Espaces a connexion affine tridimensionnels, qui admettent la notion d'aire.

Dédié à Monsieur O. Varga à l'occasion de son cinquantième anniversaire.

Par ADOLF HAIMOVICI (Jassy).

1. On a étudié avec des méthodes diverses les espaces généraux qui admettent la notion d'aire. C'est E. CARTAN [1] qui a posé le problème d'une manière tout-à-fait générale; le même problème peut être étudié dans le cadre de la théorie des espaces considérés par M. KAWAGUCHI [4] (voir une bibliographie dans [3] et [5]) et dont des belles recherches ont été conduites par M. O. VARGA [5].

Dans un cas particulier, nous avons étudié [2] des espaces à connexion affine, qui admettent la notion d'aire d'un triangle, celle-ci étant définie par une certaine fonction des composantes des deux vecteurs qui sont des côtés du triangle.

Nous nous proposons maintenant de trouver les espaces à connexion affine tridimensionnels qui admettent la notion d'aire d'un triangle déterminé par deux vecteurs X^i et Y^i, issus d'un même point M de l'espace; cette aire sera définie comme une fonction satisfaisant aux axiomes suivants:

A) elle est indépendante du système de coordonnées;

B) elle est invariante par rapport au transport parallèle des deux vecteurs;

C) elle est homogène du premier degré par rapport aux composantes X^i et Y^i des deux vecteurs, séparément;

D) si N et P sont les extrémités de X^i et Y^i respectivement et Q un point du segment NP, alors on a

$$(*)\qquad \text{aire}\, MNP = \text{aire}\, MNQ + \text{aire}\, MQP.$$

Évidemment ces axiomes peuvent servir de définition pour la notion d'aire dans un espace à un nombre quelconque de dimensions; nous nous occupons seulement des espaces tridimensionnels parce que les espaces à un nombre plus grand de dimensions conduisent à des systèmes d'équations aux dérivées partielles plus compliquées.

La recherche de ces invariants se poursuivra d'une manière analogue à celle que nous avons utilisée pour les invariants au transport parallèle d'une n-uple [3] de vecteurs.

2. Soient L_3 un espace à connexion affine tridimensionnel, Γ^k_{ij} les coefficients de sa connexion, supposée non-symétrique, $R^j_{i\,hk}$ les composantes du tenseur de courbure, et $f(x^i;\,X^i;\,Y^i)$ la fonction cherchée. Les conditions B et C conduisent aux équations

(1) $$\frac{\partial f}{\partial x^i}-\Gamma^k_{hi}\left(X^h\frac{\partial f}{\partial X^k}+Y^h\frac{\partial f}{\partial X^k}\right)=0,$$

(2) $$X^i\frac{\partial f}{\partial X^i}-f=0,$$

(3) $$Y^i\frac{\partial f}{\partial Y^i}-f=0.$$

Si l'on introduit la fonction

(4) $$F=f-f(x^i;\,X^i;\,Y^i)$$

le système de plus haut devient:

(5) $$\frac{\partial F}{\partial x^i}-\Gamma^k_{hi}\left(X^h\frac{\partial F}{\partial X^k}+Y^h\frac{\partial F}{\partial Y^k}\right)=0,$$

(6) $$X^i\frac{\partial F}{\partial X^i}+f\frac{\partial F}{\partial f}=0,$$

(7) $$Y^i\frac{\partial F}{\partial Y^i}+f\frac{\partial F}{\partial f}=0.$$

Les équations qui complètent ce système sont, comme on s'en assure aisément

(8) $$\begin{cases} R^j_{i\,hk}\left(X^i\dfrac{\partial F}{\partial X^j}+Y^i\dfrac{\partial F}{\partial Y^j}\right)=0,\\ R^j_{i\,hk,m}\left(X^i\dfrac{\partial F}{\partial X^j}+Y^i\dfrac{\partial F}{\partial Y^j}\right)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (R^j_{a\,hk}R^a_{i\,pq}-R^j_{a\,pq}R^a_{i\,hk})\left(X^i\dfrac{\partial F}{\partial X^j}+Y^i\dfrac{\partial F}{\partial Y^j}\right)=0.\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

3. On voit qu'une fonction de x^i et du bivecteur X^i, Y^i satisfait à l'axiome D. Soit

(**) $$f=\varphi(x^i;\,X^2Y^3-X^3Y^2,\ldots)$$

cette fonction.

Nous nous bornerons dans cette Note à étudier les espaces qui admettent une aire, dont l'expression est donnée par une fonction de la forme (**). Si nous posons

$$u_1 = X^2 Y^3 - X^3 Y^2; \quad u_2 = X^3 Y^1 - X^1 Y^3; \quad u_3 = X^1 Y^2 - X^2 Y^1$$

et considérons φ donnée par:

$$g(x^i;\, u_i,\, \varphi) = \text{const.},$$

on déduit de (5), (6), (7), (8) que g doit satisfaire aux équations:

$$(9) \qquad \frac{\partial g}{\partial x^i} - \Gamma^k_{hi} u_k \frac{\partial g}{\partial u_h} + \Gamma_i u_h \frac{\partial g}{\partial u_h} = 0,$$

$$(10) \qquad u_i \frac{\partial g}{\partial u_i} - \varphi \frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0,$$

$$(11_1) \qquad R^{j}_{i\ hk} u_j \frac{\partial g}{\partial u_i} - S_{hk} u_i \frac{\partial g}{\partial u_i} = 0,$$

$$(11_2) \qquad R^{j}_{i\ hk,\,m} u_j \frac{\partial g}{\partial u_i} - S_{hk,\,m} u_i \frac{\partial g}{\partial u_i} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(11_3) \qquad (R^{j}_{\alpha\ hk} R^{\alpha}_{i\ pq} - R^{j}_{\alpha\ pq} R^{\alpha}_{i\ hk}) u_j \frac{\partial g}{\partial u_i} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(i = 1, 2, 3),$$

où nous avons posé:

$$(12) \qquad \Gamma_i = \Gamma^{\ \alpha}_{\alpha\ i},\ R^{\alpha}_{\alpha\ hk} = S_{hk},\ \ldots.$$

Les équations (11) ont la forme générique

$$(13) \qquad a_i^{(p)j} u_j \frac{\partial g}{\partial u_i} = 0; \qquad \begin{pmatrix} i, j = 1, 2, 3 \\ p = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Il est évident que pour que le système (9), (10), ... admette une intégrale, il faut que, parmi les équations (13), il n'en existe que deux au plus, linéairement indépendantes; c'est-à-dire, si m^k_h, a^k_h, b^k_h sont trois systémes différents de coefficients de trois équations (13) (par exemple $a_h^{(\alpha)k}$, $a_h^{(\beta)k}$, $a_h^{(\gamma)k}$), il faut avoir:

$$(14) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} m^j_1 u_j & m^j_2 u_j & m^j_3 u_j \\ a^j_1 u_j & a^j_2 u_j & a^j_3 u_j \\ b^j_1 u_j & b^j_2 u_j & b^j_3 u_j \end{vmatrix} = 0.$$

Considérons encore les matrices

$$A^{(p)} = \| a_i^{(p)j} \|$$

et remarquons que dans les équations du type (11_3) les coefficients de $u_j \dfrac{\partial g}{\partial u_i}$ sont des éléments de matrices du type:

(14′) $$A^{(p)} A^{(q)} - A^{(q)} A^{(p)}.$$

Remarquons encore que si l'on fait la transformation

(14″) $$v_i = t_i^j u_j, \qquad T = \| t_i^j \|, \ \det T \neq 0,$$

t_i^j étant des fonctions de x^i, une équation de la forme

$$a_i^j u_j \frac{\partial g}{\partial u_i} = 0 \qquad A = \| a_i^j \|$$

devient

$$b_i^j v_j \frac{\partial g}{\partial v_i} = 0,$$

où

$$\| b_i^j \| = T A T^{-1} \qquad T^{-1} = \| s_i^j \|$$

et le système (9), (10), (11),... devient:

(9′) $$\frac{\partial g}{\partial x_i} - \gamma_{pi}^q v_q \frac{\partial g}{\partial v_p} + \gamma_i v_a \frac{\partial g}{\partial v_a} = 0,$$

(10′) $$u_i \frac{\partial g}{\partial u_i} - \varphi \frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0,$$

($11_1'$) $$\varrho_{i\ hk}^{j} u_j \frac{\partial g}{\partial u_i} - \sigma_{hk} u_i \frac{\partial g}{\partial u_i} = 0,$$

($11_2'$) $$\varrho_{i\ hk,m}^{j} u_j \frac{\partial g}{\partial u_i} - \sigma_{hk,m} u_i \frac{\partial g}{\partial u_i} = 0,$$

....

($11_3'$) $$(\varrho_{a\ hk}^{j} \varrho_{i\ pq}^{a} - \varrho_{a\ pq}^{j} \varrho_{i\ hk}^{a}) u_j \frac{\partial g}{\partial u_i} = 0,$$

....

où

(15) $$\gamma_{pi}^q = \left(t_p^a \Gamma_{ai}^b - \frac{\partial t_p^b}{\partial x^i} \right) s_b^q$$

(15′) $$\gamma_i = \gamma_{ai}^a = \Gamma_{ai}^a = \Gamma_i,$$

(15″) $$\varrho_{k\ ih}^{j} = \frac{\partial \gamma_{ki}^j}{\partial x^h} - \frac{\partial \gamma_{kh}^j}{\partial x^i} - \gamma_{ai}^j \gamma_{kh}^a + \gamma_{ph}^j \gamma_{ki}^p,$$

(15‴) $$\sigma_{ih} = \varrho_{a\ ih}^{a}.$$

Choisissons T de manière que la matrice associée à une équation du type (14)-soit $\|m_j^k\|$-prenne la forme canonique de Jordan. Évidemment les autres matrices auront des formes du type général.

Si l'on désigne par B^i les matrices

$$B^{(i)} = \|\gamma_{hi}^k - \delta_h^k \gamma_i\| = \|\lambda_{hi}^k\|,$$

alors les coefficients des expressions $u_i \frac{\partial g}{\partial u_j}$ dans les équations $(11_2')$ sont les éléments des matrices

$$C^{(i)} = \frac{\partial A^{(i)}}{\partial x^j} + B^{(i)} A^{(k)} - B^{(k)} A^{(i)} \tag{a}$$

et ceux des mêmes expressions dans les équations $(11_1')$ sont les éléments des matrices

$$D^{ij} = \frac{\partial B^{(i)}}{\partial x^j} - \frac{\partial B^{(j)}}{\partial x^i} - B^{(i)} B^{(j)} + B^{(j)} B^{(i)}. \tag{b}$$

Évidemment ces coefficients placés dans la dernière ligne du déterminant de (14), doivent satisfaire (14). Dans la suite nous supposerons les transformations (14″) effectuées et nous continuerons à désigner les variables par u_i.

4. Considérons d'abord le cas où $\|m_i^j\|$, $\|a_i^j\|$ sont les matrices de deux homographies qui ont un même plan fixe. Soit u_3 ce plan. Les équations (13) correspondantes se réduisent alors à

$$\frac{\partial g}{\partial u_1} = \frac{\partial g}{\partial u_2} = 0,$$

c'est-à-dire le système (9)—(11) admet une intégrale de la forme

$$\varphi = \sigma(x^i) u_3.$$

Les conditions (14) pour (a) et (b) donnent

$$\lambda_{3i}^1 = \lambda_{3i}^2 = 0, \quad \frac{\partial \lambda_{3i}^3}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda_{3j}^3}{\partial x^i} = 0,$$

les équations (9′) deviennent

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x^i} - \lambda_{3i}^3 \sigma = 0$$

et conduisent à l'invariant

$$A = u_3 e^{\int \lambda_{3i}^3 dx^i}.$$

Nous supposerons dorénavant ce cas exclu.

5. Réduisons maintenant la matrice $\|m_i^j\|$ à la forme canonique de Jordan. Il peut se passer que, dans certains cas particuliers il y ait plusieurs transformations (14″) qui ramènent $\|m_i^j\|$ à la forme canonique; nous utiliserons alors celle qui permet de mettre la seconde matrice $\|a_i^j\|$ sous une forme plus convenable.

D'ailleurs, des deux matrices associées aux équations linéairement indépendantes qui entrent dans notre système (13), nous réduirons à la forme canonique celle qui a un nombre plus grand de racines caractéristiques distinctes et si ces nombres sont égaux nous réduirons celle qui a un nombre moindre de diviseurs élémentaires, si ces nombres sont différents; c'est-à-dire, si les deux matrices sont réductibles (chacune par une transformation convenable) à

$$\begin{Vmatrix} \tau_1 & 1 & 0 \\ 0 & \tau_1 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_2 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \tau_2 & 1 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 1 \\ 0 & 0 & \tau_2 \end{Vmatrix},$$

nous réduirons la seconde.

Remarquons encore que d'après la manière dont nous avons posé le problème, il faut que $\dfrac{\partial g}{\partial \varphi} \neq 0$.

Pour plus de brièveté, nous introduirons la notation déjà utilisé plus haut

$$\lambda_{ik}^j = \gamma_{ik}^j - \delta_i^j \gamma_k .$$

6. Supposons maintenant que $\|m_k^i\|$ peut être ramenée à la forme canonique

$$\text{(A)} \qquad M = \begin{Vmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{Vmatrix},$$

τ_i étant les racines caractéristiques de $\|m_i^j\|$, qui sont évidemment des fonctions de x^i, et que la matrice associée à la troisième équation qui est utilisée en (14) — $\|b_i^j\|$ — est la matrice $\|m_i^j\|\,\|a_i^j\| - \|a_i^j\|\,\|m_i^j\|$; c'est-à-dire la matrice de l'équation du type ($11_3'$), formée à l'aide des équations

$$m_i^j u_j \frac{\partial g}{\partial u_j} = 0, \quad a_i^j u_j \frac{\partial g}{\partial u_i} = 0.$$

Ce déterminant est

$$\begin{vmatrix} \tau_1 u_1 & \tau_2 u_2 & \tau_3 u_3 \\ a_1^i u_i & a_2^i u_i & a_3^1 u_3 \\ (\tau_1 - \tau_j) a_1^j u_j & (\tau_2 - \tau_j) a_2^j u_j & (\tau_3 - \tau_j) a_3^j u_j \end{vmatrix} = 0$$

et conduit aux possibilités suivantes:

I. $$a_1^2 = a_1^3 = a_2^1 = a_2^3 = a_3^1 = a_3^2 = 0$$

Dans ce cas on doit avoir

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ a_1^1 & a_2^2 & a_3^3 \end{vmatrix} \neq 0$$

afin que l'équation (10') ne se réduise pas à

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0,$$

ce qui conduirait à une impossibilité pour notre problème géométrique.

Les conditions pour que le déterminant (14), ayant dans sa dernière ligne les coefficients b_i^j d'une équation quelconque de (11'), soit nul, conduisent à

$$b_1^2 = b_1^3 = b_2^1 = b_2^3 = b_3^1 = b_3^2 = 0,$$

c'est-à-dire à:

$$\lambda_{ik}^j = 0, \quad i \neq j, \quad \frac{D_i}{D} = p_i = \text{const.}$$

$$\frac{\partial \lambda_{ik}^i}{\partial x^h} - \frac{\partial \lambda_{ih}^i}{\partial x^k} = 0 \qquad \text{(ne pas sommer)}$$

si aucun des déterminants de deuxième ordre de la matrice

$$M = \begin{Vmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ a_1^1 & a_2^2 & a_3^3 \end{Vmatrix}$$

n'est pas nul, D_i étant les compléments algébriques des éléments de la première ligne de D_3; ou bien à:

$$\lambda_{2i}^1 = \lambda_{2i}^3 = \lambda_{3i}^1 = \lambda_{3i}^2 = 0, \quad \frac{D_i}{D} = p_i = \text{const.}$$

si

$$\begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ a_1^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = 0,$$

les autres déterminants de M étant, bien entendu, différents de zéro.

L'invariant cherché, qui s'obtient en intégrant le système (9'), et les autres transformées de (10'), (11'), ... est alors:

$$A = u_1^{p_1} u_2^{p_2} u_3^{p_3} \exp \int p_i \lambda_{ik}^i dx^k.$$

II. $$a_1^2 = a_1^3 = a_2^1 = a_2^3 = 0, \quad a_1^1 = k\tau_1, \quad a_2^2 = k\tau_2.$$

(14) donne alors pour une matrice quelconque $\|b_i^j\|$:

$$b_1^2 = b_2^1 = b_2^3 = b_1^3 = \tau_1 b_2^2 - \tau_2 b_1^1 = 0.$$

Il faut avoir encore dans ce cas $\tau_1 \neq \tau_2$, car autrement on obtiendrait $\dfrac{\partial g}{\partial \varphi} = 0$, ce qui est impossible. Les conditions de plus haut donnent alors

$$\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} = \text{const.}, \quad \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} = \text{const.}, \quad \lambda_{2i}^1 = \lambda_{1i}^2 = 0,$$

$$\frac{\partial(\tau_2 \lambda_{1i}^1 - \tau_1 \lambda_{2i}^2)}{\partial x^j} - \frac{(\tau_2 \lambda_{1j}^1 - \tau_1 \lambda_{2i}^2)}{\partial x^i} = 0$$

et l'invariant cherché est

$$A = u_1^{\frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1}} u_2^{\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}} \exp\left(\int \frac{\tau_2 \lambda_{1i}^1 - \tau_1 \lambda_{2i}^2}{\tau_2 - \tau_1} \, dx^i \right).$$

III. Le cas

$$2\tau_2 - \tau_1 - \tau_3 = 0, \quad a_1^3 = a_2^1 = a_3^1 = a_3^2 = 0,$$
$$a_1^1 = k\tau_1, \quad a_2^2 = k\tau_2, \quad a_3^3 = k\tau_3,$$

admet les trois possibilités suivantes:

a) $$a_2^3 = 0, \quad b_2^1 = b_2^3 = b_3^1 = b_3^2 = \tau_3 b_2^2 - \tau_2 b_3^3 = 0, \quad a_1^2 = 1$$

qui conduit à:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \text{const.}, \quad \lambda_{2i}^1 = \lambda_{2i}^3 = \lambda_{3i}^1 = \lambda_{3i}^2 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\tau_3 \lambda_{2i}^2 - \tau_2 \lambda_{3i}^3}{\tau_2 - \tau_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\tau_3 \lambda_{2j}^2 - \tau_2 \lambda_{3j}^3}{\tau_2 - \tau_1} \right)$$

b) $$a_1^2 = a_2^3 = 1, \quad b_1^3 = b_3^1 = 0, \quad b_1^1 = k\tau_1, \quad b_2^2 = k\tau_2,$$
$$b_3^3 = k\tau_3, \quad b_1^2 - b_2^3 = 0, \quad b_3^2 = b_2^1 = 0,$$

qui conduit à

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \text{const.} \quad \frac{\tau_1}{\tau_3} = \text{const.}, \quad \lambda_{1i}^3 = \lambda_{3i}^1 = \lambda_{3i}^2 = \lambda_{2i}^3,$$

$$\lambda_{1i}^1 + \lambda_{3i}^3 - 2\lambda_{2i}^2 = 0,$$

$$\frac{1}{\tau_1}\left(\frac{\partial \lambda_{1k}^1}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda_{1j}^1}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{\tau_2}\left(\frac{\partial \lambda_{2k}^2}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda_{2j}^2}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{\tau_3}\left(\frac{\partial \lambda_{3k}^3}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda_{3j}^3}{\partial x^k} \right),$$

c) $$a_1^2 = a_2^3 = 1, \quad b_1^3 = b_3^1 = 0, \quad b_3^2 + b_2^3 = 0, \quad \tau_2 = b_2^2 = 0,$$
$$\tau_3 b_1^1 - \tau_1 b_3^3 = 0$$

qui conduit à

$$\lambda^2_{1i}-\lambda^3_{2i}=\lambda^3_{1i}=\lambda^1_{3i}=\lambda^2_{3i}+\lambda^3_{2i}=0,$$

$$\frac{\partial(\lambda^1_{1i}+\lambda^3_{3i})}{\partial x^j}-\frac{\partial(\lambda^1_{1j}+\lambda^3_{3j})}{\partial x^i}=0.$$

Toutes ces possibilités conduisent à la formule

$$A=u_3\left(\frac{u_2^2-2a^3_2u_1u_3}{u_3^2}\right)^{\frac{\tau_3}{\tau_3-\tau_1}}\exp\int\frac{\tau_3\lambda^1_{1i}-\tau_1\lambda^3_{3i}}{\tau_3-\tau_1}\,dx^i$$

de l'aire.

Dans tous ces cas l'hypothèse $\tau_1=\tau_3$ conduirait à $\dfrac{\partial g}{\partial\varphi}=0$, c'est-à-dire à une impossibilité.

IV. $\tau_3=\tau_1+\tau_2=0,\quad a^2_1=a^1_2=a^1_1+a^2_2=0,\quad a^3_1=\mu a^2_3,\quad a^3_2=\mu a^1_3.$

μ étant un facteur quelconque. Ce cas conduit à :

$$b^2_1=b^1_2=b^1_1+b^2_2=b^3_3=b^3_1-\mu b^2_3=b^3_2-\mu b^1_3=0,$$

et, comme conséquence, à :

$$\lambda^2_{1i}=\lambda^1_{2i}=0,$$

$$\lambda^3_{1i}=\mu\lambda^2_{3i}=\lambda^3_{2i}-\mu\lambda^1_{3i}=0,$$

$$2\lambda^3_{3i}-\lambda^1_{1i}-\lambda^2_{2i}=0,\quad \mu=\text{const.},\quad \frac{\partial\lambda^3_{3i}}{\partial x^j}-\frac{\partial\lambda^3_{3j}}{\partial x^i}=0.$$

L'invariant aréolaire cherché est dans ce cas :

$$A=(2u_1u_2-\mu u_3^2)^{1/2}\exp\int\lambda^3_{3i}dx^i.$$

V. Le cas

$$\tau_2-\tau_3=0,$$

$$a^2_1=a^3_1=a^1_2=a^1_3=a^2_3=a^2_2-a^3_3=0$$

amène :

$$b^1_3=b^1_2=b^2_3=b^3_3-b^2_2=\tau_2b^2_1=\tau_2b^3_1=0$$

$$(\tau_1b^3_3-\tau_2b^1_1)a^3_2-(\tau_1a^2_2-\tau_2a^1_1)b^3_2=0,\qquad \tau_2\neq\tau_1,$$

d'où l'on déduit

$$\tau_2\lambda^2_{1i}=\tau_2\lambda^3_{1i}=\lambda^1_{2i}=\lambda^1_{3i}=\lambda^2_{3i}=0,\quad \frac{\tau_1}{\tau_2}=\text{const.}$$

$$\frac{\partial(\lambda^2_{2i}-\lambda^3_{3i})}{\partial x^j}-\frac{\partial(\lambda^2_{2j}-\lambda^3_{3j})}{\partial x^i}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\log\frac{\tau_1a^2_2-\tau_2a^1_1}{(\tau_2-\tau_1)a^3_2}=\frac{\lambda^3_{3i}-\lambda^2_{2i}}{\tau_2-\tau_1}$$

et si l'on met:

$$\Lambda_i = \frac{\tau_2 \lambda^1_{1i} - \tau_1 \lambda^3_{3i}}{\tau_2 - \tau_1} + \lambda^3_{2i} \frac{\tau_1 a^2_2 - \tau_2 a^1_1}{(\tau_2 - \tau_1) a^3_2},$$

alors $\Lambda_i dx^i$ est une différentielle exacte.

La formule de l'aire est alors

$$A = u_1^{\frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1}} u_2^{\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}} \exp \left\{ \frac{\tau_1 a^2_2 - \tau_2 a^1_1}{(\tau_2 - \tau_1) a^3_2} \frac{u_2}{u_3} + \int \Lambda_i dx^i \right\}.$$

7. Si la matrice M a la forme canonique

$$\text{(B)} \qquad M = \begin{Vmatrix} \tau_1 & 1 & 0 \\ 0 & \tau_1 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{Vmatrix} \qquad \sigma = \tau_1 - \tau_3$$

l'équation (14) devient

$$\begin{vmatrix} \tau_1 u_1 + u_2 & \tau_1 u_2 & \tau_3 u_3 \\ a^i_1 u_i & a^i_2 u_i & a^i_3 u_i \\ a^1_2 u_1 + (a^2_2 - a^1_1) u_2 + \sigma a^3_1 & -a^1_2 u_2 + \sigma a^3_2 u_3 & -a^1_3 u_1 - (a^1_3 + \sigma a^2_3) u_2 \end{vmatrix} = 0$$

et conduit aux possibilités suivantes:

VI. $$a^1_2 = a^3_2 = a^1_3 = a^2_3 = 0, \quad a^2_2 = k\tau_1, \quad a^3_3 = k\tau_3.$$

Ce cas implique:

$$b^1_2 = b^3_2 = b^1_3 = b^2_3 = \tau_1 b^3_3 - \tau_3 b^1_1 = 0, \qquad \tau_1 \neq \tau_3,$$

et par suite:

$$\lambda^1_{2i} = \lambda^3_{2i} = \lambda^1_{3i} = \lambda^2_{3i} = 0, \qquad \frac{\tau_1}{\tau_3} = \text{const.}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\tau_3 \lambda^2_{2i} - \tau_1 \lambda^3_{3i}}{\tau_3 - \tau_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\tau_3 \lambda^2_{2j} - \tau_1 \lambda^3_{3j}}{\tau_3 - \tau_1} \right) = 0.$$

La formule de l'aire, obtenue par l'intégration du système correspondant est:

$$A = u_2^{\frac{\tau_3}{\tau_3 - \tau_1}} u_3^{\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_3}} \exp \int \frac{\tau_3 \lambda^2_{2i} - \tau_1 \lambda^3_{3i}}{\tau_3 - \tau_1} dx^i.$$

VII. $$a^2_1 = 1, \quad a^3_1 = a^1_2 = a^3_2 = a^1_3 = a^2_3 = \tau_1 a^3_3 - \tau_3 a^1_1 = a^1_1 - a^2_2 = 0.$$

Ce cas conduit à:

$$b^2_3 = b^1_3 = b^3_2 = b^1_2 = \tau_1 b^3_3 - \tau_3 b^1_1 = 0, \qquad \tau_1 \neq \tau_3$$

ce qui implique:

$$\frac{\tau_1}{\tau_3} = \text{const.}, \quad \lambda^1_{2i} = \lambda^1_{3i} = \lambda^2_{3i} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\tau_3 \lambda^2_{2i} - \tau_1 \lambda^3_{3i}}{\tau_3 - \tau_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\tau_3 \lambda^2_{2j} - \tau_1 \lambda^3_{3i}}{\tau_3 - \tau_1}\right) = 0.$$

L'aire s'exprime alors par la formule

$$A = u_2^{\frac{\tau_3}{\tau_3 - \tau_1}} u_1^{\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_3}} \exp \int \frac{\tau_3 \lambda^2_{2i} - \tau_1 \lambda^3_{3i}}{\tau_3 - \tau_1} dx^i.$$

VIII. $$a^2_1 = 1, \quad a^3_1 = a^1_2 = a^3_2 = a^1_3 = a^2_3 = a^1_1 - a^2_2 = 0.$$

On obtient alors les relations

$$b^3_1 = b^1_2 = b^3_2 = b^1_3 = b^2_3 = b^1_1 - b^2_2 = 0,$$

$$b^2_1(\tau_1 a^3_3 - \tau_3 a^1_1) + a^2_1(\tau_3 b^1_1 - \tau_1 b^3_3) - b^1_1 a^3_3 + b^3_3 a^1_1 = 0,$$

dont on tire

$$\lambda^3_{1i} = \lambda^1_{2i} = \lambda^3_{2i} = \lambda^1_{3i} = \lambda^2_{3i} = 0,$$

$$\frac{\tau_3 - a_3}{\tau_1 - a_1} = k = \text{const.}, \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \log (k\tau_1 - \tau_3) - (\lambda^1_{1i} - \lambda^2_{2i}) = 0, \qquad k \neq 1,$$

et la condition pour que

$$dA = \frac{-\lambda^2_{1i}(\tau_3 - k\tau_1) - k\lambda^2_{2i} + \lambda^3_{3i}}{1-k} dx^i$$

soit une différentielle exacte. On déduit alors la formule de l'aire

$$A = (u_2^{-k} u_3)^{\frac{1}{1-k}} \exp \left\{ \frac{k\tau_1 - \tau_3}{1-k} \frac{u_1}{u_2} - \int A_i dx^i \right\}.$$

IX. $$a^1_2 = a^3_2 = a^1_3 = a^2_3 = 0,$$

$$a^1_1 = \tau_1 a^2_1, \quad a^2_2 = \tau_1 a^2_1, \quad a^3_3 = \tau_3 a^2_1.$$

On obtient d'ici

$$b^1_2 = b^3_2 = b^1_3 = b^2_3 = \tau_1 b^3_3 - \tau_3 b^1_1 = 0,$$

et par suite, vu que $\tau_1 \neq \tau_3$,

$$\lambda^1_{2i} = \lambda^3_{2i} = \lambda^1_{3i} = \lambda^2_{3i} = 0, \quad \frac{\tau_1}{\tau_3} = \text{const.}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^h}\left(\frac{\tau_3 \lambda^2_{2k} - \tau_1 \lambda^3_{3k}}{\tau_3 - \tau_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\tau_3 \lambda^2_{2h} - \tau_1 \lambda^3_{3h}}{\tau_3 - \tau_1}\right) = 0.$$

On tire ensuite la formule de l'aire:

$$A = u_2^{\frac{\tau_3}{\tau_3-\tau_1}} u_3^{\frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_3}} \exp \int \frac{\tau_3 \lambda_{2i}^2 - \tau_1 \lambda_{3i}^3}{\tau_3 - \tau_1} dx^i.$$

X. $$a_1^3 = a_2^1 = a_2^3 = a_1^1 - a_2^2 = a_1^1 - \tau_1 a_1^2 = 0;$$

celui-ci impose les conditions

$$b_1^3 = b_2^1 = b_2^3 = b_1^1 - b_2^2 = b_1^1 - \tau_1 b_1^2 = 0,$$

dont on tire

$$\lambda_{1i}^3 = \lambda_{2i}^1 = \lambda_{2i}^3 = 0, \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial x^i} - (\lambda_{1i}^1 - \lambda_{2i}^2)\tau_1 = 0,$$

$$\frac{\partial(\lambda_{1i}^1 - \lambda_{2i}^2)}{\partial x^j} - \frac{\partial(\lambda_{1j}^1 - \lambda_{2j}^2)}{\partial x^i} = 0,$$

$$\frac{\partial(\lambda_{2i}^2 - \tau_1 \lambda_{1i}^2)}{\partial x^j} - \frac{\partial(\lambda_{2j}^2 - \tau_1 \lambda_{1j}^2)}{\partial x^i} = 0.$$

L'expression de l'aire est alors:

$$A = u_2 \exp\left(-\tau_1 \frac{u_1}{u_2} + \int (\lambda_{2i}^2 - \tau_1 \lambda_{1i}^2) dx^i\right)$$

XI. $$\tau_1 = \tau_3 = 0, \quad a_1^2 = a_2^1 = a_3^1 = a_3^2 = 0, \quad a_1^1 = a_2^2 = a_3^3 = 0;$$

ce cas conduit à:

$$b_2^1 = b_3^1 = b_3^2 = b_2^2 - b_3^3 = a_2^3 b_3^3 - a_1^1 b_2^3 = 0$$

et ces relations donnent:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\lambda_{3h}^3 - \lambda_{2h}^2) - \frac{\partial}{\partial x^h}(\lambda_{3k}^3 - \lambda_{2k}^2) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{a_2^3 \lambda_{3h}^3 - a_1^1 \lambda_{2h}^3}{a_2^3}\right) - \frac{\partial}{\partial x^h}\left(\frac{a_2^3 \lambda_{3k}^3 - a_1^1 \lambda_{2k}^3}{a_2^3}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \log\left(\frac{a_1^1}{a_2^3}\right) = \lambda_{3i}^3 - \lambda_{2i}^2.$$

L'aire est donnée par

$$A = u_3 \exp\left\{-\frac{a_1^1}{a_2^3}\frac{u_2}{u_3} + \int \frac{a_2^3 \lambda_{3i}^3 - a_1^1 \lambda_{2i}^3}{a_2^3} dx^i\right\}.$$

8. Si la matrice $\| m_i^j \|$ a la forme

$$
\text{(C)} \qquad \begin{Vmatrix} \tau & 1 & 0 \\ 0 & \tau & 1 \\ 0 & 0 & \tau \end{Vmatrix},
$$

l'équation (14) devient

$$
\begin{vmatrix} \tau u_1 + u_2 & \tau u_2 + u_3 & \tau u_3 \\ a_1^i u_i & a_2^i u_i & a_3^i u_i \\ a_2^1 u_1 + (a_2^2 - a_1^1) u_2 + (a_2^3 - a_1^2) u_3 & a_3^1 u_1 + (a_3^2 - a_2^1) u_2 + (a_3^3 - a_2^2) u_3 & -a_3^1 u_1 - a_3^2 u_3 \end{vmatrix} = 0.
$$

Elle est satisfaite dans les cas suivants:

XII. $$a_2^1 = a_3^1 = a_3^2 = 0, \quad a_1^1 = a_2^2 = a_3^3 = \tau a_2^3.$$

De cette condition on tire ensuite

$$b_2^1 = b_3^1 = b_3^2 = b_3^3 - b_2^2 = b_3^3 - \tau b_2^3 = 0,$$

qui imposent les relations:

$$\lambda_{2i}^1 = \lambda_{3i}^1 = \lambda_{3i}^2 = 0,$$

et les conditions que

$$d\sigma = (\lambda_{2i}^2 - \lambda_{3i}^3) dx^i,$$

$$d\gamma = (\lambda_{3i}^3 - \tau \lambda_{2i}^3) dx^i,$$

soient les différentielles exactes.

La formule de l'aire est dans ce cas

$$A = u_3 \exp \left\{ -\tau \frac{u_2}{u_3} + \int (\lambda_{3i}^3 - \tau \lambda_{2i}^3) dx^i \right\}.$$

XIII. $$a_1^1 = a_2^2 = a_3^3 = a_2^1 = a_3^1 = a_3^2 = a_1^2 - b a_2^3 = 0.$$

Ce cas nous conduit aux deux possibilités suivantes:

a) $a_1^2 = 0,$

$$b_2^1 = b_3^1 = b_3^2 = b_2^2 - b_3^3 = \tau b_2^3 - b_3^3 = 0, \qquad \tau \neq 0,$$

c'est-à-dire à:

$$\lambda_{2i}^1 = \lambda_{3i}^1 = \lambda_{3i}^2 = 0,$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x^i} = \tau (\lambda_{2i}^2 - \lambda_{3i}^3), \quad \frac{\partial (\lambda_{3h}^3 - \tau \lambda_{2h}^3)}{\partial x^k} - \frac{\partial (\lambda_{3k}^3 - \tau \lambda_{2k}^3)}{\partial x^h} = 0,$$

b) $$b_2^1 = b_3^1 = b_3^2 = b_2^2 - b_3^3 = b_1^2 - b_2^3 = b_1^1 - b_3^3 = 0,$$

$$a_1^3 (\tau b_2^3 - b_3^3) - \tau b_1^3 a_1^2 = 0,$$

c'est-à-dire, si l'on suppose $a_1^3 = 1$,

$$\lambda_{2i}^1 = \lambda_{3i}^1 = \lambda_{3i}^2 = 0, \quad \lambda_{1i}^1 + \lambda_{3i}^3 - 2\lambda_{2i}^2 = 0,$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x^i} = \tau[\tau(\lambda_{2i}^2 - \lambda_{3i}^3) - a_1^2(\lambda_{1i}^2 - \lambda_{2i}^3)],$$

$$\frac{\partial a_1^2}{\partial x^i} = a_1^2[(\lambda_{1i}^1 + \lambda_{2i}^2 - 2\lambda_{3i}^3) + a_1^2(\lambda_{1i}^2 - \lambda_2^3)],$$

$$\frac{\partial}{\partial x^h}(\lambda_{3k}^3 + \tau\lambda_{1k}^3) - \frac{\partial}{\partial x^k}(\lambda_{3h}^3 + \tau\lambda_{1h}^3) = 0.$$

La formule de l'aire est dans ces cas

$$A = u_3 \exp\left\{-\tau\frac{a_2^1 u_2^2 + 2u_2 u_3 - 2a_1^2 u_1 u_3}{2u_3^2} + \int(\lambda_{3i}^3 + \tau\lambda_{1i}^3)\, dx^i\right\}.$$

XIV. $\tau = 0,$

$$a_1^1 = a_1^2 = a_1^3 = a_2^2 = a_2^3 = a_3^1 = a_3^3 = 0,$$

$$a_2^1 = a_3^2 = 1.$$

On tire d'ici:

$$b_2^2 = b_3^1 = b_1^3 = b_2^1 - b_3^2 = b_1^2 - b_2^3 = b_1^1 - b_3^3 = 0;$$

et comme une conséquence:

$$\lambda_{1i}^2 = \lambda_{1i}^3 = \lambda_{2i}^1 = \lambda_{2i}^3 = \lambda_{3i}^1 = \lambda_{3i}^3 = 0,$$

$$2\lambda_{2i}^2 - \lambda_{1i}^1 - \lambda_{3i}^3 = 0,$$

$$\frac{\partial \lambda_{2h}^2}{\partial x^k} - \frac{\partial \lambda_{2k}^2}{\partial x^h} = 0$$

et la formule de l'aire est:

$$A = (2u_1 u_3 - u_2^2)\exp\int(\lambda_{1i}^1 + \lambda_{3i}^3)\, dx^i.$$

Évidemment, si parmi les équations (10), (11), ... il y a une seule qui soit linéairement indépendante, il y aura deux invariants aréolaires. Nous laissons de côté ce cas, son étude étant banale.

Bibliographie.

[1] E. Cartan, Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire, *Actualités scientifiques et industrielles* (Paris) **72** (1933).

[2] A. Haimovici, Spaţii cu conexiune afină care admit noţiunea de arie, *Acad. R. P. R., Filiala Iaşi, Studii şi cerc. ştiinţifice*, **6** (1955), 123—133.

[3] A. Haimovici, Su alcuni invarianti negli spazi tridimensionali a connessione affine, *Rend. Mat. e Appl.* Serie V, **15** (1956), 385—452.

[4] A. Kawaguchi, Ein metrischer Raum der eine Verallgemeinerung des Finslerschen Raumes ist, *Monatsh. Math.* Phys. **45** (1946), 289—297.

[5] O. Varga, Eine Charakterisierung der Kawaguchischen Räume metrischer Klasse mittels eines Satzes über derivierte Matrizen, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1956), 418—430.

(Reçu le 20 janvier 1959.)