Sur un théorème de Korous.

Dédié à Monsieur Otto Varga à propos de son cinquantième anniversaire.

Par T. FREY (Budapest).

§ 1. Introduction.

C'est une question de grande importance dans la théorie des polynômes orthogonaux, quelle est la condition pourque la suite $\{\omega_n(x)\}$ des polynômes, orthonormale par rapport à la fonction de poids $w(x) \in L[-1, 1]$ non négative, reste bornée en un point quelconque de l'intervalle $[-1, 1]$. Beaucoup de résultats sont connus qui assurent, que la suite $\{\omega_n(x)\}$ soit bornée en certains points, à condition que la fonction de poids, $w(x)$ satisfasse à certaines restrictions globales — c'est à dire valables dans l'intervalle tout entier en question.

Un théorème de KOROUS [1], qu'on peut énoncer brièvement, sous la forme suivante, étend le champs d'appliquation de ces résultats:

Désignons par $\{w_n(x)\}$ et $\{p_n(x)\}$ les suites de polynômes orthonormales par rapport aux fonctions de poids non négatives $w(x)$ et $p(x) \in L[-1, 1]$ respectivement, et supposons que le rapport de ces deux fonctions satisfait aux conditions suivantes:[1])

$$(1.1) \qquad 0 < C_1 \leqq k(x) \equiv \frac{w(x)}{p(x)} \leqq C_2 \qquad (-1 \leqq x \leqq 1),$$

et

$$(1.2) \qquad |k(x) - k(x_0)| \leqq C_3 \cdot |x - x_0| \qquad (-1 \leqq x_0; x \leqq 1).$$

Dans ce cas, les inégalités

$$(1.3) \qquad |w_n(x_0)| \leqq C_4 \sum_{\nu=0}^{1} |p_{n-\nu}(x_0)| \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

[1]) Les constantes C_1, C_2, etc. ne dépendent jamais de la variable n. Elles dépendent en général des constantes, qui figurent dans les conditions préalables, mais ce dernier fait n'est mentionné que dans les cas importants.

et

$$(1.4) \qquad |p_n(x_0)| \leqq C_5 \sum_{\nu=0}^{1} |w_{n-\nu}(x_0)| \qquad (n=1,2,\ldots)$$

sont vérifiées.[2])

En premier lieu, la condition (1. 1) restreint d'une façon assez forte la possibilité d'appliquer le théorème de KOROUS. Ainsi p. e. nous connaissons un grand nombre de théorèmes concernants les suites orthonormales de polynômes sur le cercle unitaire lesquels assurent que ces suites soient bornées. Ces théorèmes peuvent être étendues seulement-après la transformation $x=\cos\Theta$ et l'application du théorème de KOROUS aux fonctions de poids qui, outre les conditions structurals primitives, satisfont aussi à la condition suivante:

$$0 < C_6(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \leqq w(x) \leqq C_7(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1).$$

C'est pourquoi nous nous proposons d'atténuer tout d'abord la condition (1. 1). Nous allons donc démontrer que le théorème de KOROUS reste valable même s'il existe dans l'intervalle $[-1, 1]$ un nombre fini de points, tels que pour chacun de ces points, dans un voisinage dans lequel (1. 1) n'est plus vérifié, la fonction $w(x)$ de même que le fonction $p(x)$ peuvent être majorées resp. minorées chacune par une paire de fonctions du type $|x-x_i|^{\alpha_i}$, de telle sorte, que la différence des puissances des fonctions majorantes et minorantes soit plus petite que 1 (resp. $\frac{1}{2}$, si $x_i=\pm 1$).[3]) Avant d'exposer les autres généralisations qui figurent dans notre travail, il nous faut remarquer que le théorème de KOROUS nous informe aussi sur l'ordre de grandeur des suites de polynômes orthonormales aux points où ces suites ne restent pas régulières.[4]) Si notre but est uniquement de montrer que ces suites sont

---

[2]) Nous devons remarquer ici, que KOROUS a présenté le théorème ci-dessus sous une forme moins généralisée; notamment, au lieu de (1. 2), il suppose

$$(1.2') \qquad k(x) \in \mathrm{Lip}\ 1$$

et ainsi (1. 3) et (1. 4) restent valables pour tout l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$. Nous pouvons déduire directement de la démonstration de son théorème, qui se trouve p. e. dans l'ouvrage de SZEGŐ (v. [2], Theorem 7. 1. 3. p. 157.) la généralisation citée plus haut.

[3]) Par contre dans les relations (1. 3) et (1. 4) la sommation ne s'étend pas jusqu'à 1, mais jusqu'à une constante indèpendante de n et qui est fonction des puissances mentionnées.

[4]) C'est à dire, où la série

$$\{\sqrt{1-x_0^2}\, w(x_0)\, w_n^2(x_0)\}$$

ne reste pas bornée.

régulières, alors les conditions (1. 2) ou (1. 2') et aussi (1. 1) du théorème de KOROUS peuvent être également moins fortes. P. e. nous allons montrer que la formule (1. 3) reste valable aussi avec la condition

$$\sqrt{p(x)}\cdot|p_n(x)| \leqq C_8 \qquad (-1 \leqq x \leqq 1;\, n=1, 2, \ldots)$$

si, au lieu de (1. 2), nous supposons seulement ou bien que $k(x)$ vérifie dans l'intervalle $[x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon]$ une condition logarithmique de LIPSCHITZ de puissance plus grande que 1 (cf. le théorème 4. 1.) ou bien que (1. 3) reste valable, si $k(x)$ vérifie au point x_0 une condition de LIPSCHITZ de puissance plus grande que $\frac{1}{2}$, même dans le cas, où $k(x)$ et $\frac{1}{k(x)}$ ne sont que des fonctions de la classe $L[-1, 1]$ (cf. les théorèmes 51. 1.; 51. 2. et 51. 3.).

§ 2. Le théorème de Korous dans le cas des poids du type Jacobien.

2. 1. *Le lemme fondamental.* Dans la démonstration des théorèmes du § 2. et 3. le lemme suivant joue un rôle très important.

Lemme 21. 1. *Supposons que la fonction de poids $w(x) \in L[-1, 1]$, non négative, peut être écrite sous la forme suivante:*

$$w(x) \equiv k(x)\cdot(1-x)^{\alpha}\cdot(1+x)^{\beta} \qquad (\alpha, \beta > -1), \tag{21. 1}$$

où

$$0 < k \leqq k(x) \leqq K \qquad (-1 \leqq x \leqq 1) \tag{21. 2}$$

et encore

$$k(x) \in \mathrm{Lip}_L 1, \quad \text{si} \quad 1-2\lambda \leqq |x| \leqq 1, \qquad (\lambda > 0). \tag{21. 3}$$

Dans ce cas

$$\int_{-1}^{1} w_n^2(x)\,\frac{w(x)}{(1-x)^{\varepsilon_1}}\,dx \leqq C_1 \qquad (n=1, 2, \ldots) \tag{21. 4}$$

et

$$\int_{-1}^{1} w_n^2(x)\cdot\frac{w(x)}{(1+x)^{\varepsilon_2}}\,dx \leqq C_2 \qquad (n=1, 2, \ldots) \tag{21. 5}$$

par conséquence

$$\int_{-1}^{1} w_n^2(x)\cdot w(x)(1-x)^{-\varepsilon_1}\cdot(1+x)^{-\varepsilon_2}\,dx \leqq C_1 + C_2 \qquad (n=1, 2, \ldots \tag{21. 6}$$

où ε_1 et ε_2 satisfont aux inégalités

$$\alpha-\varepsilon_1>-1;\quad \frac{1}{2}>\varepsilon_1;\quad \beta-\varepsilon_2>-1;\quad \frac{1}{2}>\varepsilon_2.$$

DÉMONSTRATION. Pour démontrer (21.4), (21.5) et (21.6) nous désignons par $\{p_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ la suite des polynômes de JACOBI orthonormale de poids $(1-x)^\alpha\cdot(1+x)^\beta$. Considérons p. e. l'inégalité (21.4); alors, d'après KOROUS:

$$|w_n(x)|\leqq C_3(L;\lambda)\{|p_n^{(\alpha,\beta)}(x)|+|p_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)|\},\qquad (1-\lambda\leqq|x|\leqq 1).$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de SCHWARZ—BUNJAKOWSKI:

$$\int_{-1}^{1} w_n^2(x)\frac{w(x)}{(1-x)^{\varepsilon_1}}dx=\left\{\left[\int_{-1}^{-1+\lambda}+\int_{1-\lambda}^{1}\right]+\int_{-1+\lambda}^{1-\lambda}\right\}w_n^2(x)\frac{w(x)}{(1-x)^{\varepsilon_1}}dx\leqq$$

$$\leqq\left[\int_{-1}^{-1+\lambda}+\int_{1-\lambda}^{1}\right]K\cdot C_3^2\langle|p_n^{(\alpha,\beta)}(x)|+|p_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)|\rangle^2\cdot\frac{(1-x)^\alpha\cdot(1+x)^\beta}{(1-x)^{\varepsilon_1}}dx+$$

$$+\int_{-1+\lambda}^{1-\lambda}w_n^2(x)\frac{w(x)}{\lambda^{\varepsilon_1}}dx\leqq 2KC_3^2\left\{\int_{-1}^{1}\langle[p_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2+\right.$$

$$\left.+[p_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)]^2\rangle\frac{(1-x)^\alpha\cdot(1+x)^\beta}{(1-x)^{\varepsilon_1}}dx+\lambda^{-\varepsilon_1}\int_{-1}^{1}w_n^2(x)\,w(x)\,dx\leqq\lambda^{-\varepsilon_1}+4KC_3^2\cdot\right.$$

$$\cdot\max\left\{\int_{-1}^{1}[p_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)]^2\frac{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}{(1-x)^{\varepsilon_1}}dx;\int_{-1}^{1}[p_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2\frac{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}{(1-x)^{\varepsilon_1}}dx\right\}.$$

Il est facile de voir que les intégrales ci-dessus sont bornées. Considérons par exemple l'intégrale

$$\int_{-1}^{1}[p_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2\frac{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}{(1-x)^{\varepsilon_1}}dx. \tag{21.7}$$

Il suffit évidemment de montrer que l'intégrale

$$\int_{0}^{1}[p_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2\frac{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}{(1-x^2)^{\varepsilon_1}}dx$$

reste bornée [5]). Dans ce but nous appliquons les estimations suivantes:

$$(21.8)\qquad p_n^{(\alpha,\beta)}(x)=P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\cdot\left\{\frac{2n+\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta+1}}\cdot\frac{\Gamma(n+1)\cdot\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\cdot\Gamma(n+\beta+1)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

où

$$(21.9)\qquad P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta)=\begin{cases} O(n^\alpha), & \text{si}\quad 0\leqq\vartheta\leqq\dfrac{1}{n},\\ \vartheta^{-\alpha-\frac{1}{2}}\cdot O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right), & \text{si}\quad \dfrac{1}{n}\leqq\vartheta\leqq\dfrac{\pi}{2},\\ |\vartheta-\pi|^{-\beta-\frac{1}{2}}\cdot O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right), & \text{si}\quad \dfrac{\pi}{2}\leqq\vartheta\leqq\dfrac{1}{n},\\ O(n^\beta), & \text{si}\quad \pi-\dfrac{1}{n}\leqq\vartheta\leqq\pi.\text{[6]}\end{cases}$$

En tenant compte de (21.8) et (21.9):

$$(21.10)\qquad \int_0^1[p_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2(1-x)^{\alpha-\varepsilon_1}(1+x)^{\beta-\varepsilon_1}dx=$$

$$=2^{\alpha+\beta}\left\{\frac{2n+\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta+1}}\cdot\frac{\Gamma(n+1)\cdot\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\cdot\Gamma(n+\beta+1)}\right\}\int_0^{\pi/2}[P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta)]^2\cdot$$
$$\cdot\sin^{1-2\varepsilon_1}\vartheta\cos^{2\beta}\frac{\vartheta}{2}\sin^{2\alpha}\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta.$$

En séparant l'intégrale en deux parties et en appliquant respectivement la première et la deuxième partie de l'estimation (21.9) dans les intervalles $\left[0,\dfrac{1}{n}\right]$ et $\left[\dfrac{1}{n};\dfrac{\pi}{2}\right]$ il est facile à voir, que l'intégrale (21.10) resp. (21.7) reste bornée:

$$\int_0^{\pi/2}[P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta)]^2\sin^{1-2\varepsilon_1}\vartheta\cdot\cos^{2\beta}\frac{\vartheta}{2}\cdot\sin^{2\alpha}\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta=$$

$$=\left\{\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{\pi/2}\right\}[P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta)]^2\cdot\sin^{1-2\varepsilon_1}\vartheta\cdot\cos^{2\beta}\frac{\vartheta}{2}\cdot\sin^{2\alpha}\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta\leqq$$

[5]) Le facteur $(1-x)^{-\varepsilon_1}$ est évidemmement borné par 1 dans $-1\leqq x\leqq 0$. Sur l'intervalle intéressant $0\leqq x\leqq 1$ le facteur $(1-x^2)^{-\varepsilon_1}$ n'est pas moins que $2^{-\varepsilon_1}(1-x)^{-\varepsilon_1}$.

[6]) Cf. p. e. [2]: (21.8) sous (4.3.4), p. 67; (21.9) sous p. 164.

$$\leqq C_4 \cdot n^{2\alpha} \int_0^{\frac{1}{n}} \vartheta^{1-2\varepsilon_1+2\alpha} d\vartheta + C_5 \cdot \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \vartheta^{-2\alpha-1} \vartheta^{1-2\varepsilon_1+2\alpha} d\vartheta =$$

$$= C_4 n^{2\alpha} \frac{1}{2-2\varepsilon_1+2\alpha} \cdot \frac{1}{n \cdot n^{1-2\varepsilon_1+2\alpha}} + C_5 \frac{1}{n} \frac{1}{1-2\varepsilon_1} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-2\varepsilon_1} \leqq C_6 \cdot \frac{1}{n}$$

puisque $1-2\varepsilon_1 > 0$. En plus

$$\frac{2n+\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta+1}} \cdot \frac{\Gamma(n+1) \cdot \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1) \cdot \Gamma(n+\beta+1)} \leqq C_7 \cdot n,$$

c'est à dire

$$2^{\alpha+\beta} \cdot \left\{ \frac{2n+\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta+1}} \cdot \frac{\Gamma(n+1) \cdot \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1) \cdot \Gamma(n+\beta+1)} \right\} \int_0^{\pi/2} [P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta)]^2 \cdot$$

$$\cdot \sin^{1-2\varepsilon_1} \vartheta \cdot \cos^{2\beta} \frac{\vartheta}{2} \sin^{2\alpha} \frac{\vartheta}{2} d\vartheta \leqq C_8.$$

Il en est de même pour les autres intégrales c. q. f. d.

2. 2. *Cas des poids du type Jacobien.* En possession du lemme 21. 1. passons maintenant à la démonstration du

Théorème 22. 1. *En tenant compte des notations du théorème de Korous expliqué ci-dessus, soupposons que*

$$0 < C_9 \leqq k(x) \leqq C_{10} \qquad (-1+\nu \leqq x \leqq 1-\nu;\ \nu > 0),$$

et

$$|k(x)-k(x_0)| \leqq C_{11}|x-x_0|, \text{ si } 1+2\nu < x_0-\mu \leqq x \leqq x_0+\mu < 1-2\nu \ (\mu > 0)$$

et en outre qu'il existe un groupe de douze constantes:

$$0 < p < P, \quad 0 < w \leqq W,$$

$$-1 < a_i \leqq A_i < a_i + \frac{1}{2}, \quad -1 < b_i \leqq B_i < b_i + \frac{1}{2} \qquad (i = 1, 2)$$

avec lesquelles les estimations

$$\begin{aligned} w(1-x)^{A_1} \cdot (1+x)^{B_1} &\leqq w(x) \leqq W(1-x)^{a_1} \cdot (1+x)^{b_1}, \\ p(1-x)^{A_2} \cdot (1+x)^{B_2} &\leqq p(x) \leqq P(1-x)^{a_2} \cdot (1+x)^{b_2} \end{aligned} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

sont vérifiées. Dans ce cas les inégalités

$$|p_n(x_0)| \leqq C_{12} \cdot \sum_{r=0}^{N} |w_{n-r}(x_0)| \tag{22. 1}$$

et

$$|w_n(x_0)| \leqq C_{13} \cdot \sum_{r=0}^{N} |p_{n-r}(x_0)| \tag{22. 2}$$

sont valables (N est un nombre entier qui ne dépend que des puissances a_i, A_i et b_i, B_i).

DÉMONSTRATION. Remarquons que le cours de la démonstration ressemble à celui de KOROUS, cependant, à plusieurs reprises, nous utilisons le lemme 21. 1., de telle façon que nous insérons parmi les poids w et p un certain nombre de poids du type JACOBIEN, et ainci nous pouvons estimer pas à pas les polynômes orthonormaux correspondants.

Soient en effet α_r et β_r $(r=1, 2, \ldots, N-2)$ des séries monotones:

$$\alpha_1 = A_1 \lesseqgtr \alpha_2 \lesseqgtr \alpha_3 \lesseqgtr \cdots \lesseqgtr \alpha_{N-3} \lesseqgtr \alpha_{N-2} = A_2$$

et

$$\beta_1 = B_1 \lesseqgtr \beta_2 \lesseqgtr \beta_3 \lesseqgtr \cdots \lesseqgtr \beta_{N-3} \lesseqgtr \beta_{N-2} = B_2$$

avec

$$|\alpha_r - \alpha_{r-1}| < 1 \quad \text{et} \quad |\beta_r - \beta_{r-1}| < 1 \quad (r = 2, 3, \ldots, N-2).$$

Nous employons les fonctions auxiliaires

$$j_r(x) \equiv \begin{cases} w(x), & \text{si} \quad -1+2\nu \leqq x \leqq 1-2\nu \\ (1-x)^{\alpha_r} \cdot (1+x)^{\beta_r}, & \text{si} \quad 1-2\nu < |x| \leqq 1 \end{cases} \qquad (r = 1, 2, \ldots, N-2)$$

resp.

$$j_{N-1}(x) \equiv \begin{cases} w(x), & \text{si} \quad -1+2\nu \leqq x \leqq 1-2\nu \\ p(x), & \text{si} \quad 1-2\nu < |x| \leqq 1. \end{cases}$$

Désignons par $\{J_{r;n}(x)\}$ la suite orthonormale de polynômes correspondante au poids $j_r(x)$.

Nous allons démontrer en premier lieu l'inégalité

$$|w_n(x_0)| \leqq C_{14}\{|J_{1;n}(x_0)| + |J_{1;n+1}(x_0)|\} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Dans ce but nous devons seulement considérer les inégalités

$$|w(x) - j_1(x)| \leqq \begin{cases} C_{15}\, w(x), \\ C_{16}\, j_1(x) \cdot (1-x)^{a_1-\alpha_1} \cdot (1+x)^{b_1-\beta_1} \end{cases} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

c'est à dire

$$|w(x) - j_1(x)| \leqq C_{17} \sqrt{w(x) \cdot j_1(x)}\, (1-x)^{\frac{1}{2}(a_1-\alpha_1)} \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}(b_1-\beta_1)}; \quad (-1 \leqq x \leqq 1). \tag{22. 3}$$

Alors, d'après KOROUS

$$w_n(x_0)=\int_{-1}^{1}\left\{\sum_{\varrho=0}^{n}J_{1;\varrho}(x_0)J_{1;\varrho}(t)\right\}w_n(t)\cdot j_1(t)\,dt=$$

$$=\int_{-1}^{1}J_{1;n}(x_0)J_{1;n}(t)\,w_n(t)\,j_1(t)\,dt+\int_{-1}^{1}\left\{\sum_{\varrho=0}^{n-1}J_{1;\varrho}(x_0)J_{1;\varrho}(t)\right\}w_n(t)\,j_1(t)\,dt=$$

$$=J_{1;n}(x_0)\int_{-1}^{1}J_{1;n}(t)\,w_n(t)\,j_1(t)\,dt+\int_{-1}^{1}\left\{\sum_{\varrho=0}^{n-1}J_{1;\varrho}(x_0)J_{1;\varrho}(t)\right\}w_n(t)\{j_1(t)-w(t)\}\,dt=$$

$$=\frac{k_n(w)}{k_n(j_1)}J_{1;n}(x_0)+\int_{-1}^{1}\frac{J_{1;n}(t)\,J_{1;n-1}(x_0)-J_{1;n-1}(t)\,J_{1;n}(x_0)}{t-x_0}\,w_n(t)\{j_1(t)-w(t)\}\,dt,$$

c'est à dire, attendu que $j_1(t)\equiv w(t)$, si $|t-x_0|\leqq\mu$ resp. si $|t|\leqq 1-2\nu$:

$$|w_n(x_0)|\leqq\frac{k_n(w)}{k_n(j_1)}|J_{1;n}(x_0)|+$$

$$+\frac{1}{\mu}\left\{\int_{-1}^{-1+2\nu}+\int_{1-2\nu}^{1}\right\}|w_n(t)|\,\{|J_{1;n}(t)|\cdot|J_{1;n-1}(x_0)|+|J_{1;n-1}(t)|\cdot|J_{1;n}(x_0)|\}\cdot$$

$$\tag{22.4}\cdot|j_1(t)-w(t)|\,dt\leqq\frac{k_n(w)}{k_n(j_1)}|J_{1;n}(x_0)|+\frac{1}{\mu}|J_{1;n-1}(x_0)|\cdot\int_{-1}^{1}|w_n(t)|\cdot|J_{1;n}(t)|\cdot$$

$$\cdot|j_1(t)-w(t)|\,dt+\frac{1}{\mu}|J_{1;n}(x_0)|\cdot\int_{-1}^{1}|w_n(t)|\cdot|J_{1;n-1}(t)|\cdot|j_1(t)-w(t)|\,dt.$$

On a maintenant, d'après (22.3) (soit $\omega=0$, resp. $\omega=1$):

$$\int_{-1}^{1}|w_n(t)|\cdot|J_{1;n-\omega}(t)|\cdot|j_1(t)-w(t)|\,dt\leqq$$

$$\tag{22.5}\leqq C_{17}\int_{-1}^{1}|w_n(t)|\cdot|J_{1;n-\omega}(t)|\sqrt{j_1(t)\,w(t)}\cdot(1-t)^{\frac{1}{2}(a_1-\alpha_1)}\cdot(1+t)^{\frac{1}{2}(b_1-\beta_1)}dt\leqq$$

$$\leqq C_{17}\cdot\left\{\int_{-1}^{1}w_n^2(t)\cdot w(t)\,dt\cdot\int_{-1}^{1}[J_{1;n+\omega}(t)]^2\frac{j_1(t)}{(1-t)^{\alpha_1-a_1}\cdot(1+t)^{\beta_1-b_1}}\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}\leqq C_{18},$$

Comme le poids $j_1(x)$ satisfait aux conditions (21. 1), (21. 2) et (21. 3) du théorème 21. 1., $\alpha_1 - a_1 < \frac{1}{2}$ de même que $\beta_1 - b_1 < \frac{1}{2}$ sont aussi valables. On a encore

$$\frac{k_n(w)}{k_n(j_1)} = \int_{-1}^{1} w_n(t) J_{1;n}(t) j_1(t)\,dt \leqq \int_{-1}^{1} |w_n(t)|\cdot|J_{1;n}(t)|\, j_1(t)\,dt \leqq$$

(22. 6)

$$\leqq C_{17} \int_{-1}^{1} |w_n(t)|\cdot|J_{1;n}(t)| \sqrt{w(t) j_1(t)}\cdot(1-t)^{\frac{1}{2}(a_1-\alpha_1)}\cdot(1+t)^{\frac{1}{2}(b_1-\beta_1)}\,dt \leqq C_{19}$$

c'est à dire après (22. 4), (22. 5) et (22. 6)

$$|w_n(x_0)| \leqq C_{19}\cdot|J_{1;n}(x_0) + \frac{C_{18}}{\mu}\{|J_{1;n-1}(x_0)| + |J_{1;n}(x_0)|\}$$

c. q. f. d.

Les parties de la démonstration, où nous passons de j_1 à j_2, et., enfin de j_{N-3} à j_{N-2} (et vice versa) sont presque identiques aux parties ci-dessus. Ainsi, brièvement (nous regardons p. e. le cas particulier $2 \leqq r \leqq N-2$; $\alpha_{r-1} < \alpha_r$; $\beta_{r-1} > \beta_r$; $m \leqq n$):

$$J_{r;m}(x_0) = \int_{-1}^{1} \left\{ \sum_{\varrho=0}^{m} J_{r-1;\varrho}(x_0) J_{r-1;\varrho}(t) \right\} J_{r;m}(t) j_{r-1}(t)\,dt =$$

$$= \frac{k_m(j_r)}{k_m(j_{r-1})} J_{r-1;m}(x_0) + \int_{-1}^{1} J_{r;m}(t)\cdot$$

$$\cdot\{J_{r-1;m}(t)\cdot J_{r-1;m-1}(x_0) - J_{r-1;m-1}(t)\cdot J_{r-1;m}(x_0)\} \left\{ \frac{j_{r-1}(t) - j_r(t)}{t - x_0}\,dt, \right.$$

c'est à dire

$$|J_{r;m}(x_0)| \leqq \frac{k_m(j_r)}{k_m(j_{j-1})} |J_{r-1;m}(x_0)| + \frac{|J_{r-1;m-1}(x_0)|}{\mu} \int_{-1}^{1} |J_{r;m}(t)|\cdot|J_{r-1;m}(t)|\cdot$$

(22. 7)

$$\cdot|j_{r-1}(t) - j_r(t)|\,dt + \frac{|J_{r-1;m}(x_0)|}{\mu} \int_{-1}^{1} |J_{r;m}(t)|\cdot|J_{r-1;m-1}(t)|\cdot|j_{r-1}(t) - j_r(t)|\,dt.$$

On a maintenant

$$|j_r(t) - j_{r-1}(t)| \leqq \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{j_{r-1}(t)}{(1+t)^{\beta_{r-1}-\beta_r}} \\ \dfrac{j_r(t)}{(1-t)^{\alpha_r-\alpha_{r-1}}} \end{array} \right. \qquad (-1 \leqq t \leqq 1)$$

c'est à dire

$$|j_r(t)-j_{r-1}(t)| \leqq \frac{\sqrt{j_{r-1}(t)\cdot j_r(t)}}{(1-t)^{\frac{1}{2}(\alpha_r-\alpha_{r-1})}\cdot(1+t)^{\frac{1}{2}(\beta_{r-1}-\beta_r)}} \qquad (-1 \leqq t \leqq 1),$$

et ainsi (soit $\omega=0$, resp. $\omega=1$):

$$\int_{-1}^{1} |J_{r;m}(t)|\cdot|J_{r-1;m-\omega}(t)|\cdot|j_{r-1}(t)-j_r(t)|\,dt \leqq$$

$$\leqq \int_{-1}^{1} |J_{r;m}(t)|\cdot|J_{r-1;m-\omega}(t)|\cdot\sqrt{j_{r-1}(t)\cdot j_r}(t)\cdot(1-t)^{-\frac{1}{2}(\alpha_r-\alpha_{r-1})}\cdot(1+t)^{-\frac{1}{2}(\beta_{r-1}-\beta_r)}\,dt \leqq$$

$$(22.8) \qquad \leqq \left[\int_{-1}^{1} J^2_{r;m}(t)\frac{j_r(t)\,dt}{(1-t)^{\frac{1}{2}(\alpha_r-\alpha_{r-1})}\cdot(1+t)^{\frac{1}{2}(\beta_{r-1}-\beta_r)}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int_{-1}^{1} J^2_{r-1;m-\omega}(t)\frac{j_{r-1}(t)\,dt}{(1-t)^{\frac{1}{2}(\alpha_r-\alpha_{r-1})}\cdot(1+t)^{\frac{1}{2}(\beta_{r-1}-\beta_r)}}\right]^{1/2} \leqq C_{20}$$

resp.

$$(22.9) \qquad \begin{aligned} \frac{k_m(j_r)}{k_m(j_{r-1})} &= \int_{-1}^{1} J_{r;m}(t)J_{r-1;m}(t)j_{r-1}(t)\,dt \leqq \\ &\leqq \int_{-1}^{1} |J_{r;m}(t)|\cdot|J_{r-1;m}(t)|\cdot\frac{\sqrt{j_r(t)\cdot j_{r-1}(t)}}{(1-t)^{\frac{1}{2}(\alpha_r-\alpha_{r-1})}\cdot(1+t)^{\frac{1}{2}(\beta_{r-1}-\beta_r)}}\,dt \leqq C_{21}, \end{aligned}$$

parceque le poids $j_r(t)$ $(r=1,2,\ldots,N-2)$, satisfont aux conditions (21.1), (21.2) et (21.3) du lemme 21.1. Alors d'après (22.7) et (22.8) resp. (22.9)

$$|J_{r;m}(x_0)| \leqq C_{21}|J_{r-1;m}(x_0)| + \frac{C_{20}}{\mu}\{|J_{r-1;m-1}(x_0)|+|J_{r-1;m}(x_0)|\}$$

comme nous l'avons dit. Dans la dernière partie de notre démonstration, où nous passons de j_{N-2} à j_{N-1} (c'est a dire la suite $\{J_{N-2;m}(x)\}$ à la suite $\{J_{N-1;m}(x)\}$, nous employons tout simplement l'enchâinement des idées, présentée sous (22.3)—(22.6); en effet la relation entre j_{N-2} et j_{N-1} est la même, qu'entre $j_1(x)$ et $w(x)$. À la fin où nous passons de $j_{N-1}(x)$ à $p(x)$ (c'est à dire de la suite $\{J_{N-1;m}(x)\}$ à la suite $\{p_m(x)\}$) nous employons simplement le théorème de KOROUS, parce que

$$k(x)=\frac{j_{N-1}(x)}{p(x)}$$

satisfait aux conditions (1. 1) et (1. 2).

Nous en déduisons pas à pas

$$|J_{r;m}(x_0)|\leqq C_{22}^{(r)}\{|J_{r-1;m-1}(x_0)|+|J_{r-1;m}(x_0)|\}\quad (r=2,3,\ldots,N-1;m=1,2,\ldots)$$

et enfin

$$|p_m(x_0)|\leqq C_{23}\{|J_{N-1;m-1}(x_0)|+|J_{N-1;m}(x_0)|\}\qquad (m=1,2,\ldots).$$

De ces formules on obtient directement (22. 1)—(22. 2), c. q. f. d.

§ 3. Généralisation des resultats ci-desus.

3. 1. *Passage à la discussion des polynômes orthonormaux sur le cercle unitaire.* Il est facile de voir, que le théorème de KOROUS — ainsi que sa démonstration — se laisse appliquer mot à mot aussi dans le cas des polynômes orthonormaux sur le cercle unitaire. Le même cas se retrouve naturellement avec la généralisation, discutée dans le § 2. Ce fait rend possible — en premier lieu — la translation du point singulier du poids de type discuté ci-dessus du bord de l'intervalle d'orthogonalité — en effet une translation peut se faire sans difficulté sur le cercle unitaire, et — deuxième lieu — de multiplier le nombre de ces points singuliers. Ici nous employons en premier lieu la corrélation de l'asymptotique de la série de polynômes $\{\varphi_n^{(\gamma,\delta)}(z)\}$, orthonormale sur le cercle unitaire, de poids

$$f^{(\gamma,\delta)}(\vartheta)=2^{\gamma+\delta}\cdot(1-\cos\vartheta)^{\gamma}(1+\cos\vartheta)^{\delta}\qquad\left(\gamma,\delta>-\frac{1}{2}\right),$$

avec celle des polynômes de JACOBI (v. SZEGŐ [2], Theorem 11. 5. pp. 287—88):

$$\varphi_{2n}^{(\gamma,\delta)}(z)=z^{n}\left\{A\cdot P_n^{\left(\gamma-\frac{1}{2};\,\delta-\frac{1}{2}\right)}(\cos\vartheta)+iB\sin\vartheta\, P_{n-1}^{\left(\gamma+\frac{1}{2};\,\delta+\frac{1}{2}\right)}(\cos\vartheta)\right\}\tag{31. 1}$$

$$\varphi_{2n+1}(z)=z^{n+1}\left\{C\cdot P_n^{\left(\gamma-\frac{1}{2};\,\delta-\frac{1}{2}\right)}(\cos\vartheta)+iD\sin\vartheta\, P_{n-1}^{\left(\gamma+\frac{1}{2};\,\delta+\frac{1}{2}\right)}(\cos\vartheta)\right\},\tag{31. 2}$$

où de même A, B, C et D sont des constantes réelles, indépendantes de $z=e^{i\vartheta}$-et deuxièmement le fait que la série de polynômes $\{w_n(x)\}$, orthonormale sur $[-1, 1]$ de poids

$$w(x)=f(\arccos x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\tag{31. 3}$$

peut s'exprimer aussi sous une forme explicite, si nous connaissons la série de polynômes $\{\varphi_n(z)\}$, orthonormale sur le cercle unitaire, de poids *symétrique* $f(\vartheta)$:

$$(31.4) \qquad w_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left\{ 1 + \frac{\varphi_{2n}(0)}{\varkappa_{2n}} \right\}^{-\frac{1}{2}} \cdot \left\{ z^{-n} \cdot \varphi_{2n}(z) + z^{n} \cdot \varphi_{2n}\left(\frac{1}{z}\right) \right\},$$

où de même $z = e^{ix}$ et $\varkappa_{2n}$ est le coefficient cardinal de $\varphi_{2n}(z)$ (v. SZEGŐ [2], Theorem 11. 5., pp. 287—88). On peut ici remarquer, que nous avons des estimations convenables sur $\varphi_{2n}(0)$ et $\varkappa_{2n}$ notamment (v. SZEGŐ [2], Form. 12. 3. 15. p. 295, resp. Form. 12. 5. 11. p. 297):

$$\varphi_{2n}(0) = o_n(1) \quad \text{respectivement} \quad \varkappa_{2n} = O_n(1)$$

si $f(\vartheta) \in L_{2\pi}$ et encore $\log f \in L_{2\pi}$. Les faits, cités plus bas, jouent aussi un rôle important:

I°. $$\psi_n(z) \equiv \varphi_n^{(\gamma;\,\delta)}(z - z_0)$$

est la série des polynômes, orthonormale sur le cercle unitaire de poids

$$f^{(\gamma;\,\delta)}(z - z_0) = 2^{\gamma+\delta} \cdot [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)]^{\gamma} \cdot [1 + \cos(\vartheta - \vartheta_0)]^{\delta},$$

où $z = e^{i\vartheta}$; $z_0 = e^{i\vartheta_0}$; $\gamma > -\frac{1}{2}$; $\delta > -\frac{1}{2}$.

II°. L'estimation

$$(31.5) \qquad |\varphi_n^{(\gamma,\,\delta)}(z)| = \begin{cases} O(n^{\gamma}), & \text{si} \quad 0 \leqq |\vartheta| \leqq \dfrac{\pi}{n} \\ O(\vartheta^{-\gamma}), & \text{si} \quad \dfrac{\pi}{n} \leqq |\vartheta| \leqq \dfrac{\pi}{2} \\ O[(\pi - \vartheta)^{-\delta}], & \text{si} \quad \dfrac{\pi}{2} \leqq |\vartheta| \leqq \pi - \dfrac{\pi}{n} \\ O(n^{\delta}), & \text{si} \quad \pi - \dfrac{\pi}{n} \leqq |\vartheta| \leqq \pi \end{cases} ; \quad z = e^{i\vartheta}; \quad n = 1, 2, \ldots$$

se laisse facilement déduire des relations (31. 1) et (31. 2) resp. (21. 9). Une conséquence presque triviale de l'estimation (31. 5) est que

$$(31.6) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n^{(\gamma;\,\delta)}(e^{i\vartheta})|^2 \cdot \frac{f^{(\gamma;\,\delta)}(\vartheta)}{(1 - \cos^2\vartheta)^{\varepsilon}}\, d\vartheta \leqq C_1 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

si $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$; $\gamma - \varepsilon > -\frac{1}{2}$ et $\delta - \varepsilon > -\frac{1}{2}$.

En effet

$$\int_{\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi} |\varphi_n^{(\gamma;\delta)}(e^{i\vartheta})|^2 f^{(\gamma;\delta)}(\vartheta)\cdot(1-\cos^2\vartheta)^{-\varepsilon}\,d\vartheta = O(n^{2\delta})\int_{\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi}(\pi-\vartheta)^{2(\delta-\varepsilon)}\,d\vartheta = o_n(1),$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} |\varphi_n^{(\gamma;\delta)}(e^{i\vartheta})|^2 f^{(\gamma;\delta)}(\vartheta)\cdot(1-\cos^2\vartheta)^{-\varepsilon}\,d\vartheta =$$

$$= O\left\{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{\pi}{n}}(\pi-\vartheta)^{-2\delta}\cdot\frac{(\pi-\vartheta)^{2\delta}}{(\pi-\vartheta)^{2\varepsilon}}\,d\vartheta\right\} = o_n(1),$$

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_n^{(\gamma;\delta)}(e^{i\vartheta})|^2 f^{(\gamma;\delta)}(\vartheta)\cdot(1-\cos^2\vartheta)^{-\varepsilon}\,d\vartheta =$$

$$= O\left\{\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\vartheta^{-2\gamma}\cdot\frac{\vartheta^{2\gamma}}{\vartheta^{2\varepsilon}}\,d\vartheta\right\} = O\{n^{-(1-2\varepsilon)}\} = o_n(1),$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{n}} |\varphi_n^{(\gamma;\delta)}(e^{i\vartheta})|^2 f^{(\gamma;\delta)}(\vartheta)\cdot(1-\cos^2\vartheta)^{-\varepsilon}\,d\vartheta =$$

$$= O\left\{n^{2\gamma}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\vartheta^{2(\gamma+\varepsilon)}\,d\vartheta\right\} = O\left\{\frac{n^{2\gamma}}{n^{2\gamma}\cdot n^{1-2\varepsilon}}\right\} = o_n(1).$$

Le lemme 21. 1. est alors valable aussi dans le cas des poids JACOBIENS sur le cercle unitaire (mais avec la généralisation, que le poids original ne peut que multiplié par une fonction de type de puissance d'intégrabilité quadratique, mais aussi par une fonction de puissance intégrable. [7])

[7]) Parceque

$$(1-\cos^2\vartheta)^{-\varepsilon} = O(\vartheta^{-2\varepsilon})\cdot O[(\pi-\vartheta)^{-2\varepsilon}],\quad \text{si}\quad 0<\vartheta<\pi.$$

32. *Généralisations du lemme 21. 1.* Pour vérifier en premier lieu que le lemme 21. 1. est aussi valable quand le poids possède plusieurs singularités de type JACOBIEN (c'est à dire de type $|x-x_i|^{\alpha_i}$), et en deuxième lieu, que nous pouvons passer des poids du cercle unitaire aux poids de l'intervalle $[-1, 1]$-c'est à dire, rendre symétrique la fonction de poids primitive du cercle unitaire sans modifier les propriétés structurelles substantielles, nous devons démontrer les lemmes suivants:

Lemme 32. 1. *Soit*

$$-\pi \leqq \vartheta_1 < \vartheta_2 < \cdots < \vartheta_k < \pi \tag{31. 1}$$

et

$$-\frac{1}{2} < \gamma_j \qquad (j=1,2,\ldots,k) \tag{32. 2}$$

en outre soit la série de polynômes, orthonormale sur le cercle unitaire de poids

$$f^{(\gamma_j)}(\vartheta;\vartheta_j) = 2^{\gamma_j}[1-\cos(\vartheta-\vartheta_j)]^{\gamma_j}$$

resp. de poids

$$f_k(\vartheta) = \prod_{j=1}^{k} f^{(\gamma_j)}(\vartheta;\vartheta_j)$$

désignée par

$$\{\varphi_n^{(\gamma_j)}(z;z_j)\} \quad \textit{resp. par} \quad \{\varphi_n(z;k)\}.$$

L'estimation

$$C_2|\varphi_n^{(\gamma_j)}(e^{i\vartheta};z_j)| \leqq |\varphi_n(e^{i\vartheta};k)| \leqq C_3|\varphi^{(\gamma_j)}(e^{i\vartheta};z_j)| \tag{32. 3}$$
$$\text{sur} \quad \frac{\vartheta_{j-1}+\vartheta_j}{2} \leqq \vartheta \leqq \frac{\vartheta_j+\vartheta_{j+1}}{2} \quad (n=1,2,\ldots,j=1,2,\ldots,k)$$

est alors valable.

DÉMONSTRATION. Ici il ne faut que répéter la suite des idées du théorème 22. 1. — s'obtient par récurrence; l'assertion de notre lemme est en effet valable pour $k=0$ et $k=1$. Supposons qu'il est valable aussi pour $k=K_0-1$ $(\geqq 1)$, c'est à dire pour chaque choix des points $\vartheta_j^{(K_0-1)}$ (où $j=1,2,\ldots,K_0-1$). L'asymptotique de la série de polynômes $\{\varphi_n(e^{i\vartheta};K_0-1)\}$, orthonormale de poids $f_{K_0-1}(\vartheta)$ est caractérisée dans chaque voisinage des points $\vartheta_j^{(K_0-1)}$ par celle de la série $\{\varphi_n^{(\gamma_j)}(e^{i\vartheta})\}$ pour $j=1,2,\ldots,K_0-1$.

Démontrons, que dans ce cas la thèse est valable aussi pour $k=K_0$. Soit alors $\{\vartheta_j^{(K_0)}\}$ resp. $\{\gamma_j\}$ un ensemble de points resp. d'exposants de nombre K_0, correspondant aux prémisses (32. 1)—(32. 2) et considérons une région des points $\vartheta_i^{(K_0)}$. Prenons le poids $(1 \leqq r < s \leqq K_0)$:

$$f_{K_0-2;r;s}(\vartheta) = \left\{\prod_{j=1}^{r-1} \cdot \prod_{j=r+1}^{s-1} \cdot \prod_{j=s+1}^{K_0}\right\} f^{(\gamma_j)}(\vartheta;\vartheta_j^{(K_0)})$$

et la série de polynômes $\{\varphi_n(e^{i\vartheta}; K_0-2; r; s)\}$, orthonormale sur le cercle unitaire de poids $f_{K_0-2;r;s}(\vartheta)$, pour laquelle les thèses de notre lemme sont valables d'après les hypothèses. Pour le cas $\max\{|\gamma_r|; |\gamma_s|\} \geqq \frac{1}{4}$, la démonstration se fera en plusieurs parties (voir aussi la démonstration du théorème 22. 1.!): nous interposons entre $f_{K_0-2;r;s}(\vartheta)$ et $f_{K_0}(\vartheta)$ quelques poids auxiliaires, si bien, qu'à chaque passage d'un poids à un autre, l'exposant appartenant au point $\vartheta_r^{(K_0)}$ resp. $\vartheta_s^{(K_0)}$ ne varie que d'une valeur inférieure à $\frac{1}{4}$. Soit alors $\{r_\nu\}$ resp. $\{s_\mu\}$ une série monotone, pour laquelle

$$r_0 = s_0 = 0;\ r_{\nu_0} = \gamma_r;\ s_{\mu_0} = \gamma_s;\ |r_{\nu+1} - r_\nu| < \frac{1}{4};\ |s_{\mu+1} - s_\mu| < \frac{1}{4}$$

sont valables, et supposons que la validité de notre lemme est déja prouvée pour le cas des systèmes $\{\varphi_n(e^{i\vartheta}; K_0; r_\nu; s_\mu)\}$, appartenants aux poids

$$f_{K_0;r_\nu;s_\mu}(\vartheta) = f_{K_0-2;r;s}(\vartheta)\cdot 2^{r_\nu+s_\mu}\cdot[1-\cos(\vartheta-\vartheta_r^{(K_0)})]^{r_\nu}\cdot[1-\cos(\vartheta-\vartheta_s^{(K_0)})]^{s_\mu}$$

pour $0 \leqq \nu \leqq \nu_1$ et $0 \leqq \mu \leqq \mu_1$. Nous démonstrerons p. e., qu'elle est alors valable aussi dans le cas des systèmes

$$\{\varphi_n(e^{i\vartheta}; K_0; r_{\nu_1+1}; s_\mu)\} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, \mu_1).$$

Considérons en premier lieu le point

$$z_0 = e^{i\vartheta_0};\ \vartheta_0 \notin \left[\frac{1}{2}(\vartheta_{r-1}^{(K_0)} + \vartheta_r^{(K_0)});\ \frac{1}{2}(\vartheta_r^{(K_0)} + \vartheta_{r+1}^{(K_0)})\right].$$

Dans ce cas nous pouvons immédiatement employer les idées de la démonstration de théorème 22. 1., car les estimations ci-dessous sont — d'après nos hypothèses — valables pour chaque choix de α et de β:

$$(32.4)\qquad |\alpha f_{K_0;r_{\nu_1};s_\mu}(\vartheta) - \beta f_{K_0;r_{\nu_1}+1;s_\mu}(\vartheta)| \leqq \begin{cases} C_4(\omega)\cdot f_{K_0;r_{\nu_1}+1;s_\mu}(\vartheta) \\ C_5(\omega)\cdot f_{K_0;r_{\nu_1}+1;s_\mu}(\vartheta) \\ \sqrt{C_4 C_5 f_{K_0;r_{\nu_1};s_\mu}(\vartheta) f_{K_0;r_{\nu_1}+1;s_\mu}}(\vartheta), \end{cases}$$

si $\vartheta \notin [\vartheta-\omega; \vartheta_r+\omega]$, resp. $(\omega > 0)$

$$(32.5)\qquad |\alpha f_{K_0;r_{\nu_1};s_\mu}(\vartheta) - \beta f_{K_0;r_{\nu_1+1}s_\mu}(\vartheta)| \leqq \frac{C_6\sqrt{f_{K_0;r_{\nu_1+1};s_\mu}(\vartheta) f_{K_0;r_{\nu_1};s_\mu}(\vartheta)}}{[1-\cos(\vartheta-\vartheta_r^{(K_0)})]^{\frac{1}{2}|r_{\nu_1+1}-r_{\nu_1}|}},$$

et enfin — en vertu de la définition du poids $f_{K_0;r_\nu;s_\mu}(\vartheta)$ resp. $f_{K_0-2;r;s}(\vartheta)$ —

et pour chaque choix d'un $\omega > 0$, assez petit:

$$\left| f_{K_0; r_{\nu_1}; s_\mu}(\vartheta) - \frac{f_{K_0; r_{\nu_1+1}; s_\mu}(\vartheta)}{\{2[1-\cos(\vartheta_0 - \vartheta_r^{(K_0)})]\}^{(r_{\nu_1+1}-r_{\nu_1})}} \right| \leqq$$
$$\leqq C_7(\omega)|\vartheta - \vartheta_0| \cdot \sqrt{f_{K_0; r_{\nu_1}; s_\mu}(\vartheta) \cdot f_{K_0; r_{\nu_1+1}; s_\mu}(\vartheta)},$$

si $\vartheta \in [\vartheta_0 - \omega; \vartheta_0 + \omega]$, parceque

$$f_{K_0; r_{\nu_1}; s_\mu}(\vartheta) - \frac{f_{K_0; r_{\nu_1+1}; s_\mu}(\vartheta)}{\{2[1-\cos(\vartheta_0 - \vartheta_r^{(K_0)})]\}^{(r_{\nu_1+1}-r_{\nu_1})}} \equiv$$
$$\equiv f_{K_0; r_{\nu_1}; s_\mu}(\vartheta) \cdot \left\{ 1 - \left[\frac{1-\cos(\vartheta - \vartheta_r^{(K_0)})}{1-\cos(\vartheta_0 - \vartheta_r^{(K_0)})} \right]^{(r_{\nu_1+1}-r_{\nu_1})} \right\},$$

et ici pour le premier facteur nous avons (32. 4), tandis que le deuxième a une dérivée bornée à l'intervalle $[\vartheta_0 - \omega; \vartheta_0 + \omega]$, si $\omega > 0$ est assez petit. Ainsi la représentation ci-dessous est alors valable:

$$\varphi_n(z_0; K_0; r_{\nu_1+1}; s_\mu) = \alpha_n \varphi_n(z_0; K_0; r_{\nu_1}; s_\mu) +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(z; K_0; r_{\nu_1+1}; s_\mu) \cdot \sum_{\varrho=0}^{n-1} \overline{\varphi_\varrho(z; K_0; r_{\nu_1}; s_\mu)} \cdot$$

(32. 7) $$\cdot \varphi_\varrho; (z_0; K_0; r_{\nu_1}; s_\mu) f_{K_0; r_{\nu_1}; s_\mu}(\vartheta)\, d\vartheta = \alpha_n \varphi_n(z_0; K_0; r_{\nu_1}; s_\mu) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi_n(z; K_0; r_{\nu_1+1}; s_\mu)}{1 - \bar{z} z_0} \cdot \left\{ \overline{\varphi_n^*(z; K_0; r_{\nu_1}; s_\mu)} \cdot \varphi_n^*(z_0; K_0; r_{\nu_1}; s_\mu) - \overline{\varphi_n(z; K_0; r_{\nu_1}; s_n)} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \varphi_n(z_0; K_0; r_{\nu_1}; s_\mu) \right\} \cdot \left\{ f_{K_0; r_{\nu_1}; s_\mu}(\vartheta) - \frac{f_{K_0; r_{\nu_1+1}; s_\mu}(\vartheta)}{\{2[1-\cos(\vartheta_0 - \vartheta_r^{(K_0)})]\}^{(r_{\nu_1+1}-r_{\nu_1})}} \right\} d\vartheta,$$

où d'après (31. 6)

$$\alpha_n = \frac{\varkappa_n(\varphi_n; K_0; r_{\nu_1+1}; s_\mu)}{\varkappa_n(\varphi_n; K_0; r_{\nu_1}; s_\mu)} = O_n(1)$$

et

$$z = e^{i\vartheta}; \ \varphi_n^*(z) = \bar{z}^n \cdot \varphi_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \quad \text{c. à. d.} \quad |\varphi_n^*(e^{i\vartheta})| = |\varphi_n(e^{i\vartheta})|.$$

D'après (32. 7) on en déduit

(32. 8) $$|\varphi_n(z_0; K_0; r_{\nu_1+1}; s_\mu)| \leqq |\alpha_n| \cdot |\varphi_n(z_0; K_0; r_{\nu_1}; s_\mu)| +$$

$$+ \frac{2}{2\pi} |\varphi_n(z_0; K_0; r_{\nu_1}; s_\mu| \cdot \left\{ \left[\int_{-\pi}^{\vartheta_0-\omega} + \int_{\vartheta_0+\omega}^{\pi} \right] + \int_{\vartheta-\omega_0}^{\vartheta_0+\omega} \right\} |f_{K_0; r_{\nu_1}; s_\mu}(\vartheta) - f_{K_0; r_{\nu_1+1}; s_\mu}(\vartheta)| \cdot$$
$$\cdot \{2[1-\cos(\vartheta_0 - \vartheta_r^{(K_0)})]\}^{-(r_{\nu_1+1}-r_{\nu_1})}| \cdot \frac{|\varphi_n(z; K_0; r_{\nu_1+1}; s_\mu)| \cdot |\varphi_n(z; K_0; r_{\nu_1}; s_\mu)|}{|1 - \bar{z} z_0|} d\vartheta.$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que les intégrales ci-dessus sont bornées. À cette fin, nous tenons compte dans la première paire d'intégrales des inégalités (32. 4) et (32. 5), en plus

$$\frac{1}{|1-z\bar{z}_0|}=\frac{1}{2\left|\sin\dfrac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\right|}\leqq C_8(\omega), \quad \text{si} \quad |\vartheta-\vartheta_0|\geqq\omega \tag{32. 9}$$

puisque d'après nos hypothèses les assertions de notre lemme sur l'asymptotique de la série $\{\varphi_n(z; K_0; r_{\nu_1}; s_\mu)\}$ c'est à dire, les estimations sous (32. 3) sont valables, et enfin de l'inégalité de SCHWARZ—BUNJAKOWSKI et de l'inégalité (31. 6), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\vartheta_0-\omega}+\int_{\vartheta_0+\omega}^{\pi}\right]\frac{|\varphi_n(z; K_0; r_{\nu_1+1}; s_\mu)|\cdot|\varphi_n(z; K_0; r_{\nu_1}; s_\mu)|}{|1-\bar{z}z_0|}\cdot\Bigg|f_{K_0; r_{\nu_1}; s_\mu}(\vartheta)-\\
&\qquad-\frac{f_{K_0; r_{\nu_1+1}; s_\mu}(\vartheta)}{\{2[1-\cos(\vartheta_0-\vartheta_r^{(K_0)})]\}^{(r_{\nu_1+1}-r_{\nu_1})}}\Bigg|\,d\vartheta\leqq\\
&\qquad\leqq C_9(\vartheta)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_n(z; K_0; r_{\nu_1+1}; s_\mu|^2\cdot f_{K_0; r_{\nu_1+1}; s_\mu}(\vartheta)\,d\vartheta\,\cdot\right.\\
&\left.\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_n(z; K_0; r_{\nu_1}; s_\nu)|^2\cdot f_{K_0; r_{\nu_1}; s_\mu}(\vartheta)\cdot\frac{d\vartheta}{[1-\cos(\vartheta-\vartheta_r^{(K_0)})]^{(r_{\nu_1+1}-r_{\nu_1})}}\right\}^{1/2}\leqq C_{10}(\omega).
\end{aligned}\tag{32. 10}$$

Dans la seconde intégrale nous considérons (32. 6) et (32. 9), d'après lesquelles

$$\frac{\left|f_{K_0; r_{\nu_1}; s_\mu}(\vartheta)-\dfrac{f_{K_0; r_{\nu_1+1}; s_\mu}(\vartheta)}{\{2[1-\cos(\vartheta_0-\vartheta_r^{(K_0)})]\}^{(r_{\nu_1+1}-r_{\nu_1})}}\right|}{|1-\bar{z}z_0|}\leqq \tag{32. 11}$$

$$\leqq\begin{cases} C_{11}(\omega)\,f_{K_0; r_{\nu_1}; s_\mu}(\vartheta)\\ C_{12}(\omega)\,f_{K_0; r_{\nu_1+1}; s_\mu}(\vartheta)\\ \sqrt{C_{11}\cdot C_{12}\cdot f_{K_0; r_{\nu_1}; s_\mu}(\vartheta)\cdot f_{K_0; r_{\nu_1}; s_\mu}(\vartheta)}\end{cases}$$

sont valables sur $[\vartheta_0-\omega; \vartheta_0+\omega]$ — puisque sur le cercle unitaire (voir aussi (32. 9)) $|1-\bar{z}z_0|\geqq\dfrac{2}{\pi}|\vartheta-\vartheta_0|$ — et encore nous remarquons que les asssertions de notre lemme; c'est à dire les estimations sous (32. 3) sont valables, enfin nous employons l'inégalité de SCHWARZ—BUNJAKOWSKI:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta_0-\omega}^{\vartheta_0+\omega}\left|f_{K_0;\,r_{\nu_1};\,s_\mu}(\vartheta)-\frac{f_{K_0;\,r_{\nu_1+1};\,s_\mu}(\vartheta)}{\{2[1-\cos(\vartheta_0-\vartheta_r^{(K_0)})]\}^{(r_{\nu_1+1}-r_{\nu_1})}}\right|\cdot$$

$$\cdot\frac{|\varphi_n(z;K_0;r_{\nu_1};s_\mu)|\cdot|\varphi_n(z;K_0;r_{\nu_1+1};s_\mu)|}{|1-\bar z z_0|}\,d\vartheta\leqq$$

$$\leqq\Big\{C_{13}(\omega)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_n(z;K_0;r_{\nu_1+1};s_\mu)|^2\cdot f_{K_0;\,r_{\nu_1+1};\,s_\mu}(\vartheta)\,d\vartheta\,\cdot$$

$$\cdot C_{14}(\omega)\frac{1}{2\omega}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_n(z;K_0;r_{\nu_1};s_\mu)|^2\cdot f_{K_0;\,r_{\nu_1};\,s_\mu}(\vartheta)\,d\vartheta\Big\}^{1/2}\leqq C_{15}(\omega).$$

Il faut encore prouver, que les assertions de notre lemme à la série $\{\varphi_n(e^{i\vartheta};K_0;r_{\nu_1+1};s_\mu)\}$ sont aussi valables sur l'intervalle

$$\left[\frac{1}{2}(\vartheta_{r-1}^{(K_0)}+\vartheta_r^{(K_0)});\ \frac{1}{2}(\vartheta_r^{(K_0)}+\vartheta_{r+1}^{(K_0)})\right].$$

La démonstration s'échelonne en plusieurs parties. Pour $\{\varphi_n(e^{i\vartheta};K_0;r_{\nu_1+1};s_0)\}$ l'estimation est naturellement valable d'après les hypothèses du raisonnement par récurrence. Soit alors supposé que l'estimation pour $\{\varphi_n(e^{i\vartheta};K_0;r_{\nu_1+1};s_{\mu_2})\}$ est déja démontré ($0\leqq\mu_2;\ \mu_2<\mu_1$). Du fait, que l'assertion est aussi valable pour la série

$$\{\varphi_n(e^{i\vartheta};K_0;r_{\nu_1+1};s_{\mu_2+1})\}$$

sur $\left[\frac{1}{2}(\vartheta_{r-1}^{(K_0)}+\vartheta_r^{(K_0)});\ \frac{1}{2}(\vartheta_r^{(K_0)}+\vartheta_{r+1}^{(K_0)})\right]$, la démonstration est naturallement équivalente à celle donné auparavant pour la série

$$\{\varphi_n(e^{i\vartheta};K_0;r_{\nu_1+1};s_\mu)\}$$

sur $\vartheta\notin\left[\frac{1}{2}(\vartheta_{r-1}^{(K_0)}+\vartheta_r^{(K_0)});\ \frac{1}{2}(\vartheta_r^{(K_0)}+\vartheta_{r+1}^{(K_0)})\right]$. [8])

Ainsi les assertions de notre lemme se laissent graduellement démontrer pour $k=K_0$, ce qui donne une démonstration complète.

En faisant usage de ce lemme et du théorème de KOROUS (lequel est valable — comme on peut le voir immédiatement en jetant un coup d'oeil

[8]) Ici nous manipulons avec l'index μ, qui appartient au point $\vartheta=\vartheta_s^{(K_0)}$ et ϑ_0 se trouve dans un voisinage du point $\vartheta=\vartheta_r^{(K_0)}$, c'est à dire, inversement, comme auparavant ($r\neq s$).

sur la démonstration précédente — aussi dans le cas des séries orthonormales sur le cercle unitaire) on obtient immédiatement une généralisation du lemme 21. 1.:

Lemme 32. 2. *Soit* $-\pi \leqq \vartheta_1 < \vartheta_2 < \cdots < \vartheta_s < \pi$ *et*

$$f(\vartheta) = k(\vartheta) \cdot \prod_{j=1}^{s} |\vartheta - \vartheta_j|^{\alpha_j} \qquad (-\pi \leqq \vartheta \leqq \pi)$$

où de même

$$0 < k \leqq k(\vartheta) \leqq K \qquad (-\pi \leqq \vartheta \leqq \pi)$$

$$k(\vartheta) \in \mathrm{Lip}_\varkappa 1, \quad si \quad \vartheta \in [\vartheta_j - \lambda_j; \vartheta_j + \lambda_j] \qquad (\lambda_j > 0; j = 1, 2, \ldots, s)$$

et enfin

$$-1 < \alpha_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, s)$$

sont valables. Désignons la série de polynômes, orthonormale sur le cercle unitaire de poids $f(\vartheta)$ *par* $\{\varphi_n(z)\}$.

L'estimation

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(e^{i\vartheta})|^2 \cdot f(\vartheta) \cdot \frac{1}{\prod_{j=1}^{s} |\vartheta - \vartheta_j|^{\beta_j}} d\vartheta \leqq C_{16} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

est valable, si $-1 < \alpha_j - \beta_j$ *et* $\beta_j < 1$, $(j = 1, 2, \ldots, s)$.

Le énoncés ci-dessus se laissent facilement transposer au cas des séries orthonormales sur l'intervalle $[-1, 1]$ avec l'aide des transformations (31. 3—4). Pour cela il suffit de rendre symétrique la fonction de poids, ayant des singularités sur $[0, \pi)$; d'après le lemme 32. 1. il est permis de poser des singularités symétriques sur $(-\pi; 0]$ sans changer l'asymptotique essentiellement sur $[0, \pi)$:

Lemme 32. 3. *Soit* $-1 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{s-1} < x_s = 1$ *et*

$$w(x) \equiv k(x) \prod_{j=0}^{s} |x - x_j|^{\alpha_j}$$

une fonction de poids sur $[-1, 1]$, *où*

$$0 < k \leqq k(x) \leqq K \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

et

$$k(x) \in \mathrm{Lip}_\varkappa 1, \quad si \quad -1 \leqq x \leqq -1 + \lambda_0 < x_1$$

$$resp. \quad x_{j-1} < x_j - \lambda_j \leqq x \leqq x_j + \lambda_j < x_{j+1} \quad resp. \quad 1 - \lambda_s \leqq x \leqq 1,$$

enfin $-1 < \alpha_j$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, s)$ *sont valables. Désignons la série de polynômes,* *orthonormale de poids* $w(x)$ *par* $\{w_n(x)\}$. *L'estimation*

$$\int_{-1}^{1} w_n^2(x)\cdot w(x)\cdot \frac{1}{\prod\limits_{j=0}^{s}|x-x_j|^{\beta_j}}\,dx \leqq C_{17} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

est alors valable, si

$$-1<\alpha_j-\beta_j\ (j=0,1,2,\ldots,s);\quad 1>\beta_j\ (j=1,2,\ldots,s-1);\ \frac{1}{2}>\beta_j (j=0,s).$$

3. 3. *Quelques généralisations nouvelles du théorème de Korous.* En possession du lemme 32. 3. le théorème 22. 1. se laisse généraliser, notamment en employant la suite des idées précédente.

Théorème 33. 1. *Soit* $w(x)\in L[-1,1]$; $p(x)\in L(-1,1]$,

$$(x_{-1}=)\,1=x_0<x_1<\cdots<x_j<\xi<x_{j+1}<\cdots<x_s=1\ (=x_{s+1})$$

enfin

$$-1<a_\nu\leqq A_\nu<a_\nu+1;\quad -1<b_\nu\leqq B_\nu<b_\nu+1\quad (\nu=1,2,\ldots,s-1)$$

resp.

$$-1<a_\nu\leqq A_\nu<a_\nu+\frac{1}{2};\quad -1<b_\nu\leqq B_\nu<b_\nu+\frac{1}{2}\quad (\nu=0,s)$$

et

$$0<p\leqq P;\quad 0<w\leqq W$$

un group de constantes, avec lesquelles les estimations

$$\left.\begin{aligned} p|x-x_\nu|^{A_\nu}&\leqq p(x)\leqq P|x-x_\nu|^{a_\nu}\\ w|x-x_\nu|^{B_\nu}&\leqq w(x)\leqq W\cdot|x-x_\nu|^{b_\nu}\end{aligned}\right\}\quad si\quad \frac{x_{\nu-1}+x_\nu}{2}\leqq x\leqq\frac{x_\nu+x_{\nu+1}}{2}\quad (\nu=0,1,2,\ldots,s)$$

sont valables. Soit enfin

$$\text{(33. 1)}\qquad \frac{w(x)}{p(x)}\equiv k(x)\in \mathrm{Lip}_\varkappa 1,\quad si\quad \frac{x_j+\xi}{2}\leqq x\leqq\frac{\xi+x_{j+1}}{2}.$$

Dans ce cas $(n=1,2,\ldots)$

$$|w_n(\xi)|\leqq C_{18}\sum_{\mu=0}^{N}|p_{n-\mu}(\xi)|;\quad |p_n(\xi)|\leqq C_{19}\sum_{\mu=0}^{N}|w_{n-\mu}(\xi)|,$$

où de même N *est un nombre entier, qui ne dépend que de* s *et des puissances* a_ν; A_ν; b_ν; B_ν.

Le théorème ci-dessus peut être plus amplement généralisé, notamment l'égalité

$$\xi=x_{j+1}$$

est aussi admise (dans ce cas, la condition (33. 1) sur l'intervalle $\left[\frac{x_j+\xi}{2};\ \frac{\xi+x_{j+2}}{2}\right]$ doit naturellement être valable). Pour cela il nous faut généraliser en premier lieu le lemme 32. 1.

Lemme 33. 2. *Soit la fonction* $f(\vartheta)\in L_{2\pi}$ *de la forme*

$$f(\vartheta)\equiv\sigma(\vartheta)\prod_{j=1}^{s}|\vartheta-\vartheta_j|^{\alpha_j},$$

où on même

$$-\pi\leqq\vartheta_1<\vartheta_2<\cdots<\vartheta_\varrho<\vartheta_0<\vartheta_{\varrho+1}<\cdots<\vartheta_s<\pi,$$

$$\alpha_j>-1 \qquad (j=1,2,\ldots s)$$

et

$$0<\sigma_1|\vartheta-\vartheta_0|^{\alpha_0}\leqq\sigma(\vartheta)\leqq\sigma_2|\vartheta-\vartheta_0|^{\beta_0}$$

avec $-1<\beta_0\leqq\alpha_0<\beta_0+1$, *et enfin*

$$\sigma(\vartheta)\in\mathrm{Lip}_\sigma 1, \quad \text{si} \quad \vartheta\notin\left(\frac{\vartheta_\varrho+\vartheta_0}{2};\ \frac{\vartheta_0+\vartheta_{\varrho+1}}{2}\right);$$

Dans ce cas la série de polynômes, $\{\Phi_n(z)\}$, *orthonormale sur le cercle unitaire de poids* $f(\vartheta)$ *dans un voisinage assez petit des points* $z_\nu=e^{i\vartheta_\nu}$ $(\nu=1,2,\ldots,s)$ *a la même asymptotique, comme la série Jacobienne* $\{\varphi_n(z;\nu)\}$, *orthonormale sur le cercle unitaire de poids*

$$f(\vartheta)=2^{\frac{\alpha_\nu}{2}}[1-\cos(\vartheta-\vartheta_\nu)]^{\frac{\alpha_\nu}{2}},$$

c'est à dire l'inégalité

$$C_{19}|\varphi_n(e^{i\vartheta};\nu)|\leqq|\varphi_n(e^{i\vartheta})|\leqq C_{20}|\varphi_n(e^{i\vartheta};\nu)|, \qquad (n=1,2,\ldots;\ \nu=1,2,\ldots,s)$$

est valable, si

$$\vartheta\in\left[\frac{\vartheta_{\nu-1}+\vartheta_\nu}{2};\ \frac{\vartheta_\nu+\vartheta_{\nu+1}}{2}\right], \ \textit{par contre} \ \vartheta\notin\left[\frac{\vartheta_\varrho+\vartheta_0}{2};\ \frac{\vartheta_0+\vartheta_{\varrho+1}}{2}\right].$$

La démonstration de ce fait se laisse conduire au moyen des considérations analogues à celles du théorème 22. 1., mais en employant les lemmes 32. 1. et 32. 2.

Nous développons notamment des polynômes, orthonormaux de poids $f(\vartheta)$ — d'après le modèle sous (32. 8)—(32. 12) — avec l'aide de la série de polynômes, orthonormale de poids

$$f_0(\vartheta)=f(\vartheta)\cdot[1-\cos(\vartheta-\vartheta_0)]^{\frac{\alpha_0}{2}}.$$

Ainsi, en se basant sur le lemme 33. 2., on obtient directement le

Théorème 33. 3. *Les conclusions du théorème* 33. 1. *restent aussi valables, si*

$$\xi = x_{j+1}$$

mais ici on suppose naturellement que la prémisse (33. 1) *est modifié, comme il suit:*

$$k(x_{j+1}) > 0;\ k(x) \in \mathrm{Lip}_x 1, \quad si \quad x \in \left[\frac{x_j + \xi}{2};\ \frac{\xi + x_{j+2}}{2}\right].$$

§ 4. Sur la réduction de l'exposant de la condition de Lipschitz.

Dans ce qui suit, nous nous occupons de remplacer la condition (1. 2)- figurant dans le théorème de KOROUS par une condition moins rigoureuse. Nous allons démontrer nos théorèmes concernant les fonctions de poids non négatives, bornées et différentes de zéro, définies sur le cercle unitaire. Cependant, en vertu des théorèmes 22. 1. et 33. 3. nous obtiendrons également des corollaires se rapportant aux fonctions de poids définies p. e. sur l'intervalle [—1, 1] et ici ayant une structure globale essentiellement plus générale.

Désignons par $\varphi(\vartheta)$ resp. $\psi(\vartheta)$ les deux fonctions de poids, figurant dans les théorèmes ci-dessous, fonctions non-negatives et définies sur le cercle unitaire; soit

$$\varkappa(\vartheta) = \frac{\psi(\vartheta)}{\varphi(\vartheta)} \tag{4. 1}$$

leur rapport et $\omega(\delta) = \omega(\delta; \varkappa)$ le module de continuité de ce rapport. Supposons de plus que φ et ψ vérifient les conditions suivantes:

$$0 < \varphi_1 \leqq \varphi(\vartheta) \leqq \varphi_2;\ \varphi(\vartheta) \in L_{2\pi};\ \psi(\vartheta) \in L_{2\pi};\ 0 < \varkappa_1 \leqq \varkappa(\vartheta) \leqq \varkappa_2 \tag{4. 2}$$
$$(-\pi \leqq \vartheta \leqq \pi)$$

Au § 4. nous allons démontrer les théorèmes suivants:

Théorème 4. 1. *Supposons, en dehors de* (4. 2), *que les prémisses*

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta; \varkappa)}{\delta}\, d\delta = C_1 < \infty \tag{4. 3}$$

et[9])

$$|\Phi_n(e^{i\vartheta})| \leqq C_2 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots;\ -\pi \leqq \vartheta \leqq \pi) \tag{4. 4}$$

---

[9]) $\{\Phi_n(z)\}$ et $\{\Psi_n(z)\}$ sont les suites orthonormales sur le cercle unitaire correspondant respectivement aux fonctions de poids $\varphi(\vartheta)$ et $\psi(\vartheta)$.

soient valables. Alors la série $\{|\Psi_n(e^{i\vartheta})|\}$ *est aussi bornée sur le cercle unitaire:*

$$|\Psi_n(e^{i\vartheta})| \leqq C_3 \qquad (n=0,1,2,\ldots;\ -\pi \leqq \vartheta \leqq \pi). \tag{4.5}$$

Théorème 4.2. *Supposons toujours en dehors de* (4.2), *que*

$$|\varkappa(\vartheta)-\varkappa(\vartheta_0)| \leqq C_4 \sqrt{|\vartheta-\vartheta_0|}\cdot g(|\vartheta-\vartheta_0|) \qquad (-\pi \leqq \vartheta \leqq \pi) \tag{4.6}$$

et que

$$|\Phi_n(e^{i\vartheta})| \leqq C_5, \quad si \quad \vartheta_0-\varepsilon \leqq \vartheta \leqq \vartheta_0+\varepsilon \qquad (\varepsilon>0) \tag{4.7}$$

est valable, où g est une fonction monotone, qui satisfait à la condition suivante:

$$\int_0^1 \frac{g^2(\tau)}{\tau}\, d\tau = C_6 < \infty. \tag{4.8}$$

Dans ce cas

$$|\Psi_n(e^{i\vartheta_0})| \leqq C_7 \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{4.9}$$

Théorème 4.3. *Supposons, en dehors de* (4.2), *que la condition*

$$|\varphi(\vartheta)-\varphi(\vartheta_0)| \leqq C_8 \sqrt{|\vartheta-\vartheta_0|}\cdot g(|\vartheta-\vartheta_0|), \quad si \quad \vartheta_0-\varepsilon \leqq \vartheta \leqq \vartheta_0+\varepsilon \quad (\varepsilon>0) \tag{4.10}$$

soit valable, où g satisfait à la condition (4.8)

Dans ce cas, la série $\{|\Phi_n(e^{i\vartheta})|\}$ *est bornée au point* $\vartheta=\vartheta_0$, *c. à. d.*

$$|\Phi_n(e^{i\vartheta_0})| \leqq C_9 \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{4.11}$$

Démonstration de ces théorèmes. Nous allons donner une démonstration simultanée des théorèmes 4.1. et 4.2. (Remarquons, que le théorème 4.3. est un cas spécial du théorème 4.2.) Dans ce but, nous employons les formules suivantes trouvées par Bernstein (voir p. e. 32. 7)) concernant la série $\{\Psi_n(z)\}$:

$$\Psi_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(\zeta)\left\{\sum_{\nu=0}^{n} \overline{\Phi_\nu(\zeta)}\,\Phi_\nu(z)\right\}\varphi(t)\,dt = \tag{4.12}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(\zeta)\,\overline{\Phi_n(\zeta)}\,\Phi_n(z)\varphi(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_n(\zeta)\cdot\left\{\sum_{\nu=1}^{n-1}\overline{\Phi_\nu(\zeta)}\,\Phi_\nu(z)\right\}\varphi(t)\,dt =$$

$$= \alpha_n\Phi_n(z) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_n(\zeta)\cdot\left\{\sum_{\nu=1}^{n-1}\overline{\Phi_\nu(\zeta)}\,\Phi_\nu(z)\right\}\cdot[\varphi(t)-c\,\psi(t)]\,dt = \alpha_n\Phi_n(z) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_n(\zeta)\cdot\frac{1}{1-\bar{\zeta}z}\cdot\{\overline{\Phi_n^*(\zeta)}\,\Phi_n^*(z) - \overline{\Phi_n(\zeta)}\,\Phi_n(z)\}\cdot[\varphi(t)-c\,\psi(t)]\,dt,$$

où $z=e^{i\vartheta}$; $\zeta=e^{it}$; $\Phi_n^*(z)=z^n\overline{\Phi_n\left(\frac{1}{\bar z}\right)}$; c est une constante convenable. Enfin, d'après (4. 2)

$$(4.13)\qquad \alpha_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_n(\zeta)\overline{\Phi_n(\zeta)}\varphi(t)dt;\ |\alpha_n|\leqq\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|\Psi_n(\zeta)|^2\varphi(t)dt\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int_{-\pi}^{\pi}|\Phi_n(\zeta)|^2\varphi(t)dt\right\}^{\frac{1}{2}}\leqq\frac{1}{2\pi\cdot\sqrt{\varkappa_1}}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|\Psi_n(\zeta)|^2\psi(t)dt\cdot 1\right\}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{\varkappa_1}}=O_n(1).$$

Tout à fin, d'après (4. 2) — quels que soient γ et β — nous avons

$$(4.14)\qquad |\beta\varphi(t)-\gamma\psi(t)|\leqq\begin{cases}C_{10}\varphi(t)\\ C_{11}\psi(t)\end{cases}$$

si $-\pi\leqq t\leqq\pi$. Désignons par M_n le maximum du module $|\Psi_n(e^{i\vartheta})|$ et par $z_{0;n}=e^{i\vartheta_{0;n}}$ l'un des points où $|\Psi_n(e^{i\vartheta})|$ prend ce maximum:

$$(4.15)\qquad M_n=|\Psi_n(z_{0;n})|\geqq|\Psi_n(e^{i\vartheta})|.$$

Nous pouvons alors estimer l'intégrale figurant sous (4. 12), comme il suit: d'après (4. 4), (4. 14) et (4. 15)

$$I_n(z_0)=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_n(\zeta)\sum_{\nu=1}^{n-1}\overline{\Phi_\nu(\zeta)}\cdot\Phi_\nu(z_0)\cdot\left[\varphi(t)-\frac{\varphi(\vartheta_0)}{\psi(\vartheta_0)}\psi(t)\right]dt\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{2}{2\pi}\left\{\left[\int_{-\pi}^{\vartheta_0-\mu}+\int_{\vartheta_0+\mu}^{\pi}\right]+\int_{\vartheta_0-\mu}^{\vartheta_0+\mu}\right\}|\Psi_n(\zeta)|\cdot|\Phi_n(\zeta)|\,|\Phi_n(z_0)|\cdot\frac{\left|\varphi(t)-\dfrac{\varphi(\vartheta_0)}{\psi(\psi^0)}\psi(t)\right|}{|1-\bar\zeta z_0|}dt\leqq$$

$$(4.16)\qquad \leqq\frac{1}{2\mu}C_2\sqrt{C_{10}\cdot C_{11}}\left[\int_{-\pi}^{\vartheta_0-\mu}+\int_{\vartheta_0+\mu}^{\pi}\right]|\Psi_n(\zeta)|\,|\Phi_n(\zeta)|\sqrt{\varphi(t)}\sqrt{\psi(t)}dt+$$

$$+\frac{1}{2}C_2^2\int_{\vartheta_0-\mu}^{\vartheta_0+\mu}|\Psi_n(\zeta)|\frac{\varphi(t)}{\varkappa(\vartheta_0)}\left|\frac{\varkappa(t)-\varkappa(\vartheta_0)}{t-\vartheta_0}\right|dt\leqq$$

$$\leqq C_2^2\frac{\varphi_2}{\varkappa_1}M_n\int_0^{\mu}\frac{\omega(t;\varkappa)}{t}dt+\frac{C_{12}}{\mu}\left\{\int_{\pi}^{\pi}|\Psi_n(\zeta)|^2\psi(t)dt\cdot\int_{-\pi}^{\pi}|\Phi_n(\zeta)|^2\varphi(t)dt\right\}^{\frac{1}{2}},$$

parce que (v. aussi (32. 9))

$$|1-\bar{\zeta}z_0| \leqq |\vartheta_0-t|; \quad |1-\bar{\zeta}z_0| \geqq \frac{2}{\pi}|\vartheta_0-t|.$$

On a d'après (4. 13) et (4. 12)

$$(4.17) \qquad |\Psi_n(z_0)| \leqq \frac{C_{12}}{\mu} + C_2^2 \frac{\varphi_2}{\varkappa_1} M_n \int_0^\mu \frac{\omega(t;\varkappa)}{t} dt.$$

D'après (4. 3) on peut choisir $\mu>0$ assez petit de la façon que

$$(4.18) \qquad \int_0^\mu \frac{\omega(t;\varkappa)}{t} dt < \frac{1}{2} \frac{\varkappa_1}{\varphi_2 C_2^2}$$

soit valable; par exemple (4. 18) est valable si $\mu \leqq \mu_0(\varphi_2; \varkappa_1; C_2)$. Il en résulte — d'après (4. 18), en vertu de (4. 17) et (4. 15) — l'inégalité

$$M_n = O_\mu(1) + \frac{1}{2} M_n \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

c. à. d. il faut que (4. 5) soit valable selon le théorème 4. 1. C. q. f. d.

Nous pouvons déduire la démonstration du théorème 4. 2. de la relation (4. 12)—(4. 16); il en résulte

$$(4.19) \qquad |\Psi_n(e^{i\vartheta_0})| \leqq \alpha_n |\Phi_n(e^{i\vartheta_0})| + \frac{2}{2\pi} \left\{ \left[\int_{-\pi}^{\vartheta_0-\varepsilon} + \int_{\vartheta_0+\varepsilon}^{\pi} \right] + \int_{\vartheta_0-\varepsilon}^{\vartheta_0+\varepsilon} \right\} |\Psi_n(\zeta)| \cdot$$

$$\cdot |\Phi_n(\zeta)| \cdot |\Phi_n(e^{i\vartheta_0})| \cdot |1-\bar{\zeta}z_0|^{-1} \cdot \left| \varphi(t) - \frac{\varphi(\vartheta_0)}{\psi(\vartheta_0)} \psi(t) \right| dt.$$

L'inégalité

$$\frac{\left| \varphi(t) - \frac{\varphi(\vartheta_0)}{\psi(\vartheta_0)} \psi(t) \right|}{|1-\bar{\zeta}e^{i\vartheta_0}|} \leqq \sqrt{\varphi(t)}\sqrt{\psi(t)} \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{1}{\sqrt{\varkappa(t)}} - \frac{\sqrt{\varkappa(t)}}{\varkappa(\vartheta_0)} \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{\pi}{2\varepsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{\varkappa_1}} + \frac{\sqrt{\varkappa_2}}{\varkappa_1} \right) \sqrt{\varphi(t)} \cdot \sqrt{\psi(t)}$$

est valable dans les intervalles $[-\pi; \vartheta_0-\varepsilon]$ resp. $]\vartheta_0+\varepsilon; \pi]$, par conséquent d'après (4. 7)

$$(4.20) \qquad \frac{2}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\vartheta_0-\varepsilon} + \int_{\vartheta_0+\varepsilon}^{\pi} \right\} |\Psi_n(e^{it})| \cdot |\Phi_n(e^{it})| \cdot |\Phi_n(e^{i\vartheta_0})| \cdot \frac{\left| \varphi(t) - \frac{\varphi(\vartheta_0)}{\psi(\vartheta_0)} \psi(t) \right|}{|1-\bar{\zeta}e^{i\vartheta_0}|} dt \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\varepsilon} C_{13} \cdot |\Phi_n(e^{i\vartheta_0})| \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |\Psi_n(e^{it})|^2 \psi(t) dt \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_n(e^{it})|^2 \varphi(t) dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{1}{\varepsilon} C_{14}$$

en se basant sur le fait, que $|\Phi_n(z)|$ et $|\Phi_n^*(z)|$ sont égaux sur le cercle unitaire.

La troisième intégrale de (4. 19) peut s'estimer d'après les prémisses (4. 6) et (4. 8) du théorème 4. 1. de la façon suivante:

$$\int_{\vartheta_0-\varepsilon}^{\vartheta_0+\varepsilon} |\Psi_n(e^{it})|\cdot|\Phi_n(e^{it})|\cdot|\Phi_n(e^{i\vartheta_0})|\cdot\frac{\left|\varphi(t)-\frac{\varphi(\vartheta_0)}{\psi(\vartheta_0)}\psi(t)\right|}{|1-\bar{\zeta}e^{i\vartheta_0}|}dt\leqq \tag{4.21}$$

$$\leqq C_5^2\int_{\vartheta_0-\varepsilon}^{\vartheta_0+\varepsilon}|\Psi_n(e^{it})|\sqrt{\psi(t)}\cdot\frac{\varphi(t)}{\sqrt{\psi(t)}}\cdot\frac{\psi(\vartheta_0)}{\varphi(\vartheta_0)}\cdot\frac{|\varkappa(t)-\varkappa(\vartheta_0)|}{|t-\vartheta_0|}dt\leqq$$

$$\leqq C_5^2\cdot\sqrt{\varphi_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varkappa_1}}\varkappa_2\cdot\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|\Psi_n(e^{it})|^2\psi(t)dt\cdot\int_{\vartheta_0-\varepsilon}^{\vartheta_0+\varepsilon}\left|\frac{\varkappa(t)-\varkappa(\vartheta_0)}{t-\vartheta_0}\right|^2 d\vartheta\right\}^{\frac{1}{2}}\leqq$$

$$\leqq C_{15}\cdot 2\left\{\int_0^{\varepsilon}\frac{g^2(t)}{t}dt\right\}^{\frac{1}{2}}\leqq C_{16}.$$

L'estimation $\alpha_n=O(1)$ est valable en vertu de la prémisse 4. 2. (cf. p. e. SZEGŐ [2]; Form. 12. 3. 15. p. 295 resp. Form. 12. 5. 1. p. 297, ou bien (4. 13)). Ainsi, en vertu de (4. 20) et (4. 21) nous obtenons (4. 9), C. q. f. d.

Nous pouvons donc exposer les corollaire suivants en se basant sur les résultats des §§. 2. et 3.:

Soit

$$(x_{-1}=)\,1=x_0<x_1<\cdots<x_{s-1}<x_s=1\,(=x_{s+1}) \tag{4.22}$$

resp.

$$\xi\neq x_j\qquad (j=0,1,2,\ldots,s) \tag{4.23}$$

et

$$\begin{gathered}0<w\leqq W;\quad 0<p\leqq P;\\ -1<a_\varrho\leqq A_\varrho<a_\varrho+1;\quad -1<b_\varrho\leqq B_\varrho<a_\varrho+1;\qquad(\varrho=1,2,\ldots,s-1)\\ -1<a_\varrho\leqq A_\varrho<a_\varrho+\frac{1}{2};\quad -1<b_\varrho\leqq B_\varrho<b_\varrho+\frac{1}{2}\qquad(\varrho=0,s)\end{gathered} \tag{4.24}$$

un ensemble de constantes, avec lesquelles les estimations

$$\left.\begin{aligned}w|x-x_\varrho|^{A_\varrho}\leqq w(x)\leqq W|x-x_\varrho|^{a_\varrho}\\ p|x-x_\varrho|^{B_\varrho}\leqq p(x)\leqq P|x-x_\varrho|^{b_\varrho}\end{aligned}\right\}\frac{x_{\varrho-1}+x_\varrho}{2}\leqq x\leqq\frac{x_\varrho+x_{\varrho+1}}{2}\qquad(\varrho=0,1,\ldots,s) \tag{4.25}$$

sont valables.

Désignons par $\{w_n(x)\}$ resp. $\{p_n(x)\}$ la série de polynômes, orthonormale sur l'intervalle $[-1, 1]$ de poids $w(x) \in L[-1, 1]$ resp. $p(x) \in L[-1, 1]$, et supposons enfin, que l'estimation:

$$(4.26) \qquad |w_n(x)| \leqq C_{17} \qquad (\xi - \varepsilon \leqq x \leqq \xi + \varepsilon;\ \varepsilon > 0;\ n = 1, 2, \ldots)$$

est valable.

Corollaire 4.1. *Supposons que les poids $w(x)$ et $p(x)$ satisfont aux conditions* (4.22)—(4.26) *et de plus, que leur rapport vérifie au point $x = \xi$ les conditions:*

$$(4.27) \qquad k(\xi) > 0$$

et

$$|k(x) - k(\xi)| = \left| \frac{p(x)}{w(x)} - \frac{p(\xi)}{w(\xi)} \right| \leqq C_{18} \sqrt{|x - \xi|} \cdot g(|x - \xi|), \quad (\xi - \varepsilon \leqq x \leqq \xi + \varepsilon)$$

où $g(\tau)$ est la fonction monotone, définie sou (4.6)—(4.8), *pour laquelle l'intégrale $\int\limits_0^1 \frac{g^2(\tau)}{\tau} d\tau$ est bornée.*

Alors, l'estimation

$$(4.28) \qquad |p_n(\xi)| \leqq C_{19} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

est valable.

Corollaire 4.2. *En tenant compte des notations et des prémisses, donnés sous* (4.22)—(4.27), *supposons de plus, que le module de continuité du rapport des poids, considéré sur $[\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$, c. à. d. $\omega(\delta) = \omega(\delta; k; \xi - \varepsilon; \xi + \varepsilon)$ satisfait à la condition*

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} d\delta = C_{20} < \infty.$$

Dans ce cas l'estimation (4.28) *est aussi valable.*

§ 5. Généralisations complémentaires des prémisses globaux.

51. *Un théorème et ses conséquences.* Ici nous donnons une généralisation directe du théorème de KOROUS.

Théorème 51.1. *Soient $\varphi(t) \in L_{2\pi}$ resp. $\psi(t) \in L_{2\pi}$ des fonctions de poids non-négatives sur le cercle unitaire, avec la propriété $\log \varphi \in L_{2\pi}$ resp. $\log \psi \in L_{2\pi}$. Supposons, que leur rapport, $\varkappa(t) \equiv \psi(t) \cdot \varphi^{-1}(t)$ satisfait aux* *conditions:*

(51. 1) $$\varkappa(t) \in L_{2\pi};\ \varkappa^{-1}(t) \in L_{2\pi};\ 0 < \varkappa(t_0) < \infty,$$

et

(51. 2) $$|\varkappa(t) - \varkappa(t_0)| \leqq C_1 |t - t_0|, \quad si \quad |t - t_0| \leqq C_2.$$

Pour la série de polynômes, $\{\Phi_n(x)\}$, orthonormale de poids $\varphi(t)$ supposons valable la relation

(51. 3) $$|\sqrt{\varphi(t)}\,\Phi_n(e^{it})| \leqq C_3 \qquad (-\pi \leqq t \leqq \pi;\ n = 1, 2, \ldots).$$

Alors l'estimation

$$|\sqrt{\psi(t_0)}\cdot\Psi_n(e^{it_0})| \leqq C_4 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

est aussi valide.

Démonstration. Nous donnons de nouveau — d'après la méthode de Korous — $\Psi_n(e^{it_0})$ à l'aide de la série $\{\Phi_n(z)\}$:

$$\Psi_n(e^{it_0}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(e^{it})\cdot\sum_{\nu=0}^{n} \Phi_\nu(e^{it_0})\cdot\overline{\Phi_\nu(e^{it})}\,\varphi(t)\,dt =$$

$$= \frac{\varkappa_n(\psi)}{\varkappa_n(\varphi)}\,\Phi_n(e^{it_0}) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(e^{it})\cdot\frac{\Phi_n^*(e^{it_0})\,\overline{\Phi_n(e^{it})} - \Phi_n(e^{it_0})\,\overline{\Phi_n(e^{it})}}{1 - e^{it_0}\cdot e^{-it}}\,\varphi\cdot dt =$$

(51. 4) $$= \frac{\varkappa_n(\psi)}{\varkappa_n(\varphi)}\,\Phi_n(e^{it_0}) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(e^{it})\,\{\Phi_n^*(e^{it_0})\,\overline{\Phi_n^*(e^{it})} - \Phi_n(e^{it_0})\,\overline{\Phi_n(e^{it})}\}\cdot\frac{\varphi(t) - \dfrac{\varphi(t_0)}{\psi(t_0)}\,\psi(t)}{1 - e^{i(t_0 - t)}}\,dt;$$

$$|\Psi_n(e^{it_0})| \leqq \frac{\varkappa_n(\psi)}{\varkappa_n(\varphi)}\,|\Phi_n(e^{it_0})| +$$

$$+ \left\{\frac{2}{2\omega}\int_{-\pi}^{\pi} |\Psi_n(e^{it})|\sqrt{\psi(t)}\,|\Phi_n(e^{it})\sqrt{\varphi(t)}\cdot\left|\sqrt{\frac{k(t_0)}{k(t)}} - \sqrt{\frac{k(t)}{k(t_0)}}\right|\cdot\frac{1}{|t - t_0|}\,dt\right\}\cdot|\Phi_n(e^{it_0})|.$$

Ceci dit d'après (51. 1) resp. (51. 2) que l'estimation

(51. 5) $$\left|\frac{\sqrt{k(t_0)}}{\sqrt{k(t)}} - \frac{\sqrt{k(t)}}{\sqrt{k(t_0)}}\right| \leqq C_5 |t - t_0|$$

est valable pour $|t - t_0| \leqq \delta$ avec un $\delta < 0$ assez petit. En séparant donc l'intégrale dans (51. 4) en trois parties, et en appliquant (51. 5) dans la première, par contre (32. 9) dans la deuxième et la troisième, puis dans toutes les trois l'inégalité de SCHWARZ—BUNJAKOWSKY, et enfin en complétant les intégrales à l'intervalle $(-\pi, \pi)$ l'estimation suivante résulte:

$$|\Psi_n(e^{it_0})| \leqq \frac{\varkappa_n(\psi)}{\varkappa_n(\varphi)} |\Phi_n(e^{it_0})| +$$

$$+ C_6 |\Phi_n(e^{it_0})| \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_n(e^{it})|^2 \varphi(t)\, dt \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |\Psi_n(e^{it})|^2 \psi(t)\, dt \right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ C_7 \frac{1}{\delta} |\Phi_n(e^{it_0})| \cdot C_8 \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |\Psi_n(e^{it})|^2 \psi(t)\, dt \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sqrt{\frac{k(t)}{k(t_0)}} - \sqrt{\frac{k(t_0)}{k(t)}} \right]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ici il ne faut, que remarquer le fait $0 < C_8 \leqq k(t_0) \leqq C_9$, d'après lequel l'estimation

$$C_{10} \psi(t_0) \leqq \varphi(t_0) \leqq C_{11} \psi(t_0)$$

est aussi valable, de plus l'égalité

$$\left[\sqrt{\frac{k(t_0)}{k(t)}} - \sqrt{\frac{k(t)}{k(t_0)}} \right]^2 = \frac{k(t_0)}{k(t)} - 2 + \frac{k(t)}{k(t_0)} \in L_{2\pi}$$

triviale avec l'hypothèse (51. 1—2), pour rendre évidente l'assertion de notre théorème, c. q. f. d.

À l'aide des résultats des §§. 2, 3 et 4 il est naturellement possible de traduire l'assertion de ce théorème également au cas de l'orthogonalité sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Théorème 51. 2. *Soient* $p(x) \in L[-1, 1]$ *resp.* $w(x) \in L[-1, 1]$ *des fonctions de poids non-négatives, avec la propriété* $\log p(x) \in L[-1, 1]$ *resp.* $\log w \in L[-1, 1]$. *Supposons que leur rapport* $k(x) \equiv w(x) \cdot p^{-1}(x)$ *satisfait aux conditions* $(-1 \leqq x_0 \leqq 1)$

$$k(x_0) > 0; \quad k(x) \in L[-1, 1]; \quad k^{-1}(x) \in L[-1, 1]$$

et

$$|k(x) - k(x_0)| \leqq C_{12} |x - x_0|, \quad si \quad |x - x_0| \leqq C_{13}.$$

Pour la série de polynômes $\{p_n(x)\}$, *orthonormale de poids* $p(x)$ *supposons valable la relation*

$$|\sqrt{p(x)} \sqrt[4]{1-x^2}\, p_n(x)| \leqq C_{14}, \qquad (-1 \leqq x \leqq 1;\ n = 1, 2, \ldots).$$

Alors l'estimation

$$|\sqrt{w(x_0)} \sqrt[4]{1-x_0^2}\, w_n(x_0)| \leqq C_{15} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

est également valable.[10])

[10]) V. des relations (31. 3—4). Le poids $p(x) \cdot \sqrt{1-x^2}$ est le pendant du poids $f(\arccos x)$.

On peut voir en effet que la premisse (51. 3) n'était pas complètement utilisé dans le voisinage du point t_0. Ainsi nous démontrons le

Théorème 51. 3. $\varphi(t) \in L_{2\pi}$; $\psi(t) \in L_{2\pi}$ *des fonctions de poids non-négatives sur le cercle unitaire avec la propriété*

$$\frac{1}{\varphi(t)} \in L_{2\pi}, \quad resp. \quad \frac{1}{\psi(t)} \in L_{2\pi}. \tag{51. 6}$$

Supposons que leur rapport, $k(t) \equiv \dfrac{\psi(t)}{\varphi(t)}$ *satisfait aux conditions*

$$k(t_0) > 0; \quad |k(t) - k(t_0)| \leqq C_{16} \cdot |t - t_0|, \qquad (|t - t_0| \leqq C_{17}).$$

Supposons encore, qu'il existe un ensemble de constantes

$$1 \leqq C_{18} < C_{19} \quad resp. \quad 1 \leqq C_{20} < C_{21}$$

de telle sorte, que les estimations

$$0 < \varphi_1 \leqq \varphi(t) \leqq \varphi_2, \quad si \quad \begin{cases} t_0 - \dfrac{C_{17}}{C_{18}} \leqq t \leqq t_0 - \dfrac{C_{17}}{C_{19}} \\ t_0 + \dfrac{C_{17}}{C_{21}} \leqq t \leqq t_0 + \dfrac{C_{17}}{C_{20}} \end{cases} \tag{51. 7}$$

et

$$k(t) \geqq k_0 > 0, \quad si \quad |t - t_0| \leqq \frac{C_{17}}{\min\{C_{18};\, C_{20}\}}$$

sont valables. Les estimations

$$|\Psi_n(e^{it_0})| \leqq C_{22} |\Phi_n(e^{it_0})| \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

resp.

$$|\Phi_n(e^{it_0})| \leqq C_{23} |\Phi_n(e^{it_0})| \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

sont alors aussi valides.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que les relations (51. 6) entraînent aussi

$$\log \varphi \in L_{2\pi} \quad \text{resp.} \quad \log \psi \in L_{2\pi}.$$

Considérons maintenant le poids $\omega(t) \in L_{2\pi}$:

$$\pi(t) \equiv \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t_0 - \pi \leqq t \leqq t_0 - \dfrac{C_{17}}{C_{19}}, \\ \varphi(t) & \text{si} \quad t_0 - \dfrac{C_{17}}{C_{19}} < t < t_0 + \dfrac{C_{17}}{C_{21}}, \\ 1 & \text{si} \quad t_0 + \dfrac{C_{17}}{C_{21}} \leqq t \leqq t_0 + \pi \end{cases} \tag{51. 8}$$

resp. la série de polynômes $\{\Omega_n(z)\}$, orthonormale sur le cercle unitaire de poids $\omega(t)$. L'estimation

$$|\sqrt{\omega(t)}\cdot\Omega_n(e^{it})|\leqq C_{24}\begin{cases} t_0-\pi\leqq t\leqq t_0-\dfrac{C_{17}}{C_{18}} \\ t_0+\dfrac{C_{17}}{C_{20}}\leqq t\leqq t_0+\pi\end{cases}\qquad (n=1,2,\ldots)$$

est une conséquence directe du théorème 51. 1. (voir le poids $\varrho\equiv 1$), mais

$$\frac{\omega(t_0)}{\varphi(t_0)}>0;\quad \left|\frac{\omega(t)}{\varphi(t)}-\frac{\omega(t_0)}{\varphi(t_0)}\right|\leqq C_{25}|t-t_0|,\quad \text{si}\quad t_0-\frac{C_{17}}{C_{19}}\leqq t\leqq t_0+\frac{C_{17}}{C_{21}}$$

est une conséquence directe des prémisses (51. 7) et (51. 8). Ainsi la structure de cette démonstration est mot à mot analogue à celle du théorème 51.1. (Nous avons remarqué, que la prémisse (51. 3) ne doit être utilisé qu'en dehors de l'intervalle $\left(t_0-\dfrac{C_{17}}{C_{19}};\ t_0+\dfrac{C_{17}}{C_{21}}\right)$).

Ainsi s'imposent les inégalités

$$|\Omega_n(e^{it_0})|\leqq C_{26}\cdot|\Phi_n(e^{it_0})|;\quad |\Phi_n(e^{it_0})|\leqq C_{27}|\Omega_n(e^{it_0})|;\qquad (n=1,2,\ldots)$$

tandis que pour les poids $\omega(t)$ et $\psi(t)$ nous avons les inégalités

$$|\Omega_n(e^{it_0})|\leqq C_{28}|\Psi_n(e^{it_0})|;\quad |\Psi_n(e^{it_0})|\leqq C_{29}|\Omega_n(e^{it_0})|;\qquad (n=1,2,\ldots)$$

et enfin d'après ces dernières celles, que l'on doit démontrer.

5. 2. *Quelques corollaires.* Les resultats des §§. 2—4. combinés avec ceux du §. 5 donnent quelques corollaires nouveaux et intéressants p. e. le

Corollaire 52. 1. *Soient* $p(x)\in L[-1,1]$ *et* $w(x)\in L[-1,1]$ *des fonctions de poids non-négatives sur l'intervalle* $[-1,1]$ *avec les propriétés*

(52. 1) $$\log p\in L[-1,1];\quad \log w\in L[-1,1]$$

et

(52. 2) $$k(x)\equiv w(x)\cdot p^{-1}(x)\in L[-1,1];\quad k^{-1}(x)\in L[-1,1].$$

Le prémisses $(-1\leqq x_0\leqq 1)$

(52. 3) $$k(x_0)>0;\quad |k(x)-k(x_0)|\leqq C_{30}\sqrt{|x-x_0|}\cdot g(|x-x_0|),\quad si\quad |x-x_0|\leqq C_{31}$$

et

(52. 4) $$\sqrt{p(x)}\cdot\sqrt[4]{1-x^2}\cdot|p_n(x)|\leqq C_{32}\qquad (-1\leqq x\leqq 1;\ n=1,2,\ldots)$$

sont également supposés valables, où $\{p_n(x)\}$ — *resp.* $\{w_n(x)\}$ — *désignent les séries de polinômes orthonormaux de poids* $p(x)$ — *resp.* $w(x)$ — *et* $g(t)$ *la fonction monotone, définie sous* (4. 6)—(4. 8), *avec l'intégrale bornée* $\int_0^1 t^{-1}\cdot g^2(t)\,dt$.

Alors l'estimation

$$(52.5)\qquad \sqrt{w(x_0)}\sqrt[4]{1-x^2}\,|w_n(x_0)|\leqq C_{33}\qquad (n=1,2,\ldots)$$

est valable.

Corollaire 52. 2. *Soient supposés valables les prémisses* (52. 1), (52. 2) *et* (52. 4) *du corollaire 52. 1., et de plus au lieu de* (52. 3) *biensur la relation*

$$(52.6)\qquad k(x_0)>0;\quad \int_0^1 \frac{\omega(\delta;\,k;\,x_0-C_{34};\,x_0+C_{34})}{\delta}\,d\delta=C_{35}<\infty,$$

avec des constantes convenables $C_{34}>0$ *et* $C_{35}>0$. *L'estimation sous* (52. 5) *est alors aussi vérifiée.*

Les démonstrations sont presque triviales. Il suffit d'interposer une nouvelle fonction de poids entre $p(x)$ et $w(x)$ notamment p. e.

$$q(x)\equiv\begin{cases} p(x), & \text{si}\quad |x-x_0|>\frac{1}{2}C_{36}\\ w(x), & \text{si}\quad |x-x_0|\leqq\frac{1}{2}C_{36}\end{cases}$$

où $C_{36}>0$ est une constante choisie de telle sorte, que l'estimation

$$K(x)\equiv\frac{q(x)}{p(x)}\geqq\frac{1}{2}K(x_0)>0,\quad \text{si}\quad |x-x_0|\leqq C_{36}$$

soit valable. Ensuite — comme nous l'avons déjà fait pour démontrer le théorème 51. 3. — nous passons à la discussion de la série $\{w_n(x_0)\}$.

Corollaire 52. 3. *Les fonctions de poids non-négatives sur* $[-1, 1]$: $:p(x)\in L[-1,1]$ *et* $w(x)\in L[-1,1]$ *se laissent écrire sous la forme*

$$(52.7)\qquad p(x)\equiv p^*(x)\cdot\prod_{j=1}^{P}|x-x_j^{(p)}|^{\alpha_j};\quad w(x)\equiv w^*(x)\cdot\prod_{j=1}^{W}|x-x_j^{(w)}|^{\beta_j}$$

avec

$$(52.8)\qquad -1=x_1^{(p)}<x_2^{(p)}<\cdots<x_P^{(p)}=1;\quad -1=x_1^{(w)}<x_2^{(w)}<\cdots<x_W^{(w)}=1$$

$$(52.9)\qquad \min\{\alpha_2;\,\alpha_3;\ldots;\alpha_{P-1};\;\beta_2;\,\beta_3;\ldots;\beta_{W-1}\}>-1$$

$$(52.10)\qquad \min\{\alpha_1;\,\alpha_P;\,\beta_1;\,\beta_W\}>-\frac{1}{2}$$

$$(52.11)\qquad p^*(x)\in L[-1,1];\quad \frac{1}{p^*(x)}\in L[-1,1];$$

$$w^*(x)\in L[-1,1];\quad \frac{1}{w^*(x)}\in L[-1,1]$$

et enfin

$$(52.12)\qquad 0 < C_{37} \leqq p^*(x) \leqq C_{38} \quad si \quad \begin{cases} x_0 - C_{39} \leqq x \leqq x_0 - C_{40} \\ x_0 + C_{41} \leqq x \leqq x_0 + C_{42}, \end{cases}$$

$(0 \leqq C_{40} < C_{39};\ 0 \leqq C_{41} < C_{42};\ x_0 \neq x_j^{(p)};\ j = 1, 2, \ldots, P;\ x_0 \neq x_j^{(w)};\ j = 1, 2, \ldots, W)$.

Supposons les inégalités

$$(52.13)\qquad \sqrt{p(x)}\sqrt[4]{1-x^2}\cdot|p_n(x)| \leqq C_{43} \quad (|x-x_0| \leqq \max\{C_{39};\ C_{42}\};\ n = 1, 2, \ldots)$$

$$(52.14)\qquad k(x) \geqq \frac{1}{2}k(x_0) > 0, \quad si \quad |x-x_0| \leqq \max\{C_{39};\ C_{42}\}$$

et

$$(52.15)\qquad |k(x)-k(x_0)| \leqq C_{44}\sqrt{x-x_0}\cdot g(|x-x_0|);\ (|x-x_0| \leqq \max\{C_{39};\ C_{42}\})$$

aussi vérifiées.

Alors l'estimation

$$(52.16)\qquad \sqrt{w(x_0)}\cdot\sqrt[4]{1-x_0^2}\cdot|w_n(x_0)| \leqq C_{45} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

est valable.

Corollaire 52.4. *Supposons valables les prémisses* (52.7)—(52.14) *et de plus remplaçons* (52.15) *par*

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta;\ k;\ x_0 - \max\{C_{39};\ C_{42}\};\ x_0 + \max\{C_{39};\ C_{42}\})}{\delta}\,d\delta = C_{46} < \infty.$$

Alors l'estimation (52.16) *est valide.*

Comme nous l'avons fait précédemment, nous interposons quelques fonctions de poids nouvelles entre $p(x)$ et $w(x)$ pour terminer notre démonstration.

On remarquera ici que l'on peut aussi obtenir des corollaires de même forme dans le cas des fonctions de poids interprétées sur le cercle unitaire.

Nous signalons encore, que nous présenterons par la suite quelques généralisations nouvelles du théorème de KOROUS dans un travail sur l'asymptotique des polynomes orthonormaux, concernant des prémisses structurales globales de la fonction de poids.

Bibliographie.

[1] J. KOROUS, O rozvoji funkcí jedné reálné proměnné v řadu jistých ortogonálních polynomů, *Rozpravy České Akademie*, **48** (1938), 1—12.

[2] G. SZEGŐ, Orthogonal Polynomials, *New York*, 1939.

(Reçu le 28 février 1958.)