mit E eine Ellipse mit Zentrum in a für welche (r_1, r_1^*) und (r_2, r_2^*) konjugierte Richtungen sind. Die in Bezug auf E zu r transversale Richtung sei mit $\bar{r}^*$ bezeichnet. Nehmen wir eine Richtung r_3 so, daß r_3 weder zu r_1 noch zu r_2 parallel ist und so, daß ein Dreieck abc mit den Eigenschaften: $\overrightarrow{ab}$ parallel zu r_1, $\overrightarrow{bc}$ parallel zu r_2 und $\overrightarrow{ca}$ parallel zu r_3 gebildet werden kann. Die Höhen des Dreiecks abc (in Bezug auf E) schneiden sich in einem Punkte s. Die Pseudohöhen (in Bezug auf I) schneiden sich laut Voraussetzung auch in einem Punkt t. Aber die Pseudohöhen durch a und c fallen mit den entsprechenden Höhen durch a und c zusammen, da $\bar{r}_1^* = r_1^*$ und $\bar{r}_2^* = r_2^*$ ist. Daraus folgt, daß $s = t$ sein muß und daraus weiter, daß $\bar{r}_3^* = r_3^*$ sein muß. So sind alle Paare (r, r^*) zugleich auch konjugiert in Bezug auf E. Wenden wir jetzt die Affinität an, die E in einen Kreis K' überführt. Diese Affinität führt die Indikatrix I in eine Kurve I' über. Bei dieser Affinität geht ein Paar transversaler Richtungen (r, r^*) in ein Paar transversaler Richtungen der transformierten Indikatrix über. Es ist also jedes Paar von transversalen Richtungen in Bezug auf I' zugleich konjugiert in Bezug auf K'. Folglich ist $r^{*\prime}$ immer orthogonal zu r', also muß I' ein Kreis sein und I also eine zentrische Ellipse, was zu beweisen war.

Eine Problemstellung. Über die Indikatrix I setzen wir voraus, daß sie in jedem Punkt eine Tangente besitzt und darüber hinaus noch, daß wenn r^* zu r transversal ist, r^* und r nie parallel zueinander sein können. Diese Voraussetzung ist z. B. immer erfüllt, falls I eine konvexe Kurve ist.

Es sei jetzt in der Ebene der Indikatrix I ein orientiertes Dreieck $\overrightarrow{q_1 q_2 q_3}$ gegeben. Mit q_i' bezeichnen wir den Punkt der Geraden $q_{i+1} q_{i+2}$, in welchem diese von der Pseudohöhe durch q_i geschnitten wird. Wir bilden nun die drei Produkte

$$(*) \qquad P_i = \frac{1}{2} \cdot \text{Länge } (\overrightarrow{q_i q_i'}). \text{ Länge } (\overrightarrow{q_{i+1} q_{i+2}}) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

d. h. die drei „Pseudomaße“ des Dreiecks $\overrightarrow{q_1 q_2 q_3}$. Ist I eine zentrische Ellipse, so ist

$$P_1 = P_2 = P_3,$$

unabhängig davon wie das Dreieck orientiert ist. Es entsteht die Frage alle Indikatrizen zu bestimmen, für welche die Eigenschaft $(*)$ für alle Dreiecke erfüllt ist.

Literatur.

[1] A. Bielecki et S. Gołąb, Sur un problème de la métrique angulaire dans les espaces de Finsler, *Ann. Soc. Pol. Math.* **18** (1945), 134—144.

[2] J. Radon, Über eine besondere Art ebener konvexer Kurve, *Abh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig* **68** (1916), 123—128.

(Eingegangen am 19. Februar, 1959).