Über die Cremona-Transformation von zwei Ebenen.

Herrn Prof. Dr. Otto Varga zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von WOLFGANG ENGEL (Halle/Saale).

Im Band 4 der Mathematischen Annalen hat CLEBSCH [1] eine Reihe von Sätzen über die Cremona-Transformation von zwei Ebenen hergeleitet, die aber alle zur Voraussetzung haben, daß sich die Fundamentalpunkte der Transformation in allgemeiner Lage befinden, d. h. getrennt liegen sollen. H. W. E. JUNG hat dann einige dieser Sätze für die Cremona-Transformation mit beliebigen Fundamentalpunkten aufgestellt und bewiesen [3]. In den vorliegenden Arbeit will ich den letzten Satz ([1], S. 496) von CLEBSCH für die Cremona-Transformation mit beliebigen Fundamentalpunkten zwischen zwei funktionentheoretischen Ebenen formulieren und beweisen. Es handelt sich um den Satz, daß die Anzahlen der Fundamentalpunkte mit gleicher Multiplizität in den beiden Ebenen bis auf Anordnung gleich sind (§ 3). Die angewandten Methoden findet man in dem Buch [4] von JUNG dargestellt.

Die durch die vorgelegte Cremona-Transformation zunächst bestimmten Stellendefinitionen ändere ich so ab, daß keine Unbestimmtheitsstellen mehr auftreten. Die vorgegebene Cremona-Transformation ist dann ohne Ausnahme ein-eindeutig. Man muß bei diesem Vorgehen allerdings auch Primdivisoren 2. Art (Punkte) mit berücksichtigen, die bei der vorliegenden Cremona-Transformation nicht ausgezeichnet sind. Der Cremona-Transformation wird dann eine orthogonale Matrix zugeordnet, die das Analogon zur Kantorschen charakteristischen Matrix ist [6]. Für die Cremona-Transformationen einer Ebene in sich hat schon Herr MEINHARDT [5] eine ähnliche Matrix benutzt. Aus den Orthogonalitätseigenschaften gewinnt man sehr einfach die für ein Cremona-Transformation geltenden Relationen, und es lassen sich zwei Ergebnisse von JUNG verbessern.

§ 1. Bezeichnungen.

$\tilde{K}$ sei der Körper der rationalen Funktionen von zwei Veränderlichen über dem komplexen Zahlkörper K_0. Die Stellen dieses Körpers lassen sich auf verschiedene Weise definieren, jenachdem welche Veränderlichen als Erzeugende des Körpers ausgewählt werden. Sind x und y Erzeugende, so bezeichnen wir $K_0(x, y)$ mit K. Für zwei andere Erzeugende x' und y' müssen dann die Gleichungen

$$x' = G_0(x, y) G_1^{-1}(x, y), \qquad y' = H_0(x, y) H_1^{-1}(x, y), \tag{1.1}$$

$$x = G_0'(x', y') G_1'^{-1}(x', y'), \quad y = H_0'(x', y') H_1'^{-1}(x', y') \tag{1.2}$$

mit teilerfremden Polynomen $G_0(x, y)$, $G_1(x, y)$ u. s. w. bestehen. Wir bezeichnen $K_0(x', y')$ mit K'. K und K' sind also Bezeichnungen für den Körper $\tilde{K}$, die die verschiedenen Stellendefinitionen ausdrücken sollen.

Die Stellendefinitionen von K und K' ändern wir nun so ab, daß die rationalen Funktionen $G_0 G_1^{-1}$, $H_0 H_1^{-1}$ bzw. $G_0' G_1'^{-1}$, $H_0' H_1'^{-1}$ nicht mehr unbestimmt werden. Diese gewünschte Stellendefinition läßt sich durch eine Folge von (lokalen) E-Transformationen erreichen. Ist etwa $x = x_0$, $y = y_0$ eine Unbestimmtheitsstelle von $G_0 G_1^{-1}$ (ausgezeichnete Stelle der Transformation (1. 1)), so setzen wir

$$\begin{aligned} E_1 &: x - x_0 = u_1, \qquad y - y_0 = u_1 v_1 \quad \text{für} \quad |u_1| < r,\ |v_1| \leqq r, \\ E_2 &: x - x_0 = u_1 v_1, \quad y - y_0 = u_1 \qquad \text{für} \quad |u_1| < r,\ |v_1| > \frac{1}{r}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Die positive Zahl r werde dabei so groß gewählt, daß bei E_2 höchstens die Stelle $u_1 = v_1 = 0$ noch Unbestimmtheitsstelle für $G_0 G_1^{-1}$ wird. Ist eine Stelle $u_1 = 0$, $v_1 = v_{10}$ nach der Transformation E_1 oder die Stelle $u_1 = v_1 = 0$ nach der Transformation E_2 noch Unbestimmtheitsstelle für $G_0 G_1^{-1}$, so wendet man auf sie erneut die Transformationen E_1 und E_2 an usw. Wie JUNG [4] gezeigt hat, kommt man nach endlich vielen Schritten zu einer Stellendefinition, bei der die rationalen Funktionen in (1. 1) nicht mehr unbestimmt werden. Bei dieser Stellendefinition bezeichnen wir $\tilde{K}$ mit K^*. Eine entsprechende Bedeutung hat K'^*.

Deuten wir x, y und x', y' als kartesische Punktkoordinaten in zwei funktionentheoretischen Ebenen E und E', so liefern (1. 1) und (1. 2) eine Cremona-Transformation zwischen E und E'. Die Abbildung wird durch je zwei Kurvenbüschel in den Ebenen E bzw. E' erzeugt. Die Kurvenbüschel

$$G_0 - \lambda G_1 = 0, \quad H_0 - \mu H_1 = 0 \tag{1.4}$$

in der Ebene E haben einen beweglichen Schnittpunkt. Das ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Birationalität der Abbildung. Die Folge der Transformationen (1. 3) erzeugt eine abstrakte Ebene E^*, auf der die Büschel (1. 4) keine Basispunkte, die Kurven also nur noch einen beweglichen Schnittpunkt haben. K bzw. K^* ist der Körper der auf E bzw. E^* rationalen Funktionen.

Im Körper $\tilde{K}$ können wir Primdivisoren definieren, die eindimensionalen Exponentenbewertungen äquivalent sind. Die Art eines Primdivisors (einer Bewertung) hängt von der gewählten Stellendefinition ab. Ein Primdivisor, der etwa in K von 1. Art ist, kann in K' von 2. Art sein usw. Die Primdivisoren 1. Art sollen durch große, die Primdivisoren 2. Art durch kleine Frakturbuchstaben bezeichnet werden. Den Primdivisoren 1. Art entsprechen in der Ebene E irreduzible algebraische Kurven, die wir mit denselben Buchstaben bezeichnen wie die Primdivisoren. Wird bei der zu einem Primdivisor 2. Art gehörenden homomorphen Abbildung der Körper K so auf einen algebraischen Funktionenkörper einer Veränderlichen abgebildet, daß x in x_0 und y in y_0 übergehen, so sagen wir, der Primdivisor gehöre zur Stelle (x_0, y_0) von K. Geometrisch entspricht ihm also ein Punkt. Beim Übergang von K zu K^*, der eine einseitige Stellentransformation ist, können endlich viele Primdivisoren 2. Art von K in solche 1. Art von K^* übergehen. Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\varrho$ die Primdivisoren 2. Art von K, die in K^* von 1. Art sind

$$\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{A}_\nu^*, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \varrho. \tag{1.5}$$

Ist $\mathfrak{s}(\mathfrak{P})$ der Divisor 2. Art, der alle Primdivisoren 2. Art genau in der Potenz enthält, mit der sie in dem Primdivisor 1. Art $\mathfrak{P}$ enthalten sind, so gilt

$$\mathfrak{P}[\mathfrak{s}(\mathfrak{P})]^{-1} = \mathfrak{P}^*, \tag{1.6}$$

wobei $\mathfrak{P}^*$ der dem Primdivisor $\mathfrak{P}$ in K^* entsprechende Primdivisor ist.

In gleicher Weise behandelt man den Körper $K' = K_0(x', y')$. Es sei hier

$$\mathfrak{a}'_\mu = \mathfrak{A}'^*_\mu, \ \mu = 1, 2, \ldots, \varrho'; \quad \mathfrak{P}'[\mathfrak{s}(\mathfrak{P}')]^{-1} = \mathfrak{P}'^*. \tag{1.7}$$

Da beim Übergang von K^* zu K'^* keine Primdivisoren ihre Art ändern — da die Stellen in geeigneter Form im Hinblick auf die Transformationsformeln (1. 1) und (1. 2) definiert sind — kommt man durch Zusammensetzen der o. a. Divisorengleichungen zu

$$(1.8) \qquad \begin{array}{l} \text{I.:} \quad \mathfrak{a}_\nu = \dfrac{\mathfrak{A}'_\nu}{\mathfrak{s}(\mathfrak{A}'_\nu)}, \quad \mathfrak{a}'_\mu = \dfrac{\mathfrak{A}_\mu}{\mathfrak{s}(\mathfrak{A}_\mu)} \\ \text{oder} \\ \text{II.:} \quad \mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{a}'_\mu \end{array}$$

mit

$$\text{I.}\quad \mathfrak{s}(\mathfrak{A}'_\nu) = \prod_\mu \mathfrak{a}_\mu'^{\,-\alpha'_{\nu\mu}}, \quad \mathfrak{s}(\mathfrak{A}_\mu) = \prod_\nu \mathfrak{a}_\nu^{-\alpha_{\mu\nu}}$$

$$\text{II.}\quad \alpha_{\nu\mu} = \alpha'_{\mu\nu} = 1,\ \alpha_{\nu\iota} = 0 \quad \text{für} \quad \iota \neq \mu,\ \alpha'_{\mu\iota} = 0 \quad \text{für} \quad \iota \neq \nu$$

bei entsprechender Bezeichnung. Der Fall II tritt immer dann ein, wenn die Primdivisoren $\mathfrak{A}^*_\nu$ und $\mathfrak{A}'^*_\nu$ identisch sind. Allgemein gilt

$$\mathfrak{P}'[\mathfrak{s}(\mathfrak{P}')]^{-1} = \mathfrak{P}[\mathfrak{s}(\mathfrak{P})]^{-1}. \tag{1.9}$$

Ändert ein Primdivisor 1. oder 2. Art beim Übergang von K zu K' seine Art (Fall I in (1.8)), so heißt er ausgezeichneter Primdivisor (1. bzw. 2. Art) in bezug auf die Transformation. Die von uns hier betrachteten Primdivisoren 2. Art brauchen nicht alle ausgezeichnet zu sein.

Die folgenden Bezeichnungen und Gleichungen werden wir i. a. nur für den Körper K angeben, für K' sind sie analog zu bilden. Um anzudeuten, daß außer einer angeführten Gleichung noch die Entsprechende für K' gilt, die durch Vertauschung der gestrichenen mit den ungestrichenen Größen entsteht, ist dem Formelzähler ein Strich (′) angefügt.

Jeder Funktion $r(x, y) \neq 0$ aus K ist ein Divisor 1. Art zugeordnet, der angibt, wie diese Funktion null bzw. unendlich wird. Wir bezeichnen ihn mit $\mathfrak{D}(r)$ und nennen ihn den Divisor von r. Für einige Funktionen aus K geben wir im Folgenden die Zerlegungen dieser Divisoren in Potenzprodukte von Primdivisoren an

$$\mathfrak{D}(x) = \mathfrak{L}_0\mathfrak{L}^{-1}, \quad \mathfrak{D}(y) = \mathfrak{M}_0\mathfrak{M}^{-1}. \tag{1.10$'$}$$

Ferner sei mit einer Unbestimmten λ in $K(\lambda)$

$$\mathfrak{D}(G_0 - \lambda G_1) = \mathfrak{G}\mathfrak{G}_1^{-1}, \quad \mathfrak{D}(H_0 - \lambda H_1) = \mathfrak{H}\mathfrak{H}_1^{-1} \tag{1.11$'$}$$

und

$$\mathfrak{G} \sim \mathfrak{G}_1 \sim \mathfrak{L}^k\mathfrak{M}^l, \quad \mathfrak{H} \sim \mathfrak{H}_1 \sim \mathfrak{L}^m\mathfrak{M}^n, \tag{1.12$'$}$$

d. h. die Kurve $\mathfrak{G}$ ist in x vom Grad k und in y vom Grad l. Mit einer oben eingeführten Bezeichnung sei noch

$$\mathfrak{s}(\mathfrak{G}) = \prod_\nu \mathfrak{a}_\nu^{-r_\nu}, \quad \mathfrak{s}(\mathfrak{H}) = \prod_\nu \mathfrak{a}_\nu^{-s_\nu} \tag{1.13$'$}$$

und für einen der in (1.8), I auftretenden Primdivisoren 1. Art

$$\mathfrak{A}_\nu \sim \mathfrak{L}^{a_\nu}\mathfrak{M}^{b_\nu}. \tag{1.14$'$}$$

Gilt nach (1.8), II $\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{a}'_\nu$, so setzen wir $a_\nu = b_\nu = a'_\nu = b'_\nu = 0$. Aus den Gleichungen (1.1) und (1.2) findet man noch

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{G}_1[\mathfrak{s}(\mathfrak{G})]^{-1}, \quad \mathfrak{M}' = \mathfrak{H}_1[\mathfrak{s}(\mathfrak{H})]^{-1}. \tag{1.15$'$}$$

Für zwei Divisoren 1. Art $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ ist eine Schnittzahl $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ mit folgenden Eigenschaften definiert

$$(1.16)' \qquad \begin{aligned} &1. \quad (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{P}), \\ &2. \quad (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}\mathfrak{R}) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) + (\mathfrak{P}, \mathfrak{R}), \\ &3. \quad (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{R}), \quad \text{wenn} \quad \mathfrak{P} \sim \mathfrak{Q}. \end{aligned}$$

Sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ zwei verschiedene Primdivisoren 1. Art, so stellt $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ die Anzahl der Schnittpunkte der zugehörigen Kurven dar. Die Schnittzahl eines Divisors 1. Art mit einem Divisor 2. Art ist null. Die Schnittzahl von zwei Primdivisoren 2. Art aus K kann man durch Übergang zu K^* definieren, nämlich

$$(\mathfrak{a}_\mu, \mathfrak{a}_\nu) = (\mathfrak{A}_\mu^*, \mathfrak{A}_\nu^*) = (\mathfrak{a}_\nu, \mathfrak{a}_\mu).$$

Dann ist auch für Divisoren 2. Art

$$(\mathfrak{a}_\iota, \mathfrak{a}_\mu \mathfrak{a}_\nu) = (\mathfrak{a}_\iota, \mathfrak{a}_\mu) + (\mathfrak{a}_\iota, \mathfrak{a}_\nu).$$

Für das Folgende ist die Matrix

$$(1.17)' \qquad \mathfrak{a} = -(\mathfrak{a}_\mu, \mathfrak{a}_\nu)$$

von Wichtigkeit. Von ihr hat Jung gezeigt, daß sie sich als Produkt hh^T schreiben läßt, wo h eine Matrix der Ordnung ϱ ist, die in der Hauptdiagonale nur Einsen, unterhalb der Hauptdiagonale nur Nullen und oberhalb derselben nur die Zahlen 0 und -1 enthält.

Im „allgemeinen Fall", bei dem die Fundamentalpunkte getrennt liegen, sind die Matrizen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ Einheitsmatrizen, da dann zu einer Unbestimmtheitsstelle nur ein ausgezeichneter Primdivisor 2. Art mit der Eichfunktion $v - \tau u$ gehört. Damit sind auch die Matrizen h und h' Einheitsmatrizen. Im Folgenden erhält man also die klassischen Sätze und Relationen, wenn man für h und h' Einheitsmatrizen einsetzt.

Ist $\mathfrak{P}$ ein Divisor 1. Art, für den $\mathfrak{s}(\mathfrak{P}) = \prod_\nu \mathfrak{a}_\nu^{-\sigma_\nu}$ gilt, so bezeichnen wir

$$(1.18)' \qquad -\sigma^T h = \pi^T = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\varrho).$$

Über die Bedeutung der Zahlen π_ν läßt sich Folgendes sagen. Die Primdivisoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{\varrho_1}$ mögen in dieser Reihenfolge beim Auflösen der Stelle $S_0(x = x_0, y = y_0)$ von K durch E-Transformationen auftreten. Ihnen sind Stellen höherer Ordnung $S_{0\nu}$ zugeordnet, und zwar ist $S_0 = S_{01}$ eine Stelle 0-ter Ordnung, $S_{0\nu}$ $(\nu = 2, 3, \ldots)$ ist eine Stelle $(\nu - 1)$-ter Ordnung, die auf $\mathfrak{A}_{\nu-1}^*$ liegt und zu der $\mathfrak{a}_\nu$ gehört. Man kann dann so verfahren, als hätte die Kurve $\mathfrak{P}$ die Stellen $S_{0\nu}$ als Stellen der Ordnung π_ν mit getrennten Tangenten. Es ist $\pi_1 \geqq \pi_2 \geqq \cdots \geqq \pi_{\varrho_1}$. Entsprechendes gilt für die anderen Unbestimmtheitsstellen.

Der zu den Primdivisoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\varrho$ gehörende kanonische Divisor [4] sei

$$\mathfrak{a} = \prod_\nu \mathfrak{a}_\nu^{-\varkappa_\nu}. \tag{1.19'}$$

Dabei ist $-\varkappa_\nu$ die um eins verminderte Summe der Gradzahlen der Eichfunktion von $\mathfrak{a}_\nu$. Ist $(\mathfrak{K})$ die kanonische Klasse von K, d. h. die Klasse der den Doppeldifferentialen von K zugeordneten Divisoren, so ist die kanonische Klasse von K^*

$$(\mathfrak{K}^*) = (\mathfrak{K}\mathfrak{a}). \tag{1.20'}$$

Dann ist nach [4]

$$(\mathfrak{K}^*, \mathfrak{K}^*) = (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) - \varrho \tag{1.21'}$$

und wegen $\mathfrak{K} = \mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2}$

$$(\mathfrak{K}^*, \mathfrak{K}^*) = 8 - \varrho. \tag{1.22'}$$

Da beim Übergang von K^* zu K'^* kein Primdivisor seine Art ändert, ist $(\mathfrak{K}^*) = (\mathfrak{K}'^*)$, also

$$\varrho = \varrho'. \tag{1.23}$$

Für die Zahlen $\varkappa_\nu$ aus (1. 19)′ gilt

$$(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\varrho) h = \varkappa^T h = -\mathfrak{e}^T = -(1, 1, \ldots, 1). \tag{1.24'}$$

§ 2. Relationen.

Der durch (1. 1) gegebenen Transformation ordnen wir die quadratische Matrix

$$\begin{pmatrix} k & l & r_1 & \cdots & r_\varrho \\ m & n & s_1 & \cdots & s_\varrho \\ a_1 & b_1 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1\varrho} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_\varrho & b_\varrho & \alpha_{\varrho 1} & \cdots & \alpha_{\varrho\varrho} \end{pmatrix} = \mathfrak{T} \tag{2.1'}$$

zu. Die Matrix $\mathfrak{T}'$, die die entsprechenden gestrichenen Größen enthält, hat wegen (1. 23) dasselbe Format.

Ist $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Divisor 1. oder 2. Art aus K und $\mathfrak{s}(\mathfrak{P}) = \prod_\nu \mathfrak{a}_\nu^{-\sigma_\nu}$, so setzen wir

$$\chi^T(\mathfrak{P}) = (\varkappa, \mu, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\varrho). \tag{2.2'}$$

Dabei sind die Zahlen $\varkappa$ und μ durch $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{L}^{\varkappa}\mathfrak{M}^{\mu}$ bestimmt, falls $\mathfrak{P}$ von 1. Art ist, oder es ist $\varkappa = \mu = 0$, wenn $\mathfrak{P}$ von 2. Art ist. Aus den Gleichungen (1.9) ergibt sich unter Berücksichtigung von (1.8)

$$\mathfrak{P}' = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{s}(\mathfrak{P})} \prod_{\nu=1}^{\varrho} \left(\frac{\mathfrak{A}_\nu}{\mathfrak{s}(\mathfrak{A}_\nu)} \right)^{-\sigma'_\nu}$$

oder mit (2.2)′

$$\chi(\mathfrak{P}') = \mathfrak{T}'^{T} \chi(\mathfrak{P}). \tag{2.3$'$}$$

Da die Transformationen (1.1) und (1.2) zueinander invers sind, folgt aus der letzten Gleichung

$$\mathfrak{T}'\mathfrak{T} = \mathfrak{E},$$

wobei $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix der Ordnung $\varrho + 2$ ist, also

$$\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}^{-1} \tag{2.4$'$}$$

und

$$|\mathfrak{T}| = |\mathfrak{T}'| = \pm 1.$$

Wir führen nun die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \mathfrak{a} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix} = \mathfrak{F} \tag{2.5$'$}$$

ein. Aus

$$\left(\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{s}(\mathfrak{P})}, \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{s}(\mathfrak{P})} \right) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) + (\mathfrak{s}(\mathfrak{P}), \mathfrak{s}(\mathfrak{P}))$$

folgt dann mit (2.2)′ und (2.5)′

$$\left(\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{s}(\mathfrak{P})}, \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{s}(\mathfrak{P})} \right) = -\chi^{T}(\mathfrak{P}) \mathfrak{F} \chi(\mathfrak{P}). \tag{2.6$'$}$$

Da die Beziehung zwischen K^* und K'^* ohne Ausnahme ein-eindeutig ist, ergibt sich aus

$$\left(\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{s}(\mathfrak{P})}, \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{s}(\mathfrak{P})} \right) = (\mathfrak{P}^*, \mathfrak{P}^*) = (\mathfrak{P}'^*, \mathfrak{P}'^*) = \left(\frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{s}(\mathfrak{P}')}, \frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{s}(\mathfrak{P}')} \right),$$

$$\chi^{T}(\mathfrak{P}) \mathfrak{F} \chi(\mathfrak{P}) = \chi^{T}(\mathfrak{P}') \mathfrak{F}' \chi(\mathfrak{P}').$$

Setzt man hierin die Relationen (2.3)′ ein, so findet man

$$\mathfrak{T} \mathfrak{F} \mathfrak{T}^{T} = \mathfrak{F}'. \tag{2.7$'$}$$

Wegen $\mathfrak{a} = h h^T$ können wir auch $\mathfrak{F}$ zerlegen

$$(2.8)' \qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{V}\mathfrak{V}^T$$

mit

$$(2.9)' \qquad \mathfrak{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{i}{2}\sqrt{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{i}{2}\sqrt{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & h & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}, \quad i^2 = -1.$$

Die Matrix der Ordnung $\varrho + 2$

$$(2.10)' \qquad \mathfrak{V}'^{-1}\mathfrak{T}\mathfrak{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(k-l-m+n) & \frac{i}{2}(k+l-m-n) & \frac{1}{2}\sqrt{2}(r^T-s^T)h \\ -\frac{i}{2}(k-l+m-n) & \frac{1}{2}(k+l+m+n) & -\frac{i}{2}\sqrt{2}(r^T+s^T)h \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}h'^{-1}(a-b) & \frac{i}{2}\sqrt{2}h'^{-1}(a+b) & h'^{-1}\alpha h \end{pmatrix} = \mathfrak{W}$$

mit (vgl. (1.8), (1.13), (1.14))

$$(2.11)' \qquad \begin{gathered} r^T = (r_1, r_2, \ldots, r_\varrho), \quad s^T = (s_1, s_2, \ldots, s_\varrho), \\ a^T = (a_1, a_2, \ldots, a_\varrho), \quad b^T = (b_1, b_2, \ldots, b_\varrho), \quad \alpha = (\alpha_{\mu\nu}) \end{gathered}$$

ist wegen

$$(2.12)' \qquad \mathfrak{W}\mathfrak{W}^T = \mathfrak{V}'^{-1}\mathfrak{T}\mathfrak{V}\mathfrak{V}^T\mathfrak{T}^T(\mathfrak{V}'^{-1})^T = \mathfrak{V}'^{-1}\mathfrak{F}'(\mathfrak{V}'^{-1})^T = \mathfrak{E}$$

orthogonal. Sie ist die Verallgemeinerung der charakteristischen Matrix einer Cremona-Transformation, die durch Verwendung imaginärer Elemente orthogonal gemacht werden kann [6].

Aus der Orthogonalität folgen sofort zahlreiche Relationen. Wegen $\mathfrak{W}^{-1} = \mathfrak{W}' = \mathfrak{W}^T$ ist

$$(2.13) \qquad k = n', \quad l = l', \quad m = m', \quad n = k'.$$

Weiter ergibt sich

$$(2.14)' \qquad h'^{-1}(a-b) = h'^T(r'-s'), \quad h'^{-1}(a+b) = -h'^T(r'+s')$$

und

$$(2.15)' \qquad h'^{-1}a = -h'^T s' = q', \quad h'^{-1}b = -h'^T r' = p'$$

oder

$$a = -\mathfrak{a}' s', \quad b = -\mathfrak{a}' r'. \tag{2. 16)'}$$

Setzen wir weiterhin $h'^{-1} \alpha h = f$, so können wir die Matrix $\mathfrak{W}$ auch in der Form

$$\mathfrak{W} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(k-l-m+n) & \frac{i}{2}(k+l-m-n) & -\frac{1}{2}\sqrt{2}(p^T - q^T) \\ -\frac{i}{2}(k-l+m-n) & \frac{1}{2}(k+l+m+n) & \frac{i}{2}\sqrt{2}(p^T + q^T) \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}(p'-q') & \frac{i}{2}\sqrt{2}(p'+q') & f \end{pmatrix} \tag{2. 17)'}$$

schreiben. $\mathfrak{W}$ enthält also in den ersten beiden Zeilen und Spalten außer den Zahlen, die die Ordnung der Transformation bestimmen, bis auf Zahlfaktoren Summen und Differenzen der Multiplizitäten der festen Stellen nullter und höherer Ordnung der Divisoren $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{H}'$. Die Untermatrix f von $\mathfrak{W}$ enthält keine Multiplizitäten in so einfacher Weise.

Wegen

$$f' = h^{-1} \alpha' h' = f^T = h^T \alpha^T (h'^{-1})^T$$

ist ferner

$$\alpha' \mathfrak{a}' = \mathfrak{a} \alpha^T, \tag{2. 18)'}$$

und aus der Normierung der ersten beiden Zeilen von $\mathfrak{W}$ folgen die Relationen

$$\begin{gathered} p^T p - 2p^T q + q^T q + 2(k-m)(n-l) = 2, \\ -p^T p - 2p^T q - q^T q + 2(k+m)(l+n) = 2 \end{gathered} \tag{2. 19)'}$$

oder

$$p^T q = kn + lm - 1. \tag{2. 20)'}$$

Aus (2. 19)' ergibt sich noch

$$p^T p + q^T q - 2(kl + mn) = 0 \tag{2. 21)'}$$

und aus der Orthogonalität der ersten beiden Zeilen von $\mathfrak{W}$

$$p^T p - q^T q - 2(kl - mn) = 0. \tag{2. 22)'}$$

Damit ist

$$p^T p = 2kl, \quad q^T q = 2mn. \tag{2. 23)'}$$

Dieselben Relationen folgen aus der Normierung und der Orthogonalität der ersten beiden Spalten von $\mathfrak{W}$. Wegen der Orthogonalität der ersten und zweiten Zeile (Spalte) mit den restlichen ist

$$\frac{1}{2}(k-l-m+n)(p'-q')+\frac{1}{2}(k+l-m-n)(p'+q')+f(p-q)=0,$$

$$\frac{1}{2}(k-l+m-n)(p'-q')+\frac{1}{2}(k+l+m+n)(p'+q')+f(p+q)=0$$

oder

$$(k-m)p'+(l-n)q'+f(p-q)=0,$$
$$(k+m)p'+(l+n)q'+f(p+q)=0$$

und

$$kp'+lq'=-fp, \qquad (2.24)'$$
$$mp'+nq'=-fq.$$

Wegen (2. 15)′ sind diese Beziehungen gleichbedeutend mit

$$na+mb=-\alpha a', \qquad (2.25)$$
$$la+kb=-\alpha b'.$$

Aus $\mathfrak{W}\mathfrak{W}'=\mathfrak{E}$ folgt noch die Relation

$$\frac{1}{2}(p'-q')(p'^T-q'^T)-\frac{1}{2}(p'+q')(p'^T+q'^T)+ff'=e$$

(e ist die Einheitsmatrix der Ordnung ϱ) oder

$$ff'=p'q'^T+q'p'^T+e. \qquad (2.26)'$$

An Stelle der Charakteristik $\chi(\mathfrak{P})$ führen wir jetzt ein

$$\varphi^T(\mathfrak{P})=\chi^T(\mathfrak{P})\mathfrak{B}=\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}(\varkappa-\lambda),\ \frac{i}{2}\sqrt{2}(\varkappa+\lambda),\ -\pi\right), \qquad (2.27)'$$

so daß aus (2. 3)′

$$\varphi(\mathfrak{P})=\mathfrak{W}'\varphi(\mathfrak{P}') \qquad (2.28)'$$

wird. Im Fall eines ganzen Divisors $\mathfrak{P}$ sind die letzten $\varrho-2$ Elemente aus $\varphi^T(\mathfrak{P})$ die Multiplizitäten der zu den Primdivisoren $\mathfrak{a}_\nu$ gehörenden Stellen in bezug auf $\mathfrak{P}$.

Somit ist der vorgegebenen Cremona-Transformation in einem $(\varrho+2)$-dimensionalen euklidischen Raum eine äquiforme Transformation mit dem Fixpunkt $(0, 0, \ldots, 0)$ zugeordnet. Da wegen $(\mathfrak{K}^*)=(\mathfrak{K}'^*)$ und nach (1. 20)′

$$(\mathfrak{K}\mathfrak{a})=(\mathfrak{K}'\mathfrak{a}') \qquad (2.29)$$

ist, bleibt auch die Gerade durch die Punkte $(0, 0, \ldots, 0)$ und

$$\left(0, -2i\sqrt{2}, 1, \ldots, 1\right)=\varphi^T(\mathfrak{K}\mathfrak{a})=\varphi^T(\mathfrak{K}'\mathfrak{a}')$$

fest. Invarianten der Transformation sind

$$\frac{1}{2}(\varkappa-\lambda)^2-\frac{1}{2}(\varkappa+\lambda)^2+\sum_{\nu=1}^{\varrho}\pi_\nu^2 \tag{2.30'}$$

und

$$2(\varkappa+\lambda)-\sum_{\nu=1}^{\varrho}\pi_\nu. \tag{2.31'}$$

Für zwei entsprechende Divisoren (ohne Singularitäten) aus den kanonischen Klassen ist

$$\varphi(\mathfrak{K}'\mathfrak{a}')=\mathfrak{W}\varphi(\mathfrak{K}\mathfrak{a}). \tag{2.32'}$$

Durch Vergleich der ersten beiden Zeilen findet man

$$\begin{aligned}2(k+l-m-n)-(p^T-q^T)\mathfrak{e}&=0,\\ 2(k+l+m+n)-(p^T+q^T)\mathfrak{e}&=4\end{aligned} \tag{2.33'}$$

mit

$$\mathfrak{e}^T=(1,1,\ldots,1).$$

Hieraus ergibt sich

$$2(k+l-1)=p^T\mathfrak{e},\quad 2(m+n-1)=q^T\mathfrak{e}. \tag{2.34'}$$

Durch Vergleich der weiteren Zeilen der Gleichungen (2. 32)′ folgt

$$2(p'+q')+f\mathfrak{e}=\mathfrak{e}, \tag{2.35'}$$

also

$$2(p'+q')+f\mathfrak{e}=2(p+q)+f'\mathfrak{e}. \tag{2.36}$$

Das sind die Gleichungen (5) bei CLEBSCH. Aus den Relationen (2. 20)′ und (2. 23)′ ergibt sich noch, daß daß Geschlecht der Primdivisoren der Büschel $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$ gleich null ist. Für das Geschlecht $g(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ gilt nämlich

$$2g(\mathfrak{G})-2=(\mathfrak{G},\mathfrak{G}\mathfrak{K})-2d(\mathfrak{G}), \tag{2.37'}$$

wo $d(\mathfrak{G})$ der Divisor der mehrfachen Stellen von $\mathfrak{G}$ ist. Da das Geschlecht bei Stellentransformation invariant ist und die Primdivisoren $\mathfrak{G}^*$ (nach dem Satz von BERTINI) keine mehrfachen Stellen haben, ist

$$2g(\mathfrak{G})-2=(\mathfrak{G}^*,\mathfrak{G}^*\mathfrak{K}^*)=\left(\frac{\mathfrak{L}^k\mathfrak{M}^l}{\mathfrak{s}(\mathfrak{G})},\ \frac{\mathfrak{L}^{k-2}\mathfrak{M}^{l-2}}{\mathfrak{s}(\mathfrak{G})\mathfrak{a}^{-1}}\right),$$

also

$$2g(\mathfrak{G})=2(k-1)(l-1)-p^Tp+p^T\mathfrak{e}=0. \tag{2.38'}$$

Der Determinante der Transformation entspricht $|f|=|h'^{-1}\alpha h|$ und nicht, wie JUNG annahm, $|\alpha|$. Die Werte dieser beiden Determinanten sind allerdings wegen $|h| = 1$ einander gleich. JUNG berechnete übrigens nur $|\alpha||\alpha'|$ und nicht $|\alpha|$. Man kann aber $|f| = |\alpha|$ sehr leicht bestimmen.

Zunächst sei $\varDelta = kn - lm \neq 0$. Dann können wir p' und q' aus (2. 24) berechnen, nämlich

$$\varDelta p' = -f(np - lq), \quad \varDelta q' = -f(kq - mp). \tag{2. 39$'$}$$

Setzen wir diese Matrizen in die Determinante $|\mathfrak{W}|$ ein, so erhalten wir nach elementaren Umformungen der Spalten

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}(k-l-m+n)+\frac{1}{2\varDelta}(p^T-q^T)[(m+n)p-(k+l)q] & \frac{i}{2}(k+l-m-n)+\frac{i}{2\varDelta}(p^T-q^T)[(m-n)p-(k-l)q] & \cdots \\ -\frac{i}{2}(k-l+m-n)-\frac{i}{2\varDelta}(p^T+q^T)[(m+n)p-(k+l)q] & \frac{1}{2}(k+l+m+n)+\frac{i}{2\varDelta}(p^T+q^T)[(m-n)p-(k-l)q] & \cdots \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & f \\ 0 & 0 & \end{vmatrix}$$

und unter Berücksichtigung der Relationen (2. 20)′ und (2. 23)′ nach dem Laplaceschen Satz

$$|\mathfrak{W}| = \frac{1}{\varDelta^2}(kn - lm)|f| = \pm 1$$

also

$$|f| = |\alpha| = \pm (kn - lm). \tag{2. 40$'$}$$

Ist $\varDelta = kn - lm = 0$, so folgt aus (2. 24)′, daß entweder p und q linear abhängig sind oder $|f| = 0$ ist. Im ersten Fall wären die ersten beiden Zeilen von (2. 17)′ linear abhängig, was der Orthogonalität von $\mathfrak{W}$ widerspricht. Also ist $|f| = 0$ und (2. 40)′ gilt auch jetzt.

§ 3. Der Satz.

Sind p_ν und q_ν die Multiplizitäten der festen Stellen der Divisorenbüschel $\langle\mathfrak{G}\rangle$ bzw. $\langle\mathfrak{H}\rangle$, so nennen wir $\begin{pmatrix} p_\nu \\ q_\nu \end{pmatrix}$ die Multiplizität der entsprechenden Stelle in bezug auf die vorgelegte Cremona-Transformation. Über sie wollen wir den folgenden Satz beweisen.

Sind von den Multiplizitäten $\begin{pmatrix} p_\nu \\ q_\nu \end{pmatrix}$ *je* σ_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, \mu_0)$ *einander gleich, und sind von den Multiplizitäten* $\begin{pmatrix} p'_\nu \\ q'_\nu \end{pmatrix}$ *je* σ'_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, \mu'_0)$ *einander gleich, so stimmen die Zahlen* σ_μ *und* σ'_μ *bis auf Anordnung überein.*

Dieser Satz ist äquivalent mit folgender Aussage: Sind in der Untermatrix

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2}(p^T - q^T) \\ \frac{i}{2}\sqrt{2}(p^T + q^T) \end{pmatrix}$$

von $\mathfrak{W}$ je σ_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, \mu_0$) Spalten gleich, so gilt Entsprechendes von den Zeilen der Untermatrix

$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}(p' - q'),\ \frac{i}{2}\sqrt{2}(p' + q')\right).$$

Es sei etwa $\sigma_1' \geqq 2$. Die Matrix $\mathfrak{W}$ läßt sich dann so umordnen, daß die dritte bis $(\sigma_1' + 2)^{\text{te}}$ Zeile von $\mathfrak{W}$ die σ_1' gleichen Zeilen

$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}(p_1' - q_1'),\ \frac{i}{2}\sqrt{2}(p_1' + q_1')\right)$$

enthalten. Aus (2. 26)′ folgt dann

$$(3.1) \qquad ff' = ff^T = \left(\begin{array}{c} \underbrace{\left.\begin{matrix} 2p_1'q_1' + 1 & 2p_1'q_1' & \cdots & 2p_1'q_1' \\ 2p_1'q_1' & 2p_1'q_1' + 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 2p_1'q_1' & \cdots & & 2p_1'q_1' + 1 \end{matrix}\right\} \sigma_1' \text{ Zeilen}}_{\sigma_1' \text{ Spalten}} \quad \vdots \\ \cdots \end{array}\right).$$

Die übrigen Elemente dieser Matrix interessieren hier nicht. Die ganzzahligen Elemente $f_{\mu\nu}$ der Matrix f müssen also die Gleichungen

$$(3.2) \qquad \begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\varrho} f_{\mu\nu}^2 &= 2p_1'q_1' + 1, \quad \mu = 1, 2, \ldots, \sigma_1, \\ -2\sum_{\nu=1}^{\varrho} f_{\lambda\nu} f_{\mu\nu} &= 4p_1'q_1', \quad \lambda \neq \mu;\ \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, \sigma_1 \end{aligned}$$

erfüllen. Daraus ergibt sich

$$(3.3) \qquad \sum_{\nu=1}^{\varrho} (f_{\lambda\nu} - f_{\mu\nu})^2 = 2.$$

In zwei von den σ_1' Zeilen in f kann es also höchstens je ein Element geben, das von den übrigen verschieden ist, und zwar kann es sich von ihnen nur um ± 1 unterscheiden. f hat daher bei geeigneter Spaltenordnung die Gestalt

$$(3.4)\qquad f=\begin{pmatrix} f_{11}\pm 1 & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1\sigma_1'} & \cdots & f_{1\varrho} \\ f_{11} & f_{12}\pm 1 & f_{13} & \cdots & f_{1\sigma_1'} & \cdots & f_{1\varrho} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & \cdots & & f_{1\sigma_1'}\pm 1 & \cdots & f_{1\varrho} \\ f_{(\sigma_1'+1)1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & f_{(\sigma_1'+1)\varrho} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ f_{\varrho 1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & f_{\varrho\varrho} \end{pmatrix}.$$

Aus den Gleichungen (2. 35)'

$$2(p'+q')+f\mathfrak{e}=\mathfrak{e}$$

folgt dann, daß in (3. 4) entweder nur $+1$ oder -1 steht. Durch Subtraktion der zweiten bis $\sigma_1'^{\text{ten}}$. Zeilen der Gleichungssysteme (2. 24)

$$kp'+lq'=-fp, \quad mp'+nq'=-fq$$

von den ersten Zeilen finden wir, daß auch die ersten σ_1' Zeilen von p und q einander gleich, etwa gleich p_1 bzw. q_1 sein müssen. Sind σ_1 Multiplizitäten $\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$ vorhanden, so gilt also

$$\sigma_1 \geqq \sigma_1'.$$

Gehen wir von den σ_1 gleichen Multiplizitäten $\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$ aus, vertauschen also gestrichene und ungestrichene Größen, so erhalten wir entsprechend

$$\sigma_1' \geqq \sigma_1,$$

also

$$(3.5)\qquad \sigma_1' = \sigma_1.$$

Sind weitere Zahlen $\sigma_\nu' \geqq 2$, so verfahren wir wie oben. Es bleiben also nur die einfachen Multiplizitäten übrig, womit alles bewiesen ist.

Da für f' dasselbe gilt und $f'=f^T$ ist, enthält die Matrix f bei geeigneter Anordnung längs der Hauptdiagonalen quadratische Untermatrizen der Ordnung σ_ν von der Form

$$(3.6)\qquad \begin{pmatrix} f_{11}\pm 1 & f_{11} & \cdots & f_{11} \\ f_{11} & \ddots & & f_{11} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_{11} & & \cdots & f_{11}\pm 1 \end{pmatrix}.$$

§ 4. Ein Beispiel.

Wir wollen hier noch einmal das Beispiel behandeln, das JUNG in seiner Arbeit [3] angeführt hat.

$$x=(y'-x'^2)x'^{-2}, \qquad y=(y'-x'^2)(y'-x')x'^{-3},$$
$$x'=(x+y)x^{-1}(x+1)^{-1}, \quad y'=(x+y)^2x^{-2}(x+1)^{-1}.$$

Im Körper K' werden x oder y für $x'=y'=0$ und $x'=y'=\infty$ unbestimmt. Für diese Stellen ist die Stellendefinition durch E-Transformationen abzuändern (die Stellen sind aufzulösen). Bei $x'=y'=0$ setzen wir

$$1.\quad x'=u_1, \quad y'=u_1v_1 \quad \text{für} \quad |u_1|<1,\ |v_1|\leqq 1,$$
$$2.\quad x'=u_1v_1, \quad y'=u_1 \quad \text{für} \quad |u_1|<1,\ |v_1|<1$$

und erhalten

$$1.\quad x=(v_1-u_1)u_1^{-1}, \qquad y=(v_1-u_1)(v_1-1)u_1^{-1},$$
$$2.\quad x=(1-u_1v_1^2)u_1^{-1}v_1^{-2}, \quad y=(1-u_1v_1^2)(1-v_1)u_1^{-1}v_1^{-3}.$$

x bzw. y werden im Fall 1. noch unbestimmt bei 1.) $u_1=v_1=0$, 2.) $u_1=0$, $v_1=1$. Auf diese Stellen wenden wir erneut E-Transformationen an.

$$11.\quad u_1=u_2, \quad v_1=u_2v_2 \quad \text{für} \quad |u_2|<1,\ |v_2|\leqq 1,$$
$$12.\quad u_1=u_2v_2, \quad v_1=u_2 \quad \text{für} \quad |u_2|<1,\ |v_2|<1$$

und finden

$$11.\quad x=v_2-1, \quad , \quad y=(v_2-1)(u_2v_2-1),$$
$$12.\quad x=(1-v_2)v_2^{-1}, \quad y=(1-v_2)(u_2-1)v_2^{-1}.$$

Für $u_1=0$, $v_1=1$ setzen wir

$$21.\quad u_1=u_2, \quad v_1-1=u_2v_2 \quad \text{für} \quad |u_2|<1,\ |v_2|\leqq 1$$
$$22.\quad u_1=u_2v_2, \quad v_1-1=u_2 \quad \text{für} \quad |u_2|<1,\ |v_2|<1$$

und bekommen

$$21.\quad x=(1-u_2+u_2v_2)u_2^{-1}, \qquad y=(1-u_2+u_2v_2)v_2,$$
$$22.\quad x=(1+u_2-u_2v_2)u_2^{-1}v_2^{-1}, \quad y=(1+u_2-u_2v_2)v_2^{-1}.$$

Die Unbestimmtheitsstellen sind damit verschwunden.

Bei der ersten Transformation ist ein Primdivisor 2. Art $\mathfrak{a}_1'$ mit der Eichfunktion $v-\tau u$ in einen Primdivisor 1. Art $\mathfrak{A}_1'^*$, der durch $u=0$ definiert wird, übergegangen. Im Körper K ist $\mathfrak{A}_1'^*$ ein Primdivisor 2. Art, der zur Stelle $x=y=\infty$ gehört. Er ist mit $\mathfrak{a}_4$ identisch (siehe Tabelle). Bei der zweiten Transformation ist der Primdivisor 2. Art $\mathfrak{a}_2'$ mit der Eichfunktion $v-\tau u^2$ in einen Primdivisor 1. Art übergegangen, der in K durch $x+y=0$

definiert wird, also ebenso von 1. Art ist. Wir bezeichnen ihn mit $\mathfrak{A}_2$. So erhalten wir folgende Tabellen

Stelle von K'		Ortsfunktionen		Primdivisor 2. Art von K'	Eichfunktion	Entsprechender Primdivisor von K	Zugehörige Definition
x'	y'	u	v				
0	0	x'	y'	$\mathfrak{a}_1'$	$v-\tau u$	$\mathfrak{a}_4$	
0	0	x'	y'	$\mathfrak{a}_2'$	$v-\tau u^2$	$\mathfrak{A}_2$	$x+y=0$
0	0	x'	y'	$\mathfrak{a}_3'$	$v-u-\tau u^2$	$\mathfrak{A}_3$	$\varkappa=\infty$
∞	∞	x'^{-1}	y'^{-1}	$\mathfrak{a}_4'$	$v-\tau u$	$\mathfrak{A}_4$	$x+1=0$
∞	∞	x'^{-1}	y'^{-1}	$\mathfrak{a}_5'$	$v-\tau u^2$	$\mathfrak{A}_5$	$y=\infty$
∞	∞	x'^{-1}	y'^{-1}	$\mathfrak{a}_6'$	$v-u^2-\tau u^3$	$\mathfrak{A}_6$	$x=0$

Stelle von K		Ortsfunktionen		Primdivisor 2. Art von K	Eichfunktion	Entsprechender Primdivisor von K'	Zugehörige Definition
x	y	u	v				
0	0	x	y	$\mathfrak{a}_1$	$v-\tau u$	$\mathfrak{A}_1'$	$y'-x'^2=0$
-1	1	$x+1$	$y-1$	$\mathfrak{a}_2$	$v-\tau u$	$\mathfrak{A}_2'$	$y'=0$
-1	1	$x+1$	$y-1$	$\mathfrak{a}_3$	$v^2-\tau u$	$\mathfrak{A}_3'$	$x'=\infty$
∞	∞	x^{-1}	y^{-1}	$\mathfrak{a}_4$	$v-\tau u$	$\mathfrak{a}_1$	
∞	∞	x^{-1}	y^{-1}	$\mathfrak{a}_5$	$v-\tau u^2$	$\mathfrak{A}_5'$	$y'=\infty$
∞	∞	x^{-1}	y^{-1}	$\mathfrak{a}_6$	$v^2-\tau u^3$	$\mathfrak{A}_6'$	$x'=0$

Die Berechnung der Matrizen $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', h, h'$ ergibt

$$\mathfrak{a}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a}'=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$h=\begin{pmatrix} 1 & 0 & o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und für $r, s, a, b, r', s', a', b', \alpha$ finden wir

$$\begin{aligned}
r^T &= (-1, -1, -1, -1, -2, -3), & s^T &= (-2, -1, -2, -2, -3, -6),\\
a^T &= (\ \ 0,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 0,\ \ 1), & b^T &= (\ \ 0,\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 0),\\
r'^T &= (-1, -2, -1, -1, -2, -2), & s'^T &= (-2, -3, -3, -2, -3, -4),\\
a'^T &= (\ \ 2,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1), & b'^T &= (\ \ 1,\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 0),
\end{aligned}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2\\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

So werden $p, q, p', q', \mathfrak{W}$

$$\begin{aligned}
p^T &= (1, 1, 0, 1, 1, 0),\\
p'^T &= (1, 1, 0, 1, 1, 0),\\
q^T &= (2, 1, 1, 2, 1, 1),\\
q'^T &= (2, 1, 1, 2, 1, 1),
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{W} = \begin{pmatrix}
0 & -i & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2}\\
-i & 4 & \frac{3i}{2}\sqrt{2} & i\sqrt{2} & \frac{i}{2}\sqrt{2} & \frac{3i}{2}\sqrt{2} & i\sqrt{2} & \frac{i}{2}\sqrt{2}\\
\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{3i}{2}\sqrt{2} & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1\\
0 & i\sqrt{2} & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{i}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{3i}{2}\sqrt{2} & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0\\
0 & i\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0\\
\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{i}{2}\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Vertauschen wir in $\mathfrak{W}$ die Zeilen durch die Permutation (6457) und die Spalten durch die Permutation (3845)(67), so erhalten wir

$$\tilde{\mathfrak{M}} = \begin{pmatrix} 0 & -i & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -i & 4 & \frac{i}{2}\sqrt{2} & \frac{i}{2}\sqrt{2} & i\sqrt{2} & i\sqrt{2} & \frac{3i}{2}\sqrt{2} & \frac{3i}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{3i}{2}\sqrt{2} & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{3i}{2}\sqrt{2} & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{i}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{i}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

als Beispiel zum Satz des § 3.

Literatur.

[1] A. Clebsch, Zur Theorie der Cremona'schen Transformation, *Math. Ann.* **4** (1871), 490—496.

[2] H. P. Hudson, Cremona transformations in plane and space, *Cambridge,* 1927.

[3] H. W. E. Jung, Über die Cremonasche Transformation der Ebene, *J. reine angew. Math.* **138** (1910), 255—318.

[4] H. W. E. Jung, Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher, *Berlin,* 1951.

[5] D. Meinhardt, Endliche Gruppen von Cremona-Transformationen der Ebene und die isomorphen Gruppen der zugeordneten Matrizen, *Wiss. Z. Univ. Halle,* Math.-Nat. R. **6** (1957), 689—696.

[6] E. G. Togliatti, Sulla matrice caratteristica d'una transformazione Cremoniana tra piani. *Univ. Politec. Torino Rend.* **16** (1957), 361—370.

(Eingegangen am 2. Februar 1959.)