La détermination des espaces symétriques à connexion semisymétrique.

Dédié à Monsieur O. Varga à propos de son cinquantième anniversaire.

Par V. DUMITRAȘ (Bucarest).

Un espace A_n à connexion non symétrique est dit d'après SCHOUTEN [1], un espace à connexion semisymétrique si les composantes du tenseur de torsion sont de la forme

$$T^i_{jk} = \delta^i_j \psi_k - \delta^i_k \psi_j. \tag{1}$$

En faisant dans les formules (1) $i=j$ et en sommant, on a

$$T^i_{ik} = (n-1)\psi_k \tag{2}$$

d'où il résulte que les ψ_k sont les composantes d'un vecteur covariant qu'on appellera le vecteur de torsion. Donc, à un espace à connexion affine semisymétrique on peut associer la forme de Pfaff invariante

$$d\sigma = (n-1)\psi_k dx^k. \tag{3}$$

On peut aussi associer à un espace A_n à tenseur de torsion non nulle la forme quadratique invariante

$$\pi = T_{kl} dx^k dx^l \qquad (T_{kl} = T^r_{sk} T^s_{rl}). \tag{4}$$

Si la connexion est semisymétrique on a

$$\pi = \frac{1}{n-1} d\sigma^2. \tag{4'}$$

On peut faire une classification des espaces considérés d'aprés le rang de la forme $d\sigma$ et trouver ainsi des formes canoniques du tenseur de torsion.

M. W. ŚLEBODSIŃSKI a déterminé les espaces à parallélisme absolu douées d'une connexion semisymétrique (pour ces espaces le tenseur de courbure est nul) [2].

Dans cette note nous considérons les espaces à connexion affine semisymétrique, qui sont aussi des espaces symétriques au sens de M. RACHEVSKI

[3], donc des espaces dont les dérivées covariantes du tenseur de torsion et du tenseur de courbure sont nulles. Nous déterminerons la connexion de ces espaces dans un système convenable de coordonnées.

Soit un espace A_n ayant les connexion

$$\Gamma^i_{jk} = S^i_{jk} + \frac{1}{2}(\delta^i_j \psi_k - \delta^i_k \psi_j) \tag{5}$$

où les $S^i_{jk} = \Gamma^i_{(jk)}$ sont les composantes d'une connexion affine symétrique. Nous désignerons par "," et ";" les symboles des dérivées covariantes par rapport aux connexions Γ^i_{jk} respectivement S^i_{jk}.

Des formules (1) nous tirons

$$T^i_{jk,l} = \delta^i_j \psi_{k,l} - \delta^i_k \psi_{j,l} \tag{6}$$

et il résulte que si $\psi_{j,l} = 0$, nous aurons aussi $T^i_{jk,l} = 0$ et inversement. Mais en tenant compte des formules (5) il en résulte $\psi_{k,l} = \psi_{k;l}$, dons si le tenseur dérivé du tenseur de torsion est nul, nous avons les relations

$$\psi_{k;l} = \frac{\partial \psi_k}{\partial x^l} + \psi_r S^r_{kl} = 0. \tag{7}$$

On peut énoncer le

Théorème 1. *Une condition nécessaire et suffisante, pour que dans un espace A_n à connexion semisymétrique, le tenseur dérivé du tenseur de torsion soit nul est que la dérivée covariante du vecteur de torsion ψ_k soit nulle* (la dérivée covariante étant prise soit par rapport à la connexion Γ^i_{jk}, soit par rapport à la connexion S^i_{jk}).

Comme les S^i_{jk} sont symétriques dans les indices inférieures des relations (7), il résulte

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x^l} = \frac{\partial \psi_l}{\partial x^k}$$

ce qui nous montre que le vecteur ψ_k, dérive d'un potentiel, donc les ψ_k sont les dérivées partielles d'une certaine fonction ψ. Nous avons donc le

Théorème 2. *Pour qu'un espace A_n à connexion semisymétrique ait le tenseur dérivé du tenseur de torsion nul il faut et il suffit que le vecteur du torsion ψ_k soit un gradient.*

En considérant les conditions d'intégrabilité des équations (7), il en résulte

$$\psi_s S^s_{klh} = 0 \tag{8}$$

où

$$S^i_{jkl} = \frac{\partial S^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial S^i_{jl}}{\partial x^k} + S^i_{rk} S^r_{jl} - S^i_{rl} S^r_{jk} \tag{9}$$

sont les composantes du tenseur de courbure par rapport à la connexion S^i_{jk}. Les composantes du tenseur de courbure Γ^i_{jkl} de l'espace considéré, expressions desquelles on déduit des formules (9), en remplaçant S^i_{jk} par Γ^i_{jk}, peuvent s'écrire sous la forme

$$\Gamma^i_{jkl} = S^i_{jkl} + \frac{1}{2} T^i_{jkl} \tag{10}$$

et un calcul simple nous donne

$$T^i_{jkl} = T^i_{jk,l} - T^i_{jl,k} + \frac{1}{2}\left(T^i_{sk} T^s_{jl} - T^i_{sl} T^s_{jk}\right). \tag{10'}$$

D'autre part nous avons $T^i_{jk,l} = 0$ et les T^i_{jk} sont données par les formules (1), donc

$$T^i_{jkl} = \frac{n}{2}\left(\delta^i_k \psi_j \psi_l - \delta^i_l \psi_j \psi_k\right), \tag{10''}$$

et des formules (10) on obtient

$$S^i_{jkl} = \Gamma^i_{jkl} - \frac{n}{2}\left(\delta^i_k \psi_j \psi_l - \delta^i_l \psi_j \psi_k\right) \tag{9'}$$

En remplaçant dans les formules (8) les expressions des S^i_{jkl} nous obtenons les conditions

$$\psi^s \Gamma^s_{klh} = 0 \tag{11}$$

ce qui nous montre que le vecteur ψ_s se transporte par parallélisme, au long d'une courbe quelconque de l'espace [4]; il en résulte le

Théorème 3. *Si un espace A_n à connexion semisymétrique a le tenseur dérivé du tenseur de torsion nul, le vecteur de torsion se transporte par parallélisme au long d'une courbe quelconque de l'espace.*

Maintenant nous imposerons la condition que le tenseur dérivé du tenseur de courbure soit aussi nul. Si dans les identités de BIANCHI

$$\Gamma^i_{jkl,h} + \Gamma^i_{jlh,k} + \Gamma^i_{jhk,l} = \Gamma^i_{jkr} T^r_{lh} + \Gamma^i_{jlr} T^r_{hk} + \Gamma^i_{jhr} T^r_{kl} \tag{12}$$

on remplace les T^i_{jk} par leurs expressions (1) et on fait $\Gamma^i_{jkl,h} = 0$, on aura

$$\Gamma^i_{jkl} \psi_h + \Gamma^i_{jhk} \psi_l + \Gamma^i_{jlh} \psi_k = 0. \tag{13}$$

En prenant la dérivée covariante dans les deux membres des formules (9') et en tenant compte du fait que la dérivée covariante du vecteur ψ_j est nulle, il s'ensuit $S^i_{jkl,h} = \Gamma^i_{jkl,h}$ donc si l'espace est symétrique il est nécessaire qu'on ait

$$S^i_{jkl,h} = 0. \tag{14}$$

Mais, un calcul simple nous donne

$$S^i_{jkl,h} = S^i_{jkl;h} + S^i_{jkl}\psi_h - \frac{1}{2}(S^i_{hkl}\psi_j + S^i_{jhl}\psi_k + S^i_{jkh}\psi_l)$$

et les relations (14) deviennent

$$S^i_{jkl;h} = -S^i_{jkl}\psi_h + \frac{1}{2} S^i_{hkl}\psi_j + S^i_{jhl}\psi_k + S^i_{jkh}\psi_l). \tag{14'}$$

Nous pouvons énoncer le

Théorème 4. *Pour qu'un espace A_n à connexion semisymétrique soit symétrique au sens du Rachevski il, faut et il suffit, que le vecteur de torsion soit un gradient qui satisfait aux équations* (14) *et que les composantes du tenseur de courbure S^i_{jkl} (formées avec la connexion symétrique S^i_{jk}), satisfassent aux équations* (14').

Le vecteur ψ_k étant un gradient, la forme de Pfaff $d\sigma$ est une différentielle totale exacte et par suite les espaces considérés ci-dessous sont des espaces A_n à forme de Pfaff invariante étudiés par M. G. Vranceanu [5]. Parce que $d\sigma$ est une différentielle totale exacte on peut choisir un système convenable de variables, tel qu'on a $d\sigma = dx^1$, donc on peut réduire le vecteur ψ_k à la forme canonique

$$\psi_1 = 1,\ \psi_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 2, \ldots, n) \tag{15}$$

et cette forme canonique est conservée par une transformation des variables

$$\bar{x}^1 = x^1 + a^1, \bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha(x^2, \ldots, x^n) \qquad (\alpha > 1). \tag{16}$$

Cela posé, les équations (7), (8), (8') et les équations déduits de (7), nous donnent, si l'on remplace S^i_{jk} par Γ^i_{jk}

$$\Gamma^1_{jk} = S^1_{jk} = \Gamma^1_{jkl} = S^1_{jkl} = 0. \tag{17}$$

De même, des formules (1), il résulte que les seuls composantes non nulles du tenseur de torsion sont

$$T^\alpha_{\beta 1} = -T^\alpha_{1\beta} = \delta^\alpha_\beta \qquad (\alpha, \beta = 2, \ldots, n). \tag{17'}$$

D'autre part, des relations (13), il s'ensuit pour $h = 1$; $k, l, i \neq 1$:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma\delta} = S^\alpha_{\beta\gamma\delta} = 0, \quad \Gamma^\alpha_{1\gamma\delta} = 0 \qquad (\alpha, \beta\,\gamma = 2, \ldots, n). \tag{17''}$$

Les formules qui donnent la loi de transformation de la connexion affine

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} = \bar{\Gamma}^i_{rs} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^k} - \Gamma^s_{jk} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s} \tag{18}$$

s'écrivent pour une transformation (16), en faisant $i = \alpha$,

$$j = \beta, \quad k = \gamma \qquad (\alpha, \beta, \gamma > 1)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} = \bar{S}^\alpha_{\varrho\lambda} \frac{\partial \bar{x}^\varrho}{\partial x^\beta} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\gamma} - S^\varrho_{\beta\gamma} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\varrho} \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \varrho, \lambda = 2, \ldots, n). \tag{18'}$$

Ces formules nous montrent que pour x^1 égale à une constante, les $S^\alpha_{\beta\gamma}$ constituent les composantes d'une connexion affine symétrique d'un espace A_{n-1}. Mais des formules (17″) il résulte que cet espace A_{n-1} est localement euclidien et par conséquent, on peut choisir un système de variables $x^2, \ldots, x^n$ de façon que toutes les composantes $S^\alpha_{\beta\gamma}$ soient nulles. Donc, d'accord avec les formules (17), (17′) on peut réduire la connexion semisymétrique d'un espace symétrique à la forme canonique

$$\begin{gathered} \Gamma^1_{jk} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0, \ \Gamma^\alpha_{11} = S^\alpha_{11} \\ \Gamma^\alpha_{\beta 1} = S^\alpha_{\beta 1} + \delta^\alpha_\beta, \ \Gamma^\alpha_{1\beta} = S^\alpha_{\beta 1} - \delta^\alpha_\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma, = 2, \ldots, n). \end{gathered} \tag{19}$$

Les transformations des variables qui conservent cette forme canonique sont de la forme

$$\bar{x}^1 = x^1 + a^1, \ \bar{x}^\alpha = a^\alpha_\beta x^\beta + a^\alpha \qquad (\alpha, \beta = 2, \ldots, n) \tag{20}$$

où a^α_β et a^α sont des fonctions de la variable x^1. Cela posé, les formules (17″) et (14′) s'écrivent

$$S^\alpha_{1\gamma\delta} = \frac{\partial S^\alpha_{1\gamma}}{\partial x^\delta} - \frac{\partial S^\alpha_{1\delta}}{\partial x^\gamma} = 0, \quad S^\alpha_{\beta 1\gamma} = \frac{\partial S^\alpha_{\beta 1}}{\partial x^\gamma} \tag{21}$$

$$S^\alpha_{\beta 1\gamma;\delta} = 0, \ S^\alpha_{\beta 1\gamma;1} + \frac{1}{2} S^\alpha_{\beta 1\gamma} = 0 \tag{22}$$

$$S^\alpha_{11\beta;1} = 0, \quad S^\alpha_{11\beta;\delta} - \frac{1}{2} S^\alpha_{\delta 1\beta} = 0. \tag{22'}$$

Des dernières formules (21) et des premières formules (22) on tire

$$\frac{\partial^2 S^\alpha_{\beta 1}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta} = 0$$

et par suite $S^\alpha_{\beta 1}$ sont des fonctions linéaires des variables $x^2, \ldots, x^n$, donc nous avons

$$S^\alpha_{\beta 1} = p^\alpha_{\beta\lambda} x^\lambda + p^\alpha_\beta \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 2, \ldots, n) \tag{23}$$

où les $p^\alpha_{\beta\lambda}$ et p^α_β sont des fonctions de la variable x^1.

En considérant les équations (18) pour $i = \alpha, j = \beta$, k $= 1$, par rapport à une transformation (20) avec $a^i = 0$, nous avons

$$\frac{da^\alpha_\beta}{dx^1} = \bar{p}^\alpha_\varrho a^\varrho_\beta - p^\varrho_\beta a^\alpha_\varrho$$

et en prenant les fonctions a^α_β comme des intégrales du système des équations différentielles

$$\frac{da^\alpha_\beta}{dx^1} + p^\varrho_\beta a^\alpha_\varrho = 0$$

on peut annuler tous les coefficients p^α_β.

Des formules (20) il résulte

$$S^\alpha_{\beta 1\gamma} = p^\alpha_{\beta\gamma}, \; p^\alpha_{\beta\gamma} = p^\alpha_{\gamma\beta} \tag{20'}$$

donc les $p^\alpha_{\beta\gamma}$ sont symétriques dans les indices inférieurs.

Les dernières équations (22) nous donnent

$$\begin{gathered} p^\alpha_{\beta\varrho} p^\varrho_{\gamma\delta} + p^\alpha_{\gamma\varrho} p^\varrho_{\beta\delta} - p^\alpha_{\delta\varrho} p^\varrho_{\beta\gamma} = 0 \\ \frac{dp^\alpha_{\beta\gamma}}{dx^1} + \frac{1}{2} p^\alpha_{\beta\gamma} = 0 \end{gathered} \tag{24}$$

donc

$$\begin{gathered} p^\alpha_{\beta\gamma} = c^\alpha_{\beta\gamma} e^{-\frac{1}{2}x^1} \\ c^\alpha_{\beta\varrho} c^\varrho_{\gamma\delta} + c^\alpha_{\gamma\varrho} c^\varrho_{\beta\delta} - c^\alpha_{\delta\varrho} c^\varrho_{\beta\gamma} = 0 \end{gathered} \tag{24'}$$

où les $c^\alpha_{\beta\gamma}$ sont n^ϱ-constantes.

Si dans les dernières équations (22') nous tenons compte des formules (20') et (24), il s'ensuit

$$\frac{\partial^2 S^\alpha_{11}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} = -2 p^\alpha_{\varrho\lambda} p^\varrho_{\beta\gamma} x^\lambda \tag{25'}$$

et il en résulte

$$S^\alpha_{11} = -\frac{1}{3} p^\varrho_{\mu\nu} p^\alpha_{\varrho\lambda} x^\lambda x^\mu x^\nu + q^\alpha_\lambda x^\lambda + q^\alpha \tag{26}$$

où q^α_β et q^α sont des fonctions de la variable x^1.

En remplaçant dans les premières équations (22′) les valeurs (26) des S^{α}_{11} et en tenant compte des relations (24) les conditions[1])

$$\begin{gathered} p^{\alpha}_{\varrho\lambda}\, p^{\varrho}_{\beta\gamma}\, p^{\lambda}_{\delta\nu} = 0, \ p^{\alpha}_{\beta\varrho}\, p^{\varrho}_{\mu\lambda} = 0 \\ p^{\alpha}_{\beta\gamma} + 2(q^{\varrho}_{\gamma}\, p^{\alpha}_{\varrho\beta} + q^{\varrho}_{\beta}\, p^{\alpha}_{\varrho\gamma}) = 0, \ \ \frac{dq^{\alpha}_{\beta}}{dx^1} + q^{\varrho}\, p^{\alpha}_{\varrho\beta} = 0 \end{gathered} \tag{24″}$$

résultent. Toutes les conditions (24), (24′), (24″) se réduisent aux conditions suivantes

$$\begin{gathered} p^{\alpha}_{\beta\gamma} = c^{\alpha}_{\beta\gamma}\, e^{-\frac{1}{2}x^1}, \quad c^{\alpha}_{\beta\varrho}\, c^{\varrho}_{\gamma\delta} = 0 \\ c^{\alpha}_{\beta\gamma} + 2(q^{\varrho}_{\gamma} c^{\alpha}_{\varrho\beta} + q^{\alpha}_{\beta} c^{\alpha}_{\varrho\gamma}) = 0, \ \ \frac{dq^{\alpha}_{\beta}}{dx^1} + q^{\varrho} c^{\alpha}_{\varrho\beta}\, e^{-\frac{1}{2}x^1} = 0. \end{gathered} \tag{27}$$

Par suite, d'accord avec les formules (19), la connexion des espaces considérés peut être réduite à la forme canonique

$$\begin{gathered} \Gamma^{\alpha}_{\beta 1} = c^{\alpha}_{\beta\lambda}\, x^{\lambda}\, e^{-\frac{1}{2}x^1} + \delta^{\alpha}_{\beta}, \ \Gamma^{\alpha}_{1\beta} = c^{\alpha}_{\beta\lambda}\, x^{\lambda}\, e^{-\frac{1}{2}x^1} - \delta^{\alpha}_{\beta} \\ \Gamma^{\alpha}_{11} = q^{\alpha}_{\lambda}\, x^{\lambda} + q^{\alpha}, \ \Gamma^{1}_{jk} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0 \\ (\alpha, \beta, \gamma, \lambda = 2, \ldots, n) \end{gathered} \tag{28}$$

où $e^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sont des constantes et $q^{\alpha}_{\beta}, q^{\alpha}$ des fonctions de la variable x^1, reliées par les relations (27). Nous pouvons énoncer le

Théorème 5. *La connexion semisymétrique des espaces symétriques au sens de Rachevski peut être réduit à la forme canonique* (28), (27).

Dans le cas particulier $n = 2$ nous avons $p^{2}_{22} = 0$ et les composantes de la connexion s'écrivent

$$\begin{gathered} \Gamma^{1}_{11} = \Gamma^{1}_{12} = \Gamma^{1}_{21} = \Gamma^{1}_{22} = \Gamma^{2}_{22} = 0 \\ \Gamma^{2}_{21} = -\Gamma^{2}_{12} = 1, \ \Gamma^{2}_{11} = \varepsilon\, x^2 + q\,(x^1) \end{gathered} \tag{29}$$

ε étant une constante. Si $q(x^1) = 0$ l'espace correspondant est un espace A_2 à groupe transitif maximal $\mathcal{G}_4$, mis en évidence pour la première fois par M. G. Vranceanu ([5], 211). Si $q(x^1) \neq 0$ l'espace est un espace A_2 à groupe intransitif maximal $\mathcal{G}_3$. On peut énoncer le

Théorème 6. *Les espaces A_2 symétriques à connexion semisymétrique sont des espaces à groupe maximal.*

---

[1]) Ces conditions s'obtiennent en annulant les coefficients des termes de différents grades.

Le théorème ne reste plus valable pour $n \geqq 3$, ce qu'on peut constater en considérant les espaces A_n dont toutes les composantes de la connexion sont nulles sauf

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta 1} = -\Gamma^{\alpha}_{1\beta} = 1, \ \Gamma^{2}_{11} = \eta x^{2}, \ \Gamma^{3}_{11} = \varkappa x^{3} \tag{30}$$
$$(\eta, \varkappa \neq 1; \ \eta \neq \varkappa) \quad (\alpha, \beta = 2, \ldots, n).$$

Ce sont des espaces à groupe $\mathcal{G}_{n^2-2n+4}$.

Bibliographie.

[1] J. A. SCHOUTEN, Ricci Calculus, *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1954.

[2] W. ŚLEBODSIŃSKI, Sur les espaces à parallélisme absolu doués d'une connexion semi-symétrique, *Colloqium Math.* **2** (1950), 142—148.

[3] П. К. Рашевский, Симметрические пространства аффинной связности с кручением, Труды сем. по векторн. и тензорн. анализу, **8** (1950), 82—92.

[4] L. P. EISENHART, Non—Riemannian Geometry, *New York*, 1927.

[5] G. VRANCEANU, Leçons de géométrie différentielle I, *Bucarest*, 1947.

(Reçu le 11 mai 1959.)