# Erweiterung der verallgemeinerten Rheonomtransformation von Flächenelementen höherer Ordnung und $R_K$-Extensoren.

## (Die Differentialgeometrie höherer Ordnung IV.)

Herrn Otto Varga anlässlich seines 50. Geburtstages gewidmet.

Von AKITSUGU KAWAGUCHI (Sapporo).

Wie wohlbekannt, ist der Tangentenraum eines Riemannschen Raumes ein Vektorraum und die Komponenten $v^i$ eines Vektors im Punkt $(x_0)$ transformieren sich linear bei jeder Änderung $(x^i) \to (x^a)$ des Koordinatensystems in der Weise: $v^a = (\partial x^a / \partial x^i)_{x_0} v^i$. Die letzte Gleichung hat auch den Inhalt $dx^a = (\partial x^a / \partial x^i)_{x_0} dx^i$ oder $x'^a = (\partial x^a / \partial x^i)_{x_0} x'^i$ für zwei benachbarten Punkte $(x_0)$ und $(x_0 + dx)$, daraus folgt sofort, daß die Geschwindigkeit $dx^i/dt$ ($t$: Zeit) ein Vektor ist. Aber wir differenzieren noch einmal, dann erhalten wir

$$x''^a = \frac{\partial x^a}{\partial x^i} x''^i + \frac{\partial^2 x^a}{\partial x^i \partial x^j} x'^i x'^j$$

am Punkt $(x_0)$. Deshalb können $x''^i$ nicht mehr die Komponenten eines Vektors sein, wenn die Koeffizienten des letzten Gliedes nicht gleich Null sind. Im allgemeinen sollen diese Koeffizienten nicht verschwinden. Deswegen hatten wir die Christoffelschen Symbole oder die linearen Übertragungsparameter $\Gamma^i_{jk}(x)$ eingeführt, dann erhalten wir den Vektor $a^i = x''^i + \Gamma^i_{jk} x'^j x'^k$. Das ist sehr wichtig, daß die Beschleunigung nicht nur durch $x''^i$ sondern auch durch $x'^i$ bestimmt wird.

Andererseits ist die Metrik des Riemannschen Raumes durch $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ gegeben, woraus die Christoffelschen Symbolen bestimmt werden. Dagegen wird die Metrik des Finslerschen Raumes durch $ds = F(x, dx)$ definiert, wobei die Funktion $F$ positiv homogen von Dimension 1 in $dx^i$ ist. Noch allgemeiner dürfen wir die Metrik durch die Funktion $ds = F(x, x', x'', \ldots \ldots, x^{(M)})dt$ von $(M+1)N$ Argumenten definieren,[1]) wie die Affinlänge einer

1) Siehe A. KAWAGUCHI [1].

Kurve im affinen Raum von z. B. drei Dimensionen

$$ds = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}^{\frac{1}{6}} dt$$

uns ein Beispiel gibt.

In diesem Falle können wir für einen Vektor nicht mehr über seine Größe sprechen, sondern nur für den Inbegriff von $MN$ Werten wie $(x', x'', \ldots, x^{(M)})$. Somit hat ein gewöhnlicher Vektor im solchen Raum keine Bedeutung mehr. Der Inbegriff von diesen $MN$ Werten gibt Anlass zu einer Verallgemeinerung des Begriffes von Vektoren.

Nun wollen wir die Eigenschaft von $MN$ Werten der Art wie $(x', x'', \ldots, x^{(M)})$ untersuchen. $x^a = x^a(x^i)$ sei eine beliebige Transformation, dann ist

$$x'^a = A^a_j x'^j, \quad \text{wobei} \quad A^a_j = \frac{\partial x^a}{\partial x^j}.$$

Nochmal differenzierend,

$$\begin{aligned} x''^a &= A^a_j x''^j + A^a_{jk} x'^j x'^k, \\ x'''^a &= A^a_j x'''^j + A^a_{jk}(3x''^j x'^k) + A^a_{jkl} x'^j x'^k x'^l, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

In dieser Arbeit wollen wir die konkreten Ausdrücke dieser Transformation geben und auch ihre lineare Representation im noch allgemeineren Falle, daß das Element nicht ein Kurvenelement höherer Ordnung[2]) sondern ein $K$-dimensionales Flächenelement höherer Ordnung[3]) ist, und daß wir die verallgemeinerte Rheonomtransformation in Betracht ziehen, die als spezialen Fall die Skleronomtransformation enthält.

## § 1. Erweiterte Parametertransformationen.

**1.** Es sei $X_N$ bzw. $P_K$ eine $N$- bzw. $K$-dimensionale Mannigfaltigkeit, die auf ein System von $N$ bzw. $K$ reellen Punktskoordinaten $x^i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ bzw. $u^\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, K)$ bezogen ist, unter Voraussetzung $N > K$, dann wird jede $K$-dimensionale Fläche in $X_N$ mittels $N$ passend gewählter Funktionen $x^i = x^i(u^\alpha)$ gegeben, wobei wir $K$ Veränderliche $u^\alpha$ als Parameter betrachten. Setzen wir die analytische Regularität der Funktionen $x^i(u^\alpha)$ in einem Bereich

[2]) Siehe A. Kawaguchi [2], [4].

[3]) Siehe A. Kawaguchi [3], [5], [6]; A. Kawaguchi und H. Hombu [7]; T. Suguri [8]; H. Hombu und T. Suguri [9]; Takeo Ohkubo [10]; H. V. Craig [11]. Das Flächenelemt häherer Ordnung ist im wesentlichen dasselbe wie der „jet" von Ch. Ehresmann [12].

um den betreffenden Punkt $u_0^\alpha$ in $P_K$ voraus, so bestimmen die Werte

$$x^i = x^i(u^\alpha), \quad p_\alpha^i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \quad p_{\alpha(2)}^i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^{\alpha_1} \partial u^{\alpha_2}}, \ldots, p_{\alpha(M)}^i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^M x^i}{\partial u^{\alpha_1} \partial u^{\alpha_2} \ldots \partial u^{\alpha_M}}$$

ein $K$-dimensionales Flächenelement $M$-ter Ordnung in jedem Punkt in $P_K$.

Lassen wir jetzt die $x^i$ nicht notwendig von $u^\alpha$ abhängig sein und betrachten wir $p_\alpha^i, p_{\alpha(2)}^i, \ldots, p_{\alpha(M)}^i$ als neue Veränderlichen, so kommt eine Mannigfaltigkeit $M_{(N, M, K)}$ von $N\binom{K+M}{M}+K$ Dimensionen zustande, wenn wir jedem Elemente der Produktmannigfaltigkeit $X_N \times P_K$ jedes System von $N\binom{K+M}{M}-N$ Werten von $p_\alpha^i, p_{\alpha(2)}^i, \ldots, p_{\alpha(M)}^i$ adjungieren. Die Mannigfaltigkeit $M_{(N, M, K)}$ besteht dann aus allen $P$-Expunkten. Unter einem $P$-Expunkt verstehen wir hierbei ein geometrisches Objekt, die durch ein System von $N\binom{K+M}{M}+K$ Werten von $(u^\alpha, x^i, p_\alpha^i, \ldots, p_{\alpha(M)}^i)$ definiert wird, und das Wertesystem heißt die Koordinaten des $P$-Expunktes. Ein $P$-Expunkt kann geometrisch als ein parametrisiertes $K$-dimensionales Flächenelement $M$-ter Ordnung illustriert werden.

Wie üblich, benützen wir die folgende Schreibweise[4])

$$(1.1) \qquad \begin{cases} F_{/\alpha(r)} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{{}^*\partial^r F}{\partial u^{\alpha_1} \partial u^{\alpha_2} \ldots \partial u^{\alpha_r}}, \quad F_{/\alpha(0)} \overset{\text{def}}{=} F, \\ F;_i^{\alpha(r)} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\bar\partial F}{\bar\partial p_{\alpha(r)}^i} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\varrho_1!\,\varrho_2! \ldots \varrho_w!}{r!} \dfrac{\partial F}{\partial p_{\alpha(r)}^i}, \quad F;_i^{\alpha(0)} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\partial F}{\partial x^i}, \end{cases}$$

wenn die Indizes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ aus $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_w$ gleichen Indizes beziehungsweise bestehen, während $\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_w = r$ ist, dann bekommen wir

$$(1.2) \qquad dF = \sum_{r=0}^{M} F;_i^{\alpha(r)} dp_{\alpha(r)}^i + \frac{\partial F}{\partial u^\alpha} du^\alpha \quad \text{und}$$

$$(1.3) \qquad \frac{\bar\partial p_{\alpha(r)}^i}{\bar\partial p_{\beta(r)}^j} = \delta_j^i \delta_{(\alpha_1}^{\beta_1} \delta_{\alpha_2}^{\beta_2} \ldots \delta_{\alpha_r)}^{\beta_r} \overset{\text{def}}{=} \delta_j^i \delta_{\alpha(r)}^{\beta(r)}.$$

**2.** Wir ziehen eine Transformation $u^\beta = u^\beta(u^\alpha)$ mit nicht verschwindender Determinante in der Mannigfaltigkeit $P_K$ in Betracht, wobei die Funktionen $u^\beta(u^\alpha)$ $M$-mal differenzierbar sein sollen. Es sei $f$ eine Funktion von

4) Siehe [5], [6] und [7]. ${}^*\partial F/\partial u^\alpha$ bedeutet

$$\frac{\partial F}{\partial u^\alpha} + \sum_{r=0}^{M} F;_i^{\alpha(r)} \cdot p_{\alpha(r)\alpha}^i,$$

wenn $F$ eine Funktion von $(u^\alpha, x^i, p_\alpha^i, \ldots, p_{\alpha(M)}^i)$ ist.

$u^\beta$, dann ist es wohlbekannt daß für die Parametertransformation $u^\beta = u^\beta(u^\alpha)$

$$f_{/\beta(r)} = \sum_{s=1}^{r} A^{\alpha(s)}_{\beta(r)} f_{/\alpha(s)} \tag{1.4}$$

gilt, wobei $A^{\alpha(s)}_{\beta(r)}$ Polynome der Ableitungen

$$U^\alpha_\beta \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^\beta},\ U^\alpha_{\beta(2)} \overset{\text{def}}{=} U^\alpha_{\beta_1/\beta_2}, \dots, U^\alpha_{\beta(r)} \overset{\text{def}}{=} U^\alpha_{\beta_1/\beta_2, \dots, \beta_r}, \dots$$

sind und

$$A^{\alpha(s)}_{\beta(r)} = 0 \quad \text{für} \quad s > r.$$

ist. Nach H. Hombu und T. Suguri[5]) sind die folgenden Rekursionsformeln für $A^{\alpha(s)}_{\beta(r)}$ schon bekannt:

$$\begin{cases} A^\alpha_{\beta(r)} = U^\alpha_{\beta(r)}, \\ A^{\alpha(s)}_{\beta(r)} = A^{(\alpha(s-1)}_{\beta(r-1)} U^{\alpha_s)}_{\beta_r} + \dfrac{{}^*\partial}{\partial u^{\beta_r}} A^{\alpha(s)}_{\beta(r-1)} \quad \text{für } 1 < s < r, \\ A^{\alpha(r)}_{\beta(r)} = U^{(\alpha_1}_{\beta_1} U^{\alpha_2}_{\beta_2} \dots U^{\alpha_r)}_{\beta_r}. \end{cases} \tag{1.5}$$

Die exakten Ausdrücke der Polynome $A^{\alpha(s)}_{\beta(r)}$ sind durch den folgenden Satz gegeben:

**Satz 1.1.** *Ist $(v_1, v_2, \dots, v_t)$ eine Menge von $t$ beliebigen positiven (alle nicht gleich Null) ganzen Zahlen, für welche die Beziehung $v_1 + v_2 + \cdots + v_t = t + s$ bestehen soll, dann ist*

$$A^{\alpha(t)}_{\beta(t+s)} = \sum_{(v)} \frac{(t+s)!}{v_1!\, v_2! \dots v_t!\, w_1!\, w_2! \dots w_{s+1}!} U^{(\alpha_1}_{(\beta(v_1)} U^{\alpha_2}_{\beta(v_2)} \dots U^{\alpha_t)}_{\beta(v_t))}. \tag{1.6}$$

*$w_\varrho$ ist hierbei die Zahl derjenigen von den Werten $v_1, v_2, \dots, v_t$, welche gerade gleich dem Werte $\varrho$ sind, und $\sum_{(v)}$ bedeutet Summierung über alle solche Wertesysteme $(v_1, v_2, \dots, v_t)$, für die die* Beziehung $v_1 + v_2 + \cdots + v_t = t + s$ *besteht, und jede von den $v_1, v_2, \dots, v_t$ nicht gleich Null ist.*

Beweis. Für $s = 0$, müssen $v_1 = v_2 = \cdots = v_t = 1$ und $w_1 = t$, $w_2 = w_3 = \cdots = w_{s+1} = 0$ sein, somit ist (1.6) für $s = 0$ richtig. (1.6) sei für irgend eine feste $s$ richtig, dann bekommen wir nach (1.5)

$$\begin{aligned} A^{\alpha(t)}_{\beta(t+s+1)} &= A^{(\alpha(t-1)}_{(\beta(t+s)} U^{\alpha_t)}_{\beta_{t+s+1})} + \frac{{}^*\partial}{\partial u^{(\beta_{t+s+1}}} A^{\alpha(t)}_{\beta(t+s))} = \\ &= \sum_{(v)} \frac{(t+s)!}{v_1! \dots v_{t-1}!\, w_1! \dots w_{s+2}!} U^{(\alpha_1}_{(\beta(v_1)} U^{\alpha_2}_{\beta(v_2)} \dots U^{\alpha_{t-1}}_{\beta(v_{t-1})} U^{\alpha_t)}_{\beta_{t+s+1})} + \\ &\quad + \sum_{(v)} \frac{(t+s)!}{v_1! \dots v_t!\, w_1! \dots w_{s+1}!} \{ U^{(\alpha_1}_{(\beta(v_1+1)} U^{\alpha_2}_{\beta(v_2)} \dots U^{\alpha_t)}_{\beta(v_t))} + \cdots \\ &\quad \cdots + U^{(\alpha_1}_{(\beta(v_1)} U^{\alpha_2}_{\beta(v_2)} \dots U^{\alpha_{t-1}}_{\beta(v_{t-1})} U^{\alpha_t)}_{\beta(v_t+1))} \}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

---

5) Siehe [9], S. 68—70.

Setzen wir $w_1$ anstatt $w_1+1$ und $v_t=1$, dann wird das erste Glied in der rechten Seite von (1. 7) in die folgende Form umgeschrieben:

$$(1.8)\qquad \sum_{(v)} \frac{(t+s)!\,w_1}{v_1!\dots v_t!\,w_1!\dots w_{s+2}!}\,U^{(\alpha_1}_{(\beta(v_1)}\dots U^{\alpha_t)}_{\beta(v_t))}\quad \text{für}\quad w_1\geqq 1.$$

Das zweite Glied läßt sich folgendermaßen umformen:

$$(1.9)\qquad (t+s)!\sum_{(v)}\left\{\frac{(v_1+1)(w_{v_1+1}+1)(w_{v_1})^{-1}}{(v_1+1)!\dots v_t!\,w_1!\dots(w_{v_1}-1)!(w_{v_1+1}+1)!\dots w_{s+1}!}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\,U^{(\alpha_1}_{(\beta(v_1+1)}\dots U^{\alpha_t)}_{\beta(v_t))}+\cdots\right\}.$$

In den Klammern des letzten Ausdrucks ergibt sich $w_{v_1}$-mal dasselbe Glied wie das erste Glied und ihre Summe verwandelt sich in

$$\frac{v_1 w_{v_1}}{v_1!\dots v_t!\,w_1!\dots w_{s+1}!\,w_{s+2}!}\,U^{(\alpha_1}_{(\beta(v_1)}\dots U^{\alpha_t)}_{\beta(v_t))}\quad \text{für}\quad v_1\geqq 2,$$

wenn wir $v_1$ bzw. $w_{v_1}$ anstatt $v_1+1$ bzw. $w_{v_1+1}+1$ und $w_{s+1}=1$ setzen. Wiederholen wir dasselbe Verfahren für andere Glieder in den Klammern, dann sehen wir daß das zweite Glied (1. 9) in die folgende Form geschrieben werden soll:

$$(1.10)\qquad (t+s)!\sum_{(v)}\frac{v_1 w_{v_1}+v_2 w_{v_2}+\cdots}{v_1!\dots v_t!\,w_1!\dots w_{s+2}!}\,U^{(\alpha_1}_{(\beta(v_1)}\dots U^{\alpha_t)}_{\beta(v_t))}$$

für alle voneinander verschiedenen $v_1, v_2, \dots \geqq 2$. Wegen

$$v_1 w_{v_1}+v_2 w_{v_2}+\cdots=2w_2+3w_3+\cdots+(s+2)w_{s+2}$$

und

$$w_1+2w_2+\cdots+(s+2)w_{s+2}=t+s+1,$$

muss die rechte Seite von (1. 7) wegen (1. 8) und (1. 10) durch die rechte Seite von (1. 9) ausgedrückt werden, wobei $s+1$ anstatt $s$ steht. Daraus erkennen wir die Richtigkeit der Behauptung des Satzes durch Induktion bezüglich $s$.

**Zusatz.** *Wenn* $\sum_{(v)}'$ *Summierung über alle voneinander verschiedene solche Systeme von t geordneten positiven ganzen Zahlen* $(v_1, v_2, \dots, v_t)$ *bedeutet, für die* $v_1+v_2+\cdots+v_t=t+s$ *sein soll, dann ist*

$$A^{\alpha(t)}_{\beta(t+s)}=\sum_{(v)}'\frac{(t+s)!}{t!\,v_1!\,v_2!\dots v_t!}\,U^{(\alpha_1}_{(\beta(v_1)}U^{\alpha_2}_{\beta(v_2)}\dots U^{\alpha_t)}_{\beta(v_t))}.$$

**Satz 1. 2** (HOMBU—SUGURI). *Setzt man* $A^{\alpha(0)}_{\beta(r)}=0$ *für* $r\geqq 1$, $A^{\alpha(0)}_{\beta(0)}=1$ *und* $A^{\alpha(s)}_{\beta(r)}=0$ *für* $r<0$, *dann besteht die Beziehung*

$$(1.11)\qquad \frac{\partial}{\partial U^{\alpha'}_{\beta'(t)}}A^{\alpha(s)}_{\beta(r)}=\binom{r}{t}\delta^{(\alpha_1}_{\alpha'}A^{\alpha(s-1))}_{(\beta(r-t)}\delta^{\beta'(t)}_{\beta(t))}.$$

BEWEIS. Aus (1. 6) erhalten wir durch Differenzierung nach $U^{\alpha'}_{\beta'(t)}$

$$\frac{\partial}{\partial U^{\alpha'}_{\beta'(t)}} A^{\alpha(s)}_{\beta(r)} = \binom{r}{t} \sum_{(v)} \frac{(r-t)!}{v_1! \dots v_{s-1}!\, w_1! \dots w_{t-1}!\,(w_t-1)!\, w_{t+1}! \dots w_{r-s-t+2}!} \cdot$$

$$\cdot\, U^{(\alpha_1}_{(\beta(v_1)} \dots U^{\alpha_{s-1}}_{\beta(v_{s-1})} \delta^{|\beta'(t)|}_{\beta(t))} \delta^{\alpha_s)}_{\alpha'} = \binom{r}{t} \delta^{(\alpha_1}_{\alpha'} A^{\alpha(s-1))}_{(\beta(r-t)} \delta^{\beta'(t)}_{\beta(t))}.$$

**Zusatz.** *Es besteht immer*

$$A^{\alpha(s)}_{\beta(r+1)} = \sum_{t=0}^{r-s+1} \binom{r}{t} A^{(\alpha(s-1)}_{(\beta(r-t)} U^{\alpha_s)}_{\beta(t+1))}. \tag{1. 12}$$

(1. 12) folgt aus

$$A^{\alpha(s)}_{\beta(r+1)} = A^{(\alpha(s-1)}_{(\beta(r)} U^{\alpha_s)}_{\beta_{r+1})} + U^{\alpha'}_{\beta'(t)\beta_{r+1}} \frac{\partial A^{\alpha(s)}_{\beta(r)}}{\partial U^{\alpha'}_{\beta'(t)}}$$

und Satz 1. 2.

**Satz 1. 3.** *Die Beziehung*

$$\binom{s}{l} A^{\alpha(l)\alpha'(s-l)}_{\beta(r)} = \sum_{t=0}^{r-s} \binom{r}{l+t} A^{(\alpha(l)}_{(\beta(l+t)} A^{\alpha'(s-l))}_{\beta(r-l-t))} \tag{1. 13}$$

*besteht für* $r \geqq s \geqq l \geqq 1$.

BEWEIS. Für $r = s$ und $r = s+1$, ist die Behauptung nach (1. 5) offenbar richtig. Vorausgesetzt, daß (1. 13) für irgendeinen festen Wert von $r$ und $l$ richtig ist, folgt wegen (1. 5)

$$\binom{s}{l} A^{\alpha(l)\alpha'(s-l)}_{\beta(r+1)} = \binom{s}{l} \{A^{(\alpha(l-1)\alpha'(s-l)}_{(\beta(r)} A^{\alpha_l)}_{\beta_{r+1})} + A^{\alpha(l)\alpha'(s-l)}_{(\beta(r)/\beta_{r+1})}\} =$$

$$= \left\{\binom{s-1}{l-1} + \binom{s-1}{l}\right\} A^{\alpha(l-1)\alpha'(s-l)}_{(\beta(r)} U^{\alpha_l)}_{\beta_{r+1})} +$$

$$+ \sum_{t=0}^{r-s} \binom{r}{l+t} \{A^{(\alpha(l)}_{(\beta(l+t)/\beta_{r+1}} A^{\alpha'(s-l))}_{\beta(r-l-t))} + A^{(\alpha(l)}_{(\beta(l+1)} A^{\alpha'(s-l))}_{\beta(r-l-t)/\beta_{r+1})}\} =$$

$$= \sum_{t=0}^{r-s+1} \left\{\binom{r}{l-1+t} A^{(\alpha(l-1)}_{(\beta(l-1+t)} U^{\alpha_l}_{\beta_{r+1}} A^{\alpha'(s-l)}_{\beta(r-l-t+1))} + \binom{r}{l+t} A^{(\alpha(l)}_{(\beta(l+t)} A^{\alpha'(s-1-l)}_{\beta(r-l-t)} U^{\alpha'_{s-l})}_{\beta_{r+1})} \right\} +$$

$$+ \sum_{t=0}^{r-s+1} \binom{r}{l+t-1} A^{(\alpha(l)}_{(\beta(l+t-1)/\beta_{r+1}} A^{\alpha'(s-l)}_{\beta(r+1-l-t)} + \sum_{t=0}^{r-s} \binom{r}{l+t} A^{(\alpha(l)}_{(\beta(l+t)} A^{\alpha'(s-l))}_{(\beta(r-l-t)/\beta_{r+1})} =$$

$$= \sum_{t=0}^{r-s+1} \binom{r}{l+t-1} A^{(\alpha(l)}_{(\beta(l+t)} A^{\alpha'(s-l))}_{\beta(r+1-l-t)} + \sum_{t=0}^{r-s+1} \binom{r}{l+t} A^{(\alpha(l)}_{(\beta(l+t)} A^{\alpha'(s-l))}_{\beta(r+1-l-t))} =$$

$$= \sum_{t=0}^{r-s+1} \binom{r+1}{l+t} A^{(\alpha(l)}_{(\beta(l+t)} A^{\alpha'(s-l))}_{\beta(r+1-l-t))}.$$

Daraus folgt die Richtigkeit der Behauptung nach Induktion.

Durch Setzen von 1 bzw. $r+1$ an Stelle von $l$ bzw. $r$ in (1. 13), erhalten wir den

**Zusatz 1.** *Für $r+1 \geqq s \geqq 1$ besteht die Beziehung*

$$A^{\alpha(s)}_{\beta(r+1)} = \frac{1}{s} \sum_{t=0}^{r-s+1} \binom{r+1}{t+1} A^{(\alpha(s-1)}_{(\beta(r-t)} U^{\alpha(s))}_{\beta(t+1))}. \tag{1. 14}$$

Vergleichung von (1. 12) und (1. 14) gibt uns

**Zusatz 2.** *Wenn $r+1 \geqq s \geqq 1$ ist, so ergibt sich die Identität*

$$\sum_{t=0}^{r-s+1} \left\{ \frac{1}{s} \binom{r+1}{t+1} - \binom{r}{t} \right\} A^{(\alpha(s-1)}_{(\beta(r-t)} U^{\alpha_s)}_{\beta(t+1))} \equiv 0. \tag{1. 15}$$

**3.** Wir betrachten zwei nacheinander durchgeführten Parametertransformationen: $u^\beta = u^\beta(u^\alpha)$, $u^\gamma = u^\gamma(u^\beta)$, und $u^\gamma = u^\gamma(u^\beta(u^\alpha)) = u^\gamma(u^\alpha)$ sei ihre Produkttransformation. Dann ergibt sich die entsprechende Transformation von der Gestalt (1. 4):

$$f_{/\beta(r)} = \sum_{s=1}^{r} A^{\alpha(s)}_{\beta(r)} f_{/\alpha(s)}, \quad f_{/\gamma(t)} = \sum_{r=1}^{t} A^{\beta(r)}_{\gamma(t)} f_{/\beta(r)} \tag{1. 16}$$

$$\text{und} \quad f_{/\gamma(t)} = \sum_{s=1}^{t} A^{\alpha(s)}_{\gamma(t)} f_{/\alpha(s)}.$$

Hiernach gilt die Beziehung

$$A^{\alpha(s)}_{\gamma(t)} = \sum_{r=s}^{t} A^{\beta(r)}_{\gamma(t)} A^{\alpha(s)}_{\beta(r)}. \tag{1. 17}$$

Andererseits muß die Ableitung $U^\alpha_{\gamma(t)}$ bekanntlich durch die Ableitungen $U^\beta_{\gamma(t)}, U^\alpha_{\beta(s)}$ ausgedrückt werden können, d. h.

$$U^\alpha_{\gamma(t)} = \sum_{s=1}^{r} U^\alpha_{\beta(s)} A^{\beta(s)}_{\gamma(t)}. \tag{1. 18}$$

Dabei bestehen die $A^{\beta(s)}_{\gamma(t)}$ aus den $U^\beta_{\gamma(u)}$, wie wir schon gesagt haben. Setzt man die rechte Seite von (1. 18) an Stelle von $U^\alpha_{\gamma(t)}$ in der linken Seite von (1. 17) ein, dann soll die Gleichung (1. 17) identisch gelten. Da wir den $U^\beta_{\gamma(t)}, U^\alpha_{\beta(r)}$ beliebige Werte geben können, muß die Produkttransformation der ersten zwei Transformationen von (1. 16) für beliebige bestimmte Werte von $p^\beta_{\gamma(t)}, p^\alpha_{\beta(r)}$ auch eine Transformation von der Gestalt (1. 4) sein, deren Koeffizienten die Funktionswerte $A^{\alpha(s)}_{\gamma(t)}$ für die durch (1. 6) gegebenen festen Werte $U^\alpha_{\gamma(t)}$ sind.

Im speziellen Fall $u^\gamma(u^\alpha) = \delta^\gamma_\alpha u^\alpha$ reduziert sich die Beziehung (1. 17) zu

$$\delta^{\alpha(s)}_{\gamma(t)} = \sum_{r=s}^{t} A^{\beta(r)}_{\gamma(t)} A^{\alpha(s)}_{\beta(r)}, \tag{1. 19}$$

dies zeigt daß die ersten zwei Transformationen von (1. 16) zueinander invers sind. Diese Tatsachen zusammenfassend erhält man den

**Satz 1. 4.** *Die Transformationen von der Gestalt* (1. 4) *bilden eine $H$-gliedrige Gruppe $G_H$, wenn wir die Werte von $u^\alpha$ festhalten, und die diesen Werten entsprechenden Werte der $U^\alpha_{\beta(r)}$ über alle reellen Werte laufen, wobei* $H=K\left\{\binom{K+M}{M}-1\right\}$ *ist.*

Die Gruppe $G_H$ nennen wir die erweiterte $K$-Parametergruppe, oder kürzlich $P_K$-Gruppe, am $P$-Punkt $u^\alpha$, und die Transformation der Gruppe $G_H$ die erweiterte $K$-Parametertransformation oder $P_K$-Transformation am $P$-Punkt $u^\alpha$.

**4.** Ziehen wir $\binom{K+M}{M}-1$ Funktionen $P_\alpha, P_{\alpha(2)}, \ldots, P_{\alpha(M)}$ der Parametern $u^\alpha$ in Betracht, die sich bei jeder Parametertransformation genau so wie $f_{/\alpha(s)}$ nach der Regel

$$P_{\beta(r)}=\sum_{s=1}^{r} A^{\alpha(s)}_{\beta(r)} P_{\alpha(s)} \tag{1.20}$$

verhalten, dann wollen wir den Inbegriff von diesen $\binom{K+M}{M}-1$ Werten $P_{\alpha(r)}$ für irgendein Wertesystem von $u^\alpha$ einen kovarianten $P_K$-Vektor vom Grad $M$ nennen. Unter einem kontravarianten $P_K$-Vektor vom Grad $M$ verstehen wir dagegen den Inbegriff von $\binom{K+M}{M}-1$ Werten $P^{\alpha(r)}$, die jede $P_K$-Transformation auf

$$P^{\beta(r)}=\sum_{s=1}^{r} A^{\beta(r)}_{\alpha(s)} P^{\alpha(s)} \tag{1.21}$$

überführt, wobei $A^{\beta(r)}_{\alpha(s)}$ die Koeffizienten der inversen Transformation von (1. 21) sind, d. h. diejenigen, die durch die Beziehung

$$\sum_{r=t}^{s} A^{\alpha(r)}_{\beta(s)} A^{\beta'(t)}_{\alpha(r)} = \delta^{\beta'(t)}_{\beta(s)}$$

bestimmt werden sollen.

Bemerkung. Die in [3] erklärte Definition für einen kontra- bzw. kovarianten $P$-Vektor steht im Gegensatz zu dieser Definition, somit muß „kontra- bzw. kovariant" in [3] als „ko- bzw. kontravariant" gelesen werden.

Ein Beispiel des ko- bzw. kontravarianten $P_K$-Vektors ist das Flächenelement $p^i_{\alpha(r)}$ bzw. $F^{\alpha(r)}_{;i}$ $(r=1, 2, \ldots, M)$.

Vom Begriff des $P_K$-Vektors aus können wir die Theorie von $P_K$-Tensoren auf analoge Weise wie in der gewöhnlichen Tensoranalysis bekommen.

Ferner verstehen wir unter einer kontra- bzw. kovarianten $P_K$-Vektordichte vom Gewichte $\mathfrak{k}$ den Inbegriff von Werten von $T^{\alpha(r)}$ bzw. $T_{\alpha(r)}$, die sich unter einer Parametertransformation nach der Regel verhalten:

$$T^{\beta(s)}=U^{\mathfrak{k}}\sum_{r=1}^{s}A^{\beta(s)}_{\alpha(r)}T^{\alpha(r)} \quad \text{bzw.} \quad T_{\beta(s)}U^{\mathfrak{k}}\sum_{r=1}^{s}A^{\alpha(r)}_{\beta(s)}T_{\alpha(r)}, \tag{1.22}$$

wobei $U$ die Determinante $|U^{\beta}_{\alpha}|$ bezeichnet. Eine $P_K$-Skalardichte oder $P_K$-Tensordichte kann auf analoge Weise definiert werden wie in der gewöhnlichen Tensoranalysis.

**5.** Mittels der Beziehung (1.13) erhält man den

**Satz 1.5.** *Es sei $T^{\alpha(r)}$ bzw. $T_{\alpha(r)}$ eine kontra- bzw. kovariante $P_K$-Vektordichte vom Grad $M$ und Gewicht $\mathfrak{k}$ bzw. $\mathfrak{k}'$, dann ist*

$$D^{\alpha(t)}(T,P)\overset{\text{def}}{=}\sum_{r=t}^{M}\binom{r}{t}T^{\alpha(t)\alpha(r-t)}P_{\alpha(r-t)} \qquad 1\leqq t\leqq M-1 \tag{1.23}$$

*eine kontravariante $P_K$-Vektordichte vom Grad $M-1$ und Gewicht $\mathfrak{k}+\mathfrak{k}'$.*

Beweis. Unter einer Parametertransformation ersehen wir

$$\begin{aligned}
D^{\beta(t)}(T,P)&=\sum_{r=t}^{M}\binom{r}{t}\sum_{s=1}^{r}A^{\beta(t)\beta(r-t)}_{\alpha(s)}T^{\alpha(s)}\sum_{u=1}^{r-t}A^{\alpha'(u)}_{\beta(r-t)}P_{\alpha'(u)}=\\
&=\sum_{r=t+1}^{M}\sum_{s=t}^{r}\sum_{v=0}^{s-r}\binom{s}{t+v}A^{(\beta(t)}_{(\alpha(t+v)}A^{\beta(r-t))}_{\alpha(s-t-v))}\sum_{u=1}^{r-t}A^{\alpha'(u)}_{\beta(r-t)}T^{\alpha(s)}P_{\alpha'(u)}=\\
&=\sum_{s=t+1}^{M}\sum_{v=0}^{s-t-1}\sum_{u=1}^{t-1}\binom{s}{t+v}A^{(\beta(t)}_{(\alpha(t+v)}\sum_{r=t-v}^{s-r}A^{\beta(r-t))}_{\alpha(s-t-v))}A^{\alpha'(u)}_{\beta(r-t)}T^{\alpha(s)}P_{\alpha'(u)}=\\
&=\sum_{s=t+1}^{M}\sum_{v=0}^{s-t-1}\binom{s}{t+v}A^{\beta(t)}_{(\alpha(t+v)}T^{\alpha(s)}P_{\alpha(s-t-v))}=\\
&=\sum_{v=0}^{M-t-1}A^{\beta(t)}_{(\alpha(t+v)}\left\}\sum_{s=t+v+1}^{M}\binom{s}{t+v}T^{\alpha(t+v)\alpha(s-t-v)}P_{\alpha(s-t-v))}\right\{ \qquad \text{B. z. w. z.}
\end{aligned}$$

Da die kontravariante $P_K$-Vektordichte $T^{\alpha(r)}$ in Satz 1.5 beliebig gewählt werden kann, lautet der

**Satz 1.6.** *$T^{\alpha(t)}$ sei eine kontravariante $P_K$-Vektordichte vom Grad $M$ und Gewichte $\mathfrak{k}$, dann ist*

$$T^{\alpha(r),\,\alpha'(s)}\overset{\text{def}}{=}\binom{r+s}{r}T^{\alpha(r)\alpha'(s)} \tag{1.24}$$

*eine kontravariante $P_K$-Tensordichte zweiter Stufe vom Gewichte $\mathfrak{k}$, die vom Grad $M'$ bzw. $M''$ in bezug auf die Indizes $\alpha(r)$ bzw. $\alpha'(s)$ ist, wobei die* *ganzen Zahlen $M'$ und $M''$ ausser der Beschränkung*

$$1 \leqq M' + M'' \leqq M$$

*beliebig gewählt werden können.*

**Zusatz.** *Wenn $T^{\alpha(r)}$ eine kontravariante $P_K$-Vektordichte vom Grad $M$ und Gewicht $\mathfrak{k}$ ist, dann ist*

$$D^{i,\alpha(t)}(T, p) \overset{\text{def}}{=} \sum_{s=1}^{M-t} \binom{t+s}{s} T^{\alpha(t)\alpha(s)} p^i_{\alpha(s)}$$

*eine kontravariante $P_K$-Vektordichte vom Grad $M-1$ und Gewicht $\mathfrak{k}$.*

(1.23) kann in die Gestalt

$$D^{\alpha(t)}(T, P) = \sum_{r=t+1}^{M} \binom{r}{t} T^{\alpha'(r)} P_{(\alpha'(r-t)} \delta^{\alpha(t)}_{\alpha'(t))}$$

geschrieben werden und $T^{\alpha(r)}$ darf eine beliebige Vektordichte sein, somit ergibt sich der

**Satz 1.7.** *$P_{\alpha(r-t)}$ sei eine kovariante $P_K$-Vektordichte vom Grad $M$ und Gewicht $\mathfrak{k}$, dann ist*

$$P^{\alpha(t)}_{\alpha'(r)} \overset{\text{def}}{=} \binom{r}{t} P_{(\alpha'(r-t)} \delta^{\alpha(t)}_{\alpha'(t))} \tag{1.25}$$

*eine gemischte $P_K$-Tensordichte zweiter Stufe vom Gewicht $\mathfrak{k}$, die vom Grad $M'$ bzw. $M''$ in bezug auf den kontra- bzw. kovarianten Index $\alpha(t)$ bzw. $\alpha'(r)$ ist, wobei die ganzen Zahlen $M'$ und $M''$ außer der Beschränkung*

$$1 \leqq M'' - M' \leqq M$$

*beliebig gewählt werden können.*

Aus dem letzten Satz folgt ohne weiteres der

**Satz 1.8.** *$P_{\alpha(t)}$ bzw. $Q_{\alpha(t)}$ sei je eine kovariante $P_K$-Vektordichte vom $M$ bzw. $M'$ und Gewichte $\mathfrak{k}$ bzw. $\mathfrak{k}'$, dann ist*

$$D_{\alpha(r)}(P, Q) \overset{\text{def}}{=} \sum_{s=1}^{M'} \binom{r}{s} P_{(\alpha(r-s)} Q_{\alpha(s))} \quad \text{für} \quad M' < r \leqq M + M' \tag{1.26}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \sum_{s=1}^{r-1} \binom{r}{s} P_{(\alpha(r-s)} Q_{\alpha(s))} \quad \text{für} \quad 1 \leqq r \leqq M'$$

*eine kovariante $P_K$-Vektordichte vom Grad $M + M'$ und Gewichte $\mathfrak{k} + \mathfrak{k}'$.*

**Zusatz.** *Wenn $P_{\alpha(r)}$ eine kovariante $P_K$-Vektordichte vom Grad $M$ und Gewichte $\mathfrak{k}$ ist, dann ist*

$$D^i_{\alpha(t)}(P, p) \overset{\text{def}}{=} \sum_{s=1}^{t-1} \binom{t}{s} P_{(\alpha(t-1)} p^i_{\alpha(s))}$$

*eine kovariante $P_K$-Vektordichte vom Grad $M+M'$ und Gewichte* $\mathfrak{k}$, *wobei $M'$ das Grad des Flächenelementes $p^i_{\alpha(s)}$ bedeutet.*

Die Sätze 1.5—8 können noch weiter verallgemeinert werden. Nämlich kann man aus einer kontra- bzw. kovarianten $P_K$-Vektordichte $T^{\alpha(r)}$ bzw. $P_{\alpha(r)}$ eine kontravariante bzw. gemischte $P_K$-Tensordichte $L$- bzw. $(L+1)$-ter Stufe

$$T^{\alpha(r_1),\,\alpha(r_2),\,\ldots,\,\alpha(r_L)} \overset{\text{def}}{=} \frac{(\Sigma r)!}{r_1!\,r_2!\ldots r_L!}\, T^{\alpha(r_1)\alpha(r_2)\ldots\alpha(r_L)}$$

bzw.

$$P^{\alpha'(r_1),\,\alpha'(r_2),\,\ldots,\,\alpha'(r_L)}_{\alpha(t)} \overset{\text{def}}{=} \frac{t!}{r_1!\,r_2!\ldots r_L!\,(t-\Sigma r)!}\, P_{(\alpha(t-\Sigma r)}\delta^{\alpha'(r_1)}_{\alpha(r_1)}\delta^{\alpha'(r_2)}_{\alpha(r_2)}\ldots\delta^{\alpha'(r_L)}_{\alpha(r_L))}$$

ableiten, wobei $\Sigma r = r_1 + r_2 + \cdots + r_L$ und $t > \Sigma r$ ist, und auch eine kontra- bzw. kovariante $P_K$-Vektordichte

$$D^{\alpha(t)}(T, \underset{1}{P}, \underset{2}{P}, \ldots, \underset{L}{P}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{r_1,\ldots,r_L} T^{\alpha(t),\,\alpha(r_1),\,\ldots,\,\alpha(r_L)}\, \underset{1}{P}_{\alpha(r_1)}\underset{2}{P}_{\alpha(r_2)}\ldots\underset{L}{P}_{\alpha(r_L)}$$

bzw.

$$D_{\alpha(t)}(P, \underset{1}{P}, \underset{2}{P}, \ldots, \underset{L}{P}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{r_1,\ldots,r_L} P^{\alpha(r_1),\,\ldots,\,\alpha(r_L)}_{\alpha(t)}\, \underset{1}{P}_{\alpha(r_1)}\underset{2}{P}_{\alpha(r_2)}\ldots\underset{L}{P}_{\alpha(r_L)},$$

die von der Reihenfolge der beliebig vorgegebenen $P_K$-Vektordichten $\underset{1}{P}_{\alpha(r)}$, $\underset{2}{P}_{\alpha(r)}, \ldots, \underset{L}{P}_{\alpha(r)}$ ganz unabhängig bestimmt ist.[6])

Aber wir möchten hier nicht auf die Einzelheiten über diese Tatsachen weiter eingehen, sondern diese in einer anderer Arbeit vorstellen.

## § 2. Erweiterte Rheonomtransformationen.

**6.** Außer der Parametertransformation $u^{\beta} = u^{\beta}(u^{\alpha})$ in $P_K$, ziehen wir eine Koordinatentransformation $x^{a} = x^{a}(x^{i}, u^{\alpha})$ in der Mannigfaltigkeit $X_N$ in Betracht, die vom Punkt $u^{\alpha}$ in $P_K$ abhängig sein mag. Weiter setzen wir voraus, daß die Determinante $|\partial x^{a}/\partial x^{i}|$ im betreffenden Bereich von Null verschieden ist. Dann kommt eine Transformation der Form

$$x^{a} = x^{a}(x^{i}, u^{\alpha}), \quad u^{\beta} = u^{\beta}(u^{\alpha}) \tag{2.1}$$

in der Produktmannigfaltigkeit $X_N \times P_K$ vor. Diese Transformation heißt eine $K$-fach verallgemeinerte Rheonomtransformation oder kurz $R_K$-Transformation aus dem Grunde daß, wenn $K=1$ ist und die einzige Veränderliche $u$ als Zeitsveränderliche aufgefaßt wird, so ist $x^{a} = x^{a}(x^{i}, t)$ nichts anderers als eine Rheonomtransformation.

---

[6]) Vergleichen mit den Sätze 19—24 in [4].

Eine $R_K$-Transformation gibt Anlaß zu der folgenden erweiterten Transformation für ein Flächenelement $M$-ter Ordnung auf einer $K$-dimensionalen Fläche $x^i = x^i(u^\alpha)$:

$$(2.2)\quad \begin{cases} u^\beta = u^\beta(u^\alpha), \quad x^a = x^a(x^i, u^\alpha), \quad p^a_\beta = \{X^a_i p^i_\alpha + X^a_\alpha\} U^\alpha_\beta, \ldots, \\ p^a_{\beta(M)} = p^i_{\alpha(M)} X^a_i U^{(\alpha_1}_{\beta_1} U^{\alpha_2}_{\beta_2} \ldots U^{\alpha_M)}_{\beta_M} + R^a_{\beta(M)}(u^\alpha, x^i, p^i_\alpha, \ldots, p^i_{\alpha(M-1)}), \end{cases}$$

wobei

$$X^a_i = \frac{\partial x^a}{\partial x^i}, \quad X^a_\alpha = \frac{\partial x^a}{\partial u^\alpha}, \quad U^\alpha_\beta = \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^\beta}$$

sind, und die Funktionen $R^a_{\beta(M)}$ Polynome von $p^i_\alpha, p^i_{\alpha(2)}, \ldots, p^i_{\alpha(M-1)}$ und von $U^\alpha_\beta, U^\alpha_{\beta(2)}, \ldots, U^\alpha_{\beta(M)}$ sind. Die Transformation (2.2) nennen wir die erweiterte $R_K$-Transformation, die einen $P_K$-Expunkt $(u^\alpha, x^i, p^i_\alpha, \ldots, p^i_{\alpha(M)})$ zu einem $P_K$-Expunkt $(u^\beta, x^a, p^a_\beta, \ldots, p^a_{\beta(M)})$ überträgt, wenn $u^\alpha, x^i, p^i_\alpha, \ldots, p^i_{\alpha(M)}$ voneinander unabhängig sind, d. h. ein beliebiges Element in der Mannigfaltigkeit $M_{(N, M, K)}$ wählbar ist.

**7.** Vor allem sollen wir die Form der Funktionen $R^a_{\alpha(M)}$ eingehend diskutieren. Als Vorbereitung dafür setzen wir $p^i_{\alpha(r)}$ anstatt von $U^{\alpha}_{\beta(r)}$ in (1.6), dann ergibt sich der Ausdruck

$$(2.3)\quad P^{i(t)}_{\alpha(t+s)} \overset{\text{def}}{=} \sum_{(v)} \frac{(t+s)!}{v_1!\, v_2! \ldots v_t!\, w_1!\, w_2! \ldots w_{s+1}!} p^{(i_1}_{\alpha(v_1)} p^{i_2}_{\alpha(v_2)} \ldots p^{i_t)}_{\alpha(v_t))},$$

welcher nur von den $p^i_{\alpha(r)}$ besteht. Da diese $p^{i(t)}_{\alpha(r)}$ von derselben Gestalt wie die $A^{\alpha(t)}_{\beta(r)}$ sind, müssen sie bekanntlich dieselbe Eigenschaften wie die $A^{\alpha(t)}_{\beta(r)}$ haben. Daraus können wir die folgenden Sätze leicht entnehmen.

**Satz 2.1.** *Die $P^{i(t)}_{\alpha(r)}$ erfüllen die Beziehungen*

$$(2.4)\quad \begin{cases} P^i_{\alpha(r)} = p^i_{\alpha(r)}, \; P^{i(s)}_{\alpha(r)} = P^{(i(s-1)}_{(\alpha(r-1)} p^{i_s)}_{\alpha_r)} + \dfrac{{}^*\partial}{\partial u^{\alpha_r}} P^{i(s)}_{\alpha(r-1)} \quad \text{für} \quad 1 < s < r \\ P^{i(r)}_{\alpha(r)} = p^{(i_1}_{\alpha_1} p^{i_2}_{\alpha_2} \ldots p^{i_r)}_{\alpha_r}. \end{cases}$$

**Satz 2.2.** *Es gilt die Beziehung*

$$(2.5)\quad \frac{\partial}{\partial p^j_{\alpha'(t)}} P^{i(s)}_{\alpha(r)} = \binom{r}{t} \delta^{(i_1}_j P^{i(s-1))}_{(\alpha(r-t)} \delta^{\alpha'(t)}_{\alpha(t))},$$

*wobei $P^{i(o)}_{\alpha(r)} = 0$ für $r \geqq 1$, $P^{i(o)}_{\alpha(o)} = 1$ und $P^{i(s)}_{\alpha(r)} = 0$ für $r < 0$.*

**Zusatz.** *Die $P^{i(s)}_{\alpha(r+1)}$ kann in die folgende Gestalt umgeschrieben werden:*

$$(2.6)\quad P^{i(s)}_{\alpha(r+1)} = \sum_{t=0}^{r-s+1} \binom{r}{t} P^{(i(s-1)}_{(\alpha(r-t)} P^{i_s)}_{\alpha(t+1))}.$$

**Satz 2.3.** *Für eine ganze Zahl $l$ ergibt sich die Beziehung*

$$\binom{s}{l} P^{i(s)}_{\alpha(r)} = \sum_{t=0}^{r-s} \binom{r}{l+t} P^{(i(l)}_{(\alpha(l+t)} P^{i(s-l))}_{\alpha(r-l-t))}, \qquad r \geqq s \geqq l \geqq 1. \tag{2.7}$$

**Zusatz 1.** *Für $r+1 \geqq s \geqq 1$ besteht die Beziehung*

$$P^{i(s)}_{\alpha(r+1)} = \frac{1}{s} \sum_{t=0}^{r-s+1} \binom{r+1}{t+1} P^{(i(s-1)}_{(\alpha(r+t)} p^{i_s)}_{\alpha(t+1))}. \tag{2.8}$$

**Zusatz 2.** *Wenn $r+1 \geqq s \geqq 1$ ist, so ergibt sich die Identität*

$$\sum_{t=0}^{r-s+1} \left\{ \frac{1}{s} \binom{r+1}{t+1} - \binom{r}{t} \right\} P^{(i(s-1)}_{(\alpha(r-t)} p^{i_s)}_{\alpha(t+1))} \equiv 0. \tag{2.9}$$

**8.** Denken wir uns eine hinreichend oft differenzierbare Funktion $f(x^i, u^\alpha)$ der $x^i$ und der $u^\alpha$, und führen wir die folgende Bezeichnung für ihre Ableitungen ein:

$$f_{,\, i(t)\alpha(s)} \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{\partial^{t+s} f}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \ldots \partial x^{i_t} \partial u^{\alpha_1} \partial u^{\alpha_2} \ldots \partial u^{\alpha_s}}, \tag{2.10}$$

dann folgt

**Satz 2.4.** *$f(x^i, u^\alpha)$ sei eine hinreichend oft differenzierbare Funktion der $x^i$ und der $u^\alpha$, dann ergibt sich*

$$f_{/\alpha(r)} = \sum_{s=0}^{r} \sum_{t=0}^{r-s} \binom{r}{s} f_{,\, i(t)(\alpha(s)} P^{i(t)}_{\alpha(r-s))}. \tag{2.11}$$

Beweis. Wir wollen den Satz durch Induktion bezüglich $r$ beweisen. (2.11) ist offenbar richtig für $r=1$, wie wir leicht ersehen können. Unter der Voraussetzung daß (2.11) für eine feste ganze Zahl $r$ richtig ist, bekommen wir aus (2.11) durch nochmalige Differenzierung nach $\alpha_{r+1}$

$$f_{/\alpha(r+1)} = \sum_{s=0}^{r} \sum_{t=0}^{r-s} \binom{r}{s} \{ f_{,\, i(t)(\alpha(s)} P^{i(t)}_{\alpha(r-s))} p^{i_{t+1}}_{\alpha_{r+1}} + f_{,\, i(t)(\alpha(s)} P^{i(t)}_{\alpha(r-s))/\alpha_{r+1}} +$$

$$+ f_{,\, i(t)(\alpha(s+1)} P^{i(t)}_{\alpha(r-s))} \}.$$

Setzen wir $t-1$ an Stelle von $t$ in dem ersten Glied und $s-1$ an Stelle von $s$ in dem dritten in den geschweiften Klammern, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (2.6)

$$f_{/\alpha(r+1)} = \sum_{s=0}^{r} \sum_{t=0}^{r-s+1} \binom{r}{s} f_{,\, i(t)(\alpha(s)} P^{i(t)}_{\alpha(r-s+1))} + \sum_{s=1}^{r+1} \sum_{t=0}^{r-s+1} \binom{r}{s-1} f_{,\, i(t)(\alpha(s)} P^{i(t)}_{\alpha(r-s+1))} =$$

$$= \sum_{s=0}^{r+1} \sum_{t=0}^{r+1-s} \binom{r+1}{s} f_{,\, i(t)(\alpha(s)} P^{i(t)}_{\alpha(r-s+1))}. \qquad \text{B. z. w. z.}$$

Durch eine Parametertransformation $u^{\beta}=u^{\beta}(u^{\alpha})$ erhalten wir wegen (1.4) und Satz 2.4

$$f_{/\beta(s)}=\sum_{u=1}^{r}\sum_{s=0}^{u}\sum_{t=0}^{u-s}\binom{u}{s}f_{,i(t)(\alpha(s)}P^{i(t)}_{\alpha(r-s))}\,A^{\alpha(s)}_{\beta(r)}. \tag{2.12}$$

Setzen wir die Funktionen $x^{a}(x^{i},u^{\alpha})$ an Stelle von $f$, so folgt daraus unmittelbar die gesuchte Gestalt der transformierten $p^{a}_{\beta(r)}$:

**Satz 2.5.** *Unter einer $R_K$-Transformation verändert sich ein Flächenelement M-ter Ordnung auf einer K-dimensionalen Fläche nach der Regel:*

$$p^{a}_{\beta(r)}=\sum_{u=1}^{r}\sum_{s=0}^{u}\sum_{t=0}^{u-s}\binom{u}{s}X^{a}_{,i(t)(\alpha(s)}P^{i(t)}_{\alpha(u-s))}A^{\alpha(u)}_{\beta(r)}, \tag{2.13}$$

*wobei*

$$X^{a}_{,i(t)\alpha(s)}\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial^{t+s}x^{a}}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_t}\partial u^{\alpha_1}\dots\partial u^{\alpha_s}}$$

*ist.*

Satz 2.5 ist sehr wichtig, denn durch diesen Satz wird die Transformationsweise eines Flächenelementes $M$-ter Ordnung unter einer $R_K$-Transformation vollständig dargestellt und alle Ergebnisse über $R_K$-Transformationen können aus dem Satz abgeleitet werden, wie man im Folgenden sehen kann.

Unter Berücksichtigung von (1.13), erhalten wir aus Satz 2.5 ohne weiteres den

**Zusatz 1.** (2.13) *kann in der folgenden Gestalt dargestellt werden:*

$$p^{a}_{\beta(r)}=\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}X^{a}_{,i(t),(\beta(s)}P^{i(t)}_{\beta(r-s))},$$

*wobei*

$$X^{a}_{,i(t),\beta(s)}=\sum_{u=1}^{s}X^{a}_{,i(t)\alpha(u)}A^{\alpha(u)}_{\beta(s)},\qquad P^{i(t)}_{\beta(r-s)}=\sum_{u=s+1}^{r}P^{i(t)}_{\alpha(u-s)}A^{\alpha(u-s)}_{\beta(r-s)}$$

*ist.*

**Zusatz 2.** *Eine verallgemeinerte Skleronomtransformation: $x^{a}=x^{a}(x^{i})$, $u^{\beta}=u^{\beta}(u^{\alpha})$ trägt $p^{i}_{\alpha(r)}$ in $p^{a}_{\beta(r)}$ folgendermaßen über:*

$$p^{a}_{\beta(r)}=\sum_{u=1}^{r}\sum_{t=1}^{u}X^{a}_{,i(t)}P^{i(t)}_{\alpha(u)}A^{\alpha(u)}_{\beta(r)}. \tag{2.13$_{\text{bis}}$}$$

Mit Hilfe von (2.5) geht aus Satz 2.5 folgender Satz hervor:

**Satz 2.6.** *Für eine $R_K$-Transformation besteht für $r\geqq v\geqq 1$*

$$\frac{\partial p^{a}_{\beta(r)}}{\partial p^{j}_{\alpha'(v)}}=\sum_{w=0}^{r-v}\binom{r}{v+w}\sum_{u=v}^{r}\left\{\sum_{s=0}^{u-v}\sum_{t=1}^{u-s}\binom{u-v}{s}X^{a}_{j,i(t-1)(\alpha(s)}P^{i(t-1)}_{\alpha(u-v-s))}\right\}A^{\alpha(u-v)}_{(\beta(r-v-w)}A^{\alpha'(v)}_{\beta(v+w))}=$$

$$=\sum_{w=0}^{r-v}\binom{r}{v+w}X^{a}_{j/(\beta(r-v-w)}A^{\alpha'(v)}_{\beta(v+w))}, \tag{2.14}$$

*falls wir*

$$\sum_{u=v}^{r} X^{a}_{j/\alpha(u-v)} A^{\alpha(u-v)}_{\beta(r-v-w)} = X^{a}_{j/\beta(r-v-w)}$$

*setzen.*

BEWEIS. Differenzieren wir (2. 13) nach $p^{j}_{\alpha'(v)}$ so folgt wegen (2. 5)

$$\frac{\partial p^{a}_{\beta(r)}}{\partial p^{j}_{\alpha'(v)}} = \sum_{u=1}^{r} \sum_{s=0}^{u} \sum_{t=0}^{u-s} \binom{u}{s} X^{a}_{,\, i(t)(\alpha(s)} \binom{u-s}{v} P^{(i(t-1)}_{\alpha(u-s-v)} \delta^{i_t)}_{|j|} \delta^{\alpha'(v)}_{\alpha(v))} A^{\alpha(u)}_{\beta(r)} =$$

$$= \sum_{u=v}^{r} \sum_{s=0}^{u-v} \sum_{t=1}^{u-s} \binom{u}{v} \binom{u-v}{s} X^{a}_{j,\, i(t-1)\alpha(s)} P^{i(t-1)}_{\alpha(u-s-v)} A^{\alpha(u-v)\alpha'(v)}_{\beta(r)},$$

benützen wir (1. 13) und vertauschen wir dann den Summationszeichen in geeigneter Weise, so folgt

$$= \sum_{w=0}^{r-v} \binom{r}{v+w} \sum_{u=v}^{r} \sum_{s=0}^{u-v} \sum_{t=1}^{u-s} \binom{u-v}{s} X^{a}_{j,\, i(t-1)(\alpha(s)} P^{i(t-1)}_{\alpha(u-v-s))} A^{\alpha'(v)}_{(\beta(v+w)} A^{\alpha(u-v)}_{\beta(r-v-w))},$$

daraus folgt (2. 14) wegen (2. 11).

**Zusatz 1.** (SUGURI).[7]) *Wenn die Parameter unverändert bleiben, so ist*

$$\text{(2. 14)}_1 \qquad \frac{\partial p^{a}_{\alpha(r)}}{\partial p^{j}_{\alpha'(v)}} = \binom{r}{v} X^{a}_{j/(\alpha(r-v)} \delta^{\alpha'(v)}_{\alpha(v))} \qquad \textit{für} \quad r \geqq v.$$

Denn es ist $A^{\alpha'(v)}_{\alpha(v+w)} = 0$ für $w \geqq 1$ und $A^{\alpha'(v)}_{\alpha(v)} = \delta^{\alpha'(v)}_{\alpha(v)}$.

**Zusatz 2.** *Unter eine Skleronomtransformation ist*

$$\text{(2. 14)}_2 \qquad \frac{\partial p^{a}_{\beta(r)}}{\partial p^{j}_{\alpha'(v)}} = \sum_{w=0}^{r-v} \binom{r}{v+w} A^{\alpha'(r)}_{(\beta(v+w)} \sum_{u=v}^{r} A^{\alpha(u-v)}_{\beta(r-v-w)} \left\{ \sum_{t=1}^{u} X^{a}_{j,\, i(t-1)} P^{i(t-1)}_{\alpha(u-v)} \right\} =$$

$$= \sum_{w=0}^{r-v} \binom{r}{v+w} X^{a}_{j,\, (\beta(r-v-w)} A^{\alpha'(v)}_{\beta(v+w))},$$

*falls wir*

$$X^{a}_{j,\, \beta(r-v-w)} = \sum_{u=0}^{r} X^{a}_{j,\, \alpha(u-v)} A^{\alpha(u-v)}_{\beta(r-v-w)}$$

*setzen.*

**Zusatz 3.**[8]) *Für eine Skleronomtransformation besteht*

$$\text{(2. 14)}_3 \qquad \frac{\partial p^{a}_{\alpha(r)}}{\partial p^{j}_{\alpha'(v)}} = \binom{r}{v} X^{a}_{j,\, (\alpha(r-v)} \delta^{\alpha'(v)}_{\alpha(v))},$$

*wenn die Parameter erhalten bleiben.*

---

[7]) SUGURI [8].

[8]) OHKUBO [10], KAWAGUCHI [6].

**Zusatz 4.**[9]) *Wenn man nur die Parameter verändert, dann ist*

$$\frac{\partial p^i_{\beta(r)}}{\partial p^j_{\alpha(v)}} = \delta^i_j A^{\alpha(v)}_{\beta(r)} . \tag{2.14$_4$}$$

**Satz 2.7.** *Eine $R_K$-Transformation oder Skleronomtransformation gibt Anlaß zu*

$$\frac{\partial p^a_{\beta(r)}}{\partial p^j_{\alpha(v)}} = \binom{v}{l}^{-1} \sum_{t=0}^{r-l} \binom{r}{l+t} \frac{\partial p^a_{(\beta(r-l-t)}}{\partial p^j_{(\alpha(v-l)}} A^{\alpha(l))}_{\beta(l+t))} \tag{2.15}$$

*für $r \geqq v \geqq l \geqq 1$, wobei $l$ eine beliebig bestimmte ganze Zahl ist, für welche $v \geqq l \geqq 1$.*

Beweis. Satz 2.6 zeigt uns

$$\frac{\partial p^a_{\beta(r-l-t)}}{\partial p^j_{\alpha(v-l)}} = \sum_{u=0}^{r-v-t} \binom{r-l-t}{v-l+u} X^a_{j/(\beta(r-t-v-u)} A^{\alpha(v-l)}_{\beta(v-l+u))} ,$$

daher soll die rechte Seite dem folgenden Ausdruck gleich sein:

$$\binom{v}{l}^{-1} \sum_{t=0}^{r-l} \binom{r}{l+t} \sum_{u=0}^{r-v-t} \binom{r-l-t}{v-l+u} X^a_{j/(\beta(r-t-v-u)} A^{(\alpha(l)}_{\beta(l+t)} A^{\alpha(v-l))}_{\beta(v-l+u))} =$$

$$= \binom{v}{l}^{-1} \sum_{t=0}^{r-l} \binom{r}{l+t} \sum_{w=t}^{r-v} \binom{r-l-t}{r-v-w} X^a_{j/(\beta(r-v-w)} A^{(\alpha(l)}_{\beta(l+t)} A^{\alpha(v-l))}_{\beta(v-l-t+w))} =$$

$$= \binom{v}{l}^{-1} \sum_{w=0}^{r-v} \sum_{t=0}^{w} \binom{r}{v+w} \binom{v+w}{l+t} X^a_{j/(\beta(r-v-w)} A^{(\alpha(l)}_{\beta(l+t)} A^{\alpha(r-l))}_{\beta(r-l-t+w))} =$$

$$= \sum_{w=0}^{r-v} \binom{r}{v+w} X^a_{j/(\beta(r-v-w)} A^{\alpha(v)}_{\beta(v+w))} = \frac{\partial p^a_{\beta(r)}}{\partial p^j_{\alpha(v)}} ,$$

was aus (1.13) und Satz 2.5 folgt,

**Zusatz** (Suguri)[10]). *Wenn die Parameter unverändert bleiben, ergibt sich für eine $R_K$-Transformation oder Skleronomtransformation*

$$\frac{\partial p^a_{\alpha(r)}}{\partial p^i_{\alpha'(s)}} = \frac{r!\,(s-l)!}{s!\,(r-l)!} \delta^{(\alpha'(l)}_{(\alpha(l)} \frac{\partial p^a_{\alpha(r-l))}}{\partial p^i_{\alpha'(s-l))}} . \tag{2.15$_{\text{bis}}$}$$

**Satz 2.8.** *Es besteht*

$$\frac{\partial p^a_{\beta(r+1)}}{\partial p^j_{\alpha(v)}} = \frac{\partial p^a_{(\beta(r)}}{\partial p^j_{(\alpha(v-1)}} U^{\alpha_v)}_{\beta_{r+1})} + \left(\frac{\partial p^a_{(\beta(r)}}{\partial p^j_{\alpha(v)}}\right)_{/\beta_{r+1})} .$$

---

[9]) Kawaguchi [6], Hombu—Suguri [9].

[10]) Suguri [8], Kawaguchi [6].

BEWEIS. Wegen des Satzes 2.6 kann die rechte Seite in die folgende Form umgeschrieben werden:

$$\sum_{w=0}^{r-v+1}\binom{r}{v+w}X^{a}_{j/(\beta(r-v-w+1)}A^{(\alpha(v-1)}_{\beta(v-1+w)}U^{\alpha_v)}_{\beta_{r+1})}+$$

$$+\sum_{w=0}^{r-v}\binom{r}{v+w}X^{a}_{j/(\beta(r-v-w)}A^{\alpha(v)}_{\beta(v+w)/\beta_{r+1})}+\sum_{w=0}^{r-v}\binom{r}{v+w}X^{a}_{j/(\beta(r-v-w+1)}A^{\alpha(v)}_{\beta(v+w))}\ ,$$

setzen wir $w-1$ an Stelle von $w$ im zweiten Glied und fassen wir dasselbe mit dem ersten Glied zusammen, so folgt

$$=\sum_{w=0}^{r-v+1}\binom{r}{v+w-1}X^{a}_{j/(\beta(r+1-v-w)}\{A^{(\alpha(v-1)}_{\beta(v-1+w)}A^{\alpha_v)}_{\beta_{r+1})}+A^{\alpha(v)}_{\beta(v+w-1)/\beta_{r+1})}\}+$$

$$+\sum_{w=0}^{r-v}\binom{r}{v+w}X^{a}_{j/(\beta(r+1-v-w)}A^{\alpha(v)}_{\beta(v+w))}=$$

$$=\sum_{w=0}^{r+1-v}\binom{r}{v+w}X^{a}_{j/(\beta(r+1-v-w)}A^{\alpha(v)}_{\beta(v+w))}=\frac{\partial p^{a}_{\beta(r+1)}}{\partial p^{j}_{\alpha(v)}}\,,$$

wobei (1.5) und die Identität $\binom{r}{v+w-1}+\binom{r}{v+w}=\binom{r+1}{v+w}$ angewendet worden sind.

Satz 2.5 liefert uns ohne weiteres

$$\frac{\partial p^{a}_{\beta(r)}}{\partial x^{j}}=\sum_{u=1}^{r}\sum_{s=0}^{u}\sum_{t=0}^{u-s}\binom{u}{s}X^{a}_{j,\,i(t)(\alpha(s)}P^{i(t)}_{\alpha(u-s))}A^{\alpha(u)}_{\beta(r)}=$$

$$=\sum_{u=1}^{r}X^{a}_{j/\alpha(u)}A^{\alpha(u)}_{\beta(r)}=X^{a}_{j/\beta(r)}\,,$$

denn die $x^j$ sind nur in den $X^{a}_{,\,i(t)\alpha(s)}$ enthalten. Weiter können wir durch Induktion leicht bewiesen, daß $X^{a}_{j/\beta(r)\beta'(t)}=X^{a}_{j/\beta(r)/\beta'(t)}$ ist. Damit erhalten wir den

**Satz 2.9.** *Es besteht die Beziehung*

$$\frac{\partial p^{a}_{\beta(r)\beta'(s)}}{\partial x^{j}}=\left(\frac{\partial p^{a}_{\beta(r)}}{\partial x^{j}}\right)_{/\beta'(s)}=X^{a}_{j/\beta(r)\beta'(s)}\,. \tag{2.16}$$

**Zusatz.** $(\partial p^{a}_{\beta(r)}/\partial x^{j})_{/\beta'(s)}$ *ist in Bezug auf die beiden Indizes* $\beta(r)$ *und* $\beta'(s)$ *symmetrisch.*

**Satz 2.10.** *Eine $R_K$-Transformation gibt uns*

$$\frac{\partial p^{a}_{\beta(r)\beta'(s)}}{\partial u^{\alpha}}=\left(\frac{\partial p^{a}_{\beta(r)}}{\partial u^{\alpha}}\right)_{/\beta'(s)}-\sum_{t=1}^{s}\binom{s}{t}U^{\beta''}_{\alpha/(\beta'(t)}p^{a}_{|\beta''|\beta(r)/\beta'(s-t))}\,, \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial p^{a}_{\beta(r)}}{\partial u^{\alpha}}=X^{a}_{\alpha/\beta(s)}-\sum_{t=1}^{s}\binom{s}{t}U^{\beta'}_{\alpha/(\beta(t)}p^{a}_{|\beta'|\beta(s-t))}\,, \tag{2.18}$$

*wobei*

$$U^{\beta'}_{\alpha/\beta(t)} = \sum_{r=1}^{t} U^{\beta'}_{\alpha/\alpha'(r)} A^{\alpha'(r)}_{\beta(t)}$$

*ist.*

BEWEIS. Aus (2. 13) folgt

$$\frac{\partial p^{a}_{\beta(s)}}{\partial u^{\alpha}} = \sum_{u=1}^{s} \sum_{v=0}^{u} \sum_{t=0}^{u-v} \binom{u}{v} X^{a}_{\alpha,\, i(t)(\alpha'(v)} P^{i(t)}_{\alpha'(u-v))} A^{\alpha'(u)}_{\beta(s)} +$$

$$+ \sum_{u=1}^{s} \sum_{v=0}^{u} \sum_{t=0}^{u-v} \binom{u}{v} X^{a}_{,\, i(t)(\alpha'(v)} P^{i(t)}_{\alpha'(u-v))} A^{\alpha'(u)}_{\beta(s),\, \beta'} U^{\beta'}_{\alpha}.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite ist gleich $X^{a}_{\alpha/\beta(s)}$, was man wegen (2. 12) leicht einsehen kann, und das zweite Glied geht wegen (2. 12) in $\sum_{u=1}^{s} X^{a}_{/\alpha'(u)} A^{\alpha'(u)}_{\beta(s),\beta'} U^{\beta'}_{\alpha'}$ über. Andererseits erhält man unter Berücksichtigung von (1. 12)

$$A^{\alpha'(u)}_{\beta(s),\,\beta'} = \sum_{t=0}^{s-u+1} \binom{s}{t} A^{(\alpha'(u-1)}_{(\beta(s-t)} U^{\alpha'_u)}_{\beta(t)\beta')}$$

und, differenzieren wir $t$-mal $U^{\alpha}_{\beta} U^{\beta}_{\alpha'} = \delta^{\alpha}_{\alpha'}$ nach $u^{\beta}$, so folgt

$$0 = U^{\alpha}_{\beta'/\beta(t)} U^{\beta'}_{\alpha'} + \sum_{r=1}^{t} \binom{t}{r} U^{\alpha}_{\beta'/(\beta(t-r)} U^{\beta'}_{|\alpha'|/\beta(r))}.$$

Deshalb ist das zweite Glied gleich

$$\sum_{u=1}^{s} X^{a}_{/\alpha(u)} \sum_{t=0}^{s-u+1} \binom{s}{t} A^{(\alpha(u-1)}_{(\beta(s-t)} U^{\alpha_u)}_{\beta(t)),\,\beta'} U^{\beta'}_{\alpha'} =$$

$$= - \sum_{u=1}^{s} X^{a}_{/\alpha(u)} \sum_{t=0}^{s-u+1} \binom{s}{t} A^{(\alpha(u-1)}_{(\beta(s-t)} \sum_{r=1}^{t} \binom{t}{r} U^{\alpha_u)}_{|\beta'|/\beta(t-r)} U^{\beta'}_{|\alpha'|/\beta(r))} =$$

$$= - \sum_{u=1}^{s} X^{a}_{/\alpha(u)} \sum_{r=1}^{s-u+1} \binom{s}{r} \left\{ \sum_{t=0}^{s-u+1} \binom{s-r}{t-r} A^{(\alpha(u-1)}_{(\beta(s-t)} U^{\alpha_u)}_{|\beta'|/\beta(t-r)} \right\} U^{\beta'}_{|\alpha'|/\beta(r))},$$

benützen wir (1. 12), so folgt

$$= - \sum_{u=1}^{s} X^{a}_{/\alpha(u)} \sum_{r=1}^{s-u+1} \binom{s}{r} A^{\alpha(u)}_{\beta'(\beta(s-r)} U^{\beta'}_{|\alpha'|/\beta(r))} =$$

$$= - \sum_{r=1}^{s} \binom{s}{r} X^{a}_{\beta'/(\beta(s-r)} U^{\beta}_{|\alpha'|\beta(r))}.$$

D. h. (2. 18) ist jetzt bewiesen worden. (2. 17) kann auch in analoger Weise wie (2. 18), bewiesen werden, aber man soll dabei $p^{a}_{\beta(r)}$ anstatt $X^{a}$ nehmen.

**9.** In analoger Weise wie für einen gewöhnlichen Extensor[11]), verstehen wir unter einem $R_K$-Extensor einen Tensor in bezug auf jede der beiden linearen Transformationen

$$V^{a}_{\beta(r)} = \sum_{t=0}^{r} \frac{\partial p^{a}_{\beta(r)}}{\partial p^{j}_{\alpha(t)}} V^{j}_{\alpha(t)}, \quad P_{\beta(r)} = \sum_{t=1}^{r} A^{\alpha(t)}_{\beta(r)} P_{\alpha(t)}, \tag{2.19}$$

die aus der erweiterten $R_K$-Transformation (2. 2) hergeleitet werden. Zum Beispiel, wir nennen die Größen $V^{i}_{\alpha(t),\alpha'(s)}$ $(t=0, 1, \ldots, G;\ s=0, 1, \ldots, G')$ die Bestimmungszahlen eines $R_K$-Extensors zweiter Stufe vom Gewichte $\mathfrak{k}$ und $P_K$-Gewichte $\mathfrak{k}'$, der in Bezug auf die Indizes ${}^{i}_{\alpha(t)}$ bzw. $\alpha'(s)$ exkontravariant vom Grad $G$ bzw. $P_K$-kovariant vom Grad $G'$ ist, wenn bei der erweiterten $R_K$-Transformation die Größen sich nach der Regel transformieren:

$$V^{a}_{\beta(r)\beta'(s)} = \Delta^{-k} U^{-k'} \sum_{t=0}^{r} \sum_{u=1}^{s} \frac{\partial p^{a}_{\beta(r)}}{\partial p^{j}_{\alpha(t)}} A^{\alpha'(u)}_{\beta'(s)} V^{j}_{\alpha(t)\alpha'(u)},$$

während $\Delta$ bzw. $P$ die Determinante $|\partial x^{a}/\partial x^{j}|$ bzw. $|\partial u^{\beta}/\partial u^{\alpha}|$ bedeutet. Wegen (2. 2) kommt die Beziehung

$$d p^{a}_{\beta(r)} = \sum_{t=0}^{r} \frac{\partial p^{a}_{\beta(r)}}{\partial p^{i}_{\alpha(t)}} d p^{i}_{\alpha(t)} + \frac{\partial p^{i}_{\beta(r)}}{\partial u^{\alpha}} d u^{\alpha}$$

vor, die entlang einer das Element $p^{i}_{\alpha(t)}$ berührenden $K$-dimensionalen Fläche in

$$p^{a}_{\beta(r)\beta'} d u^{\beta'} = \sum_{t=0}^{r} \frac{\partial p^{a}_{\beta(r)}}{\partial p^{i}_{\alpha(t)}} p^{i}_{\alpha(t)\alpha'} d u^{\alpha'} + \frac{\partial p^{i}_{\beta(r)}}{\partial u^{\alpha}} d u^{\alpha}$$

übergeht. Somit sind die Gößen

$$\vartheta p^{i}_{\alpha(t)} = d p^{i}_{\alpha(t)} - p^{i}_{\alpha(t)\alpha'} d u^{\alpha'}, \qquad t=0, 1, \ldots, M$$

die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten Extensors erster Stufe vom Grad $M$. Wenn man das Koordinatensystem festhält und nur die Parameter $u^{\alpha}$ transformiert, dann zeigt der Zusatz 3 von Satz 2. 6, daß die Größen $\vartheta p^{i}_{\alpha(t)}$ Bestimmungszahlen eines kovarianten $P_K$-Vektors vom Grad $M$ sind. Ein Beispiel von exkovarianten $R_K$-Extensoren ist $F^{\alpha(r)}_{;i}$, während $F$ ein Skalar ist.

Der Zusatz von Satz 2. 6 zeigt uns ohne weiteres den

**Satz 2. 11**. *Ein $R_K$-Extensor ist auch ein gewöhnlicher Extensor von derselben Art in Bezug auf eine Skleronomtransformation und gleichzeitig $P_K$-Tensor in Bezug auf eine Parametertransformation.*

---

[11]) Craig [11], Suguri [8], Kawaguchi [2], [6].

**10.** Berücksichtigt man Satz 2.6, so kann man in analoger Weise wie im Falle der gewöhnlichen Extensoren leicht den folgende Satz erkennen:

**Satz 2.12.** *Die Funktionen $V^i$ von den Parametern $u^\alpha$ seien die Bestimmungszahlen eines kontravarianten starken Vektors in Bezug auf die $R_K$-Transformation* (2.1), *dann sind $V^i_{/\alpha(t)}$ $(t=0, 1, \ldots, G)$ die Bestimmugszahlen eines exkontravarianten $R_K$-Extensors erster Stufe vom Grad $G$.*

Beweis. Aus der Transformationsregel $V^a = X^a_i V^i$ folgt durch $t$-malige sukzessive Differentiationen nach $u^\alpha$ wegen des Satzes 2.6

$$V^a_{/\beta(t)} = \sum_{s=0}^{t} \binom{t}{s} X^a_{i/(\beta(t-s)} V^i_{/\beta(s))} =$$

$$= \sum_{s=0}^{t} \binom{t}{s} X^a_{i/(\beta(t-s)} \sum_{r=0}^{s} A^{\alpha(r)}_{\beta(s)} V^i_{\alpha(r)} = \frac{\partial p^a_{\beta(t)}}{\partial p^i_{\alpha(r)}} V^i_{\alpha(r)},$$

wobei $A^{\alpha(0)}_{\beta(s)} = 0$ für $s > 0$ und $A^{\alpha(0)}_{\beta(0)} = 1$ ist.

In analoger Weise erkennen wir

**Satz 2.13.** *Wenn $W^{\alpha(t)}_i$ eine exkovariante $R_K$-Extensordichte erste Stufe vom Grad $M$ ist, dann ist $\binom{r}{t} W_i^{a(r-t)a(t)}$ $(0 \leqq t \leqq r \leqq M)$ eine $R_K$-Extensordichte zweiter Stufe, die in Bezug auf ${}^{a(r-t)}_{i}$ exkovariant und auf $a(t)$ $P_K$-kontravariant ist.*

In dieser Weise können wir die Theorie der $R_K$-Extensoren weiter entwickeln, genau so wie diejenige der gewöhnlichen Extensoren.

**11.** Wie wir gleich erkennen, ist (2.13) nicht linear in $p^i_{\alpha(t)}$, d. h. keine lineare Transformation des $P_K$-Expunktes. Aber wir können ihre Representation in linearen Transformationen auffinden. In der Tat, mittels Induktion in Bezug auf $v$ können wir nach (2.13) den folgenden Hauptsatz beweisen:

**Satz 2.14.** (H a u p t s a t z) *Bei einer $R_K$-Transformation verändert sich ein Flächenelement $M$-ter Ordnung auf einer $K$-dimensionalen Fläche nach der Regel*

$$P^{a(v)}_{\beta(r)} = \sum_{u=1}^{r} \sum_{s=0}^{u} \sum_{t=0}^{u-s} \binom{u}{s} X^{a(v)}_{,\,i(t)(\alpha(s)} P^{i(t)}_{\alpha(u-s))} A^{\alpha(u)}_{\beta(r)}, \tag{2.20}$$

*wobei*

$$X^a_{,\,i(t)\alpha(s)} \overset{\text{def}}{=} \sum_{(v)} \sum_{(v')} \begin{bmatrix} r \\ t,\, v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s,\, v' \end{bmatrix} X^{(a_1}_{,\,(i(v_1)(\alpha(v'_1)} X^{a_2}_{,\,i(v_2)\alpha(v'_2)} \ldots X^{a_v)}_{,\,i(v_v))\alpha(v'_v))},$$

$$\begin{bmatrix} r \\ t,\, v \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=} \frac{t!}{v_1!\, v_2! \ldots v_r!\, w_1! \ldots w_{t-r+1}!},$$

$v_1 + v_2 + \cdots + v_v = t, \quad v'_1 + v'_2 + \cdots + v'_v = s, \quad v_k + v'_k \geqq 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, v)$

*ist.*

**Zuzatz.** *Eine verallgemeinerte Skleronomtransformation trägt $P^{i(t)}_{\alpha(u)}$ in $P^{\alpha(v)}_{\beta(r)}$ folgendermaßen über:*

$$P^{\alpha(v)}_{\beta(r)} = \sum_{u=1}^{r} \sum_{t=1}^{n} X^{\alpha(v)}_{,\,i(t)} P^{i(t)}_{\alpha(u)} A^{\alpha(u)}_{\beta(r)} .$$

Satz 2.14 besitzt wesentlich denselben Inhalt wie Satz 2.5, spielt aber eine sehr wichtige Rolle und ist sehr nützlich, denn, wie die Transformationsregel (2.20) zeigt, verändern sich die Werte $P^{i(t)}_{\alpha(s)}$ linear bei jeder $R_K$-Transformation. Somit können wir die Theorie in einer Mannigfaltigkeit von $P_K$-Expunkten[12]) mit Hilfe dieses Satzes begründen, in analoger Weise wie in einer linear zusammenhängenden Mannigfaltigkeit, wenn wir $P^{i(t)}_{\alpha(s)}$ anstatt $p^{i}_{\alpha(s)}$ als die vergrößerten Bestimmungszahlen eines $P_K$-Expunktes nehmen. (2.20) ist nichts anderes als die Representation der Transformation (2.13) in linearen Transformationen.

## Literatur.


[1] A. Kawaguchi, Die Differentialgeometrie in der verallgemeinerten Mannigfaltigkeit, *Rend. Cir. Mat. Palermo* **56** (1932), 246–276.

[2] A. Kawaguchi, Die Differentialgeometrie höherer Ordnung I. Erweiterte Koordinatentransformationen und Extensoren, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I.* **9** (1940), 1—152.

[3] A. Kawaguchi, Die Differentialgeometrie höherer Ordnung II. Über die $n$-dimensionalen metrischen Räume mit vom $m$-dimensionalen Flächenelement abhängigem Zusammenhang, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I.* **9** (1940) 153—188.

[4] A. Kawaguchi, Die Differentialgeometrie höherer Ordnung III. Erweiterte Parametertransformationen und $P$-Tensoren, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I.* **10** (1941), 77—156.

[5] A. Kawaguchi, Ein metrischer Raum, der eine Verallgemeinerung des Finslerschen Raumes ist, *Mh. Math. Phys.* **43** (1933), 289—297.

[6] A. Kawaguchi, Eine Verallgemeinerung von Extensoren, *Mh. Math. Phys.* **48** (1939), 329—339.

[7] A. Kawaguchi und H. Hombu, Die Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I.* **6** (1936), 21—62.

[8] T. Suguri, The geometry of $K$-spreads of higher order, *Mem. Fac. Sci. Kyûsyû Univ. Ser. A.* **1** (1941), 143—166.

[9] H. Hombu and T. Suguri, A treatment of geometric quantities in the manifold of surface-elements, *Mem. Fac. Sci. Kyûsyû Univ. Ser. A* **2** (1941), 67—90.

[10] Takeo Ohkubo, Über die Extensorrechnung in den verallgemeinerten Räumen von Flächenelementen höherer Ordnung, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I.* **11** (1946), 1—37.

[11] H. V. Craig, On multiple parameter Jacobian extensors, *Tensor, New. Ser.* **2** (1952), 27—35.

[12] Ch. Ehresmann, Les prolongements d'une variété différentiable, *C. R. Acad. Sci. Paris* **233** (1951), 598–600, 777–779, 1081–1083.


*(Eingegangen am 2. Februar 1959.)*

[12]) Diese Theorie wird in anderen Arbeiten des Verfassers irgendwo publiziert werden.