Über Invarianten, die aus gewissen Tensoren gebildet sind.

Herrn Professor O. Varga zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von I. MAKAI (Szeged).

Im folgenden wollen wir in einigen Spezialfällen das folgende Problem untersuchen: $\underset{(\alpha)}{\Omega}_{A_\alpha}$ $(\alpha=1,\dots,r;\ A_\alpha=1,\dots,s_\alpha)$ sollen die Komponenten von r verschiedenen Objekten bedeuten; es sollen die aus $\underset{(\alpha)}{\Omega}_{A_\alpha}$ bestimmbaren Invarianten angegeben werden. Ähnliche Probleme wurden für Vektoren und rein kovariante Tensoren zweiter Stufe von M. IKEDA und S. ABE [2] sowie von A. MOÓR [3] behandelt. In diesen Untersuchungen wurden aber aus den Vektoren bzw. Tensoren wieder Vektoren bzw. gleichartige Tensoren gebildet.

Unser erster Satz verallgemeinert unter Benützung der Forderung der Stetigkeit einen Satz von J. ACZÉL und S. GOŁĄB der in [1] veröffentlicht wird. Dieser Satz behauptet, daß von einem Vektor ξ_i keine Invariante gebildet werden kann.

Im weiteren werden wir die allgemeinste Form der aus den Vektoren λ_i und μ_i, bzw. aus dem rein kontravarianten Tensor t^{ik} und aus dem kovarianten Vektor ξ_i bestimmbaren Invarianten angeben. Unser Hauptergebnis ist, dass diese Invarianten Funktionen von $\lambda^i\mu_i$ bzw. von $t^{ik}\xi_i\xi_k$ sind.

Wir beweisen erstens den folgenden

Satz 1. *Aus dem Tensor* $T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$ *kann dann und nur dann ein von* $T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$ *stetig abhängender Tensor* $Q^{a_1\dots a_k}_{b_1\dots b_k}\neq$ *konst. gebildet werden, wenn* $r=s$ *erfüllt ist.*

BEWEIS. Zum Beweis der Notvendigkeit der Bedingung $r=s$ sei $Q^{a_1\dots a_k}_{b_1\dots b_k}$ allein aus dem Tensor $T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$ gebildet:

$$Q^{a_1\dots a_k}_{b_1\dots b_k}=S^{a_1\dots a_k}_{b\ \dots b_k}(T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}).$$

Nach einer Koordinatentransformation

$$(1)\qquad \bar{x}^i=\bar{x}^i(x^1,\dots,x^n)\quad\left(\left|\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\right|\neq 0\right),\qquad \bar{A}^i_k\stackrel{\text{def}}{=}\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k},\quad A^j_l\stackrel{\text{def}}{=}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^l}$$

ist dann nach der Transformationsformel der Tensoren

$$(2)\qquad S^{a_1\ldots a_k}_{b_1\ldots b_k}(\bar{A}^{i_1}_{p_1}\cdots\bar{A}^{i_r}_{p_r}\cdot A^{q_1}_{j_1}\cdots A^{q_s}_{j_s}\cdot T^{p_1\ldots p_r}_{q_1\ldots q_s})=\bar{A}^{a_1}_{u_1}\cdots\bar{A}^{a_k}_{u_k}\cdot A^{v_1}_{b_1}\cdots A^{v_k}_{b_k}\cdot S^{u_1\ldots u_k}_{v_1\ldots v_k}(T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}).$$

Nehmen wir $\bar{A}^i_k=\varrho\delta^i_k$ $(\varrho\neq 0)$ $\left(\text{wegen } \bar{A}^i_k A^k_l=\delta^i_l \text{ ist } A^k_i=\frac{1}{\varrho}\delta^k_i\right)$, dann folgt aus der Relation (2)

$$S^{a_1\ldots a_k}_{b_1\ldots b_k}(\varrho^{r-s}\cdot T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s})=S^{a_1\ldots a_k}_{b_1\ldots b_k}(T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}).$$

Wir wollen jetzt bedingen, daß $r\neq s$ ist, so wird nach dem Grenzübergang $\varrho^{r-s}\to 0$ wegen der vorausgesetzten Stetigkeit und nach der Vertauschung der Seiten von (2)

$$S^{a_1\ldots a_k}_{b_1\ldots b_k}(T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s})=S^{a_1\ldots a_k}_{b_1\ldots b_k}(0,\ldots,0)=\text{konst}.$$

Folglich ist $S^{a_1\ldots a_k}_{b_1\ldots b_k}$ im Widerspruch zur Forderung unabhängig von $T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$; die Bedingung $r=s$ is$S^{a_1\ldots a_k}_{b_1\ldots b_k}(T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s})=S^{a_1\ldots a_k}_{b_1\ldots b_k}(0,\ldots,0)=\text{konst}.$

Sie ist aber auch hinreichend, weil in diesem Falle z. B. der Tensor $S^{a_1\ldots a_k}_{b_1\ldots b_k}=Q^{a_1}_{b_1}\cdots Q^{a_k}_{b_k}$, $Q^i_j\overset{\text{def}}{=}T^{ic_1\ldots c_{r-1}}_{jc_1\ldots c_{r-1}}$ offenbar einen Tensor von der gewünschten Form darstellt.

Aus dem Satz 1 folgt unmittelbar für $k=0$ das

Korollar 1. *Es kann aus dem Tensor $T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$ $(r\neq s)$ keine stetige Invariante gebildet werden.*

Für $r=1, s=0$ bekommt man aus dem Korollar 1:

Korollar 2. *Es kann aus einem Vektor T^i keine stetige Invariante gebildet werden.*

Unser Korollar 2 befindet sich ohne Stetigkeitsvoraussetzung als Satz in [1].

Wir wollen jetzt das folgende Problem untersuchen: λ^i und μ_i seien ein kontra-, bzw. ein kovarianter Vektor. Es soll die allgemeinste Form der aus λ^i und μ_i bestimmbaren Invarianten angegeben werden. Wir beweisen den

Satz 2. *Jede aus den Vektoren λ^i,μ_i gebildete stetige Invariante I hat die Form:*

$$I(\lambda^1,\ldots,\lambda^n,\mu_1,\ldots,\mu_n)=f(\lambda^i\mu_i),$$

wo $f(x)$ eine stetige Funktion bedeutet, I also nur von $\lambda^i\cdot\mu_i$ abhängt.

Beweis. Aus der Transformationsformel der Invarianten folgt

$$(3)\qquad \begin{aligned} I(\lambda^1,\ldots,\lambda^n,\mu_1,\ldots,\mu_n)&=I(\bar{\lambda}^1,\ldots,\bar{\lambda}^n,\bar{\mu}_1,\ldots,\bar{\mu}_n)=\\ &=I(\bar{A}^1_{a_1}\cdot\lambda^{a_1},\ldots,\bar{A}^n_{a_n}\cdot\lambda^{a_n},A^{b_1}_1\cdot\mu_{b_1},\ldots,A^{b_n}_n\cdot\mu_{b_n}).\end{aligned}$$

Nach der Substitution $A_k^i = \lambda^i \cdot \delta_k^i$ $(\lambda^i \neq 0,\ i=1, 2, \ldots, n)$ (wegen $\bar{A}_k^i A_l^k = \delta_l^i$ ist $A_k^i = \frac{1}{\lambda^i}\delta_k^i$, n. s. auf i) folgt aus der Gleichung (3)

$$I(\lambda^1, \ldots, \lambda^n, \mu_1, \ldots, \mu_n) = I^*(\lambda^1 \mu_1, \ldots, \lambda^n \mu_n), \tag{4}$$

wo

$$I^*(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} I(1, \ldots, 1, \quad x_1, \ldots, x_n)$$

ist. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit ist (4) auch im Falle $\lambda^i = 0$ gültig.

Nach der Substitution

$$\lambda^i = s \cdot \delta_1^i, \quad \mu_i = \delta_i^1$$

bekommt man aus der Relation (4) im Hinblick auf (3)

$$I^*(s, 0, \ldots, 0) = I^*(s \cdot \bar{A}_1^1 A_1^1, \quad s \cdot \bar{A}_1^2 \bar{A}_2^1, \ldots, s \cdot \bar{A}_1^n A_n^1). \tag{5}$$

Wir führen die Bezeichnung

$$\xi^{(i)} = \bar{A}_1^i A_i^1 \qquad \text{(n. s. auf } i)$$

ein. (Eine Lösung des Gleichungssystems $\xi^{(i)} = \bar{A}_1^i A_i^1$ (n. s. auf i) bezüglich der A_j^i ist z. B. durch

$$A_i^1 = \xi^{(i)}, \quad A_1^j = 1 \ (j \neq 1), \quad A_i^j = \delta_i^j \ (i \neq 1, j \neq 1)$$

angegeben.) Wegen $\bar{A}_t^j A_j^s = \delta_t^s$ wird

$$\sum_{i=1}^n \xi^{(i)} = \bar{A}_1^j A_j^1 = 1,$$

d. h. das System $\xi^{(i)}$ besteht aus $n-1$ unabhängigen Veränderlichen. Folglich sind $\eta^{(i)} = s\xi^{(i)}$ $(s \neq 0)$ n unabhängige Veränderlichen, da das Gleichungssystem $\eta^{(i)} = s\xi^{(i)}$ $(s \neq 0)$ eindeutig lösbar ist, wenn wir die Werte $\eta^{(i)}$ angeben:

$$\xi^{(i)} = \frac{\eta^{(i)}}{\sum_{j=1}^n \eta^{(j)}}, \quad s = \sum_{j=1}^n \eta^{(j)}.$$

Wir bekommen dann aus der Gleichung (5)

$$I^*\left(\sum_{j=1}^n \eta^{(j)}, 0, \ldots, 0\right) = I^* \ (\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)}). \tag{6}$$

Da I und I^* stetige Funktionen sind, ist (6) auch im Falle $s = \sum_{j=1}^n \eta^{(j)} = 0$ gültig.

Es sei jetzt $\eta^{(i)} = \lambda^i \mu_i$ (n. s. auf i), so folgt aus (6)

$$I^*(\lambda^1 \mu_1, \ldots, \lambda^n \mu_n) = f(\lambda^k \mu_k) \tag{7}$$

mit

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} I^*(x, 0, \ldots, 0).$$

Die Formeln (4) und (7) beweisen aber eben den Satz 2.

Jetzt nehmen wir an, dass die Invariante I aus einem rein kontravarianten Tensor zweiter Stufe t^{ik} und aus einem Vektor ξ_i gebildet werden soll. In diesem Fall besteht der folgende

Satz 3. *Die allgemeinste Form der aus dem Tensor t^{ik} und aus dem Vektor ξ_i gebildeten stetigen Invarianten ist*

$$I(t^{ik}, \xi_j) = g(t^{ik}\xi_i\xi_k),$$

wo $g(x)$ ebenfalls eine stetige Funktion bedeutet; I ist also nur von $t^{ik}\xi_i\xi_k$ abhängig.

Beweis. Die der Formel (3) entsprechende Transformationsformel wird in diesem Falle:

$$I(t^{ik}, \xi_j) = I(\bar{A}^i_a \bar{A}^k_b t^{ab}, A^c_j \xi_c) \tag{8}$$

sein. Wenden wir wieder die Substitution $A^i_k = \frac{1}{\xi_i} \cdot \delta^i_k$ ($\xi_i \neq 0, i = 1, 2, \ldots, n$) an, so folgt aus der Gleichung (8):

$$I(t^{ik}, \xi_j) = I(t^{ik}\xi_i\xi_k, 1) \qquad \text{(n. s. auf } i, k).$$

Nach der Bezeichung $I^*(x_1, \ldots, x_{n^2}) \overset{\text{def}}{=} I(x_1, \ldots, x_{n^2}, 1, \ldots, 1)$ wird

$$I(t^{ik}, \xi_j) = I^*(t^{ik}\xi_i\xi_k) \qquad \text{(n. s. auf } i, k). \tag{9}$$

Wegen der Stetigkeit der Funktion I ist aber (9) auch im Falle $\xi_i = 0$ gültig. Wenn $\xi_i = \delta^1_i$ ist, dann wird nach der Koordinatentransformation (1) $\bar{\xi}_i = A^1_i$ und die Form der Invariante I^* wird in den Koordinatenssystemen x^i und $\bar{x}^i$:

$$I(t^{11}, 0, \ldots, 0) = I^*(\bar{A}^i_a \bar{A}^k_b A^1_i A^1_k \cdot t^{ab}) \qquad \text{(n. s. auf } i, k). \tag{10}$$

Wir führen die neuen Veränderlichen

$$G^{(ik)} = \bar{A}^i_a \bar{A}^k_b A^1_i A^1_k t^{ab} \qquad \text{(n. s. auf } i, k)$$

ein. Das Gleichungssystem $G^{(ik)} = \bar{A}^i_a \bar{A}^k_b A^1_i A^1_k t^{ab}$ ist für vorgegebene $G^{(ik)}$ bezüglich $A^i_j, \bar{A}^k_l, t^{ik}$ auflösbar. (Eine Lösung ist z. B. die folgende:

$$A^1_i = 1, \quad A^j_i = \delta^j_i \ (j \neq 1), \quad \text{also} \quad \bar{A}^i_j = \delta^i_j \ (i \neq 1),$$
$$\bar{A}^1_1 = -\bar{A}^1_2 = \cdots = -\bar{A}^1_n = 1;$$

$$\left(t^{11} = \sum_{i,k=1}^{n} G^{(ik)}; \quad t^{1k} = \sum_{j=1}^{n} G^{(jk)}, \quad t^{k1} = \sum_{j=1}^{n} G^{(kj)} \ (k \neq 1); \quad t^{ik} = G^{(ik)} \ (i, k \neq 1)\right).$$

Wenn wir die Veränderlichen $G^{(ik)}$ in die Gleichung (10) substituieren, so bekommen wir

$$I^*\left(\sum_{a,b=1}^{n} G^{(ab)}, 0, \ldots, 0\right) = I^*(G^{(ik)}),$$

oder

$$I^*(G^{(ik)}) = g\left(\sum_{a,b=1}^{n} (G^{(ab)})\right), \quad g(x) \stackrel{\text{def}}{=} I^*(x, 0, \ldots, 0). \tag{11}$$

Mit der Substitution $G^{(ik)} = t^{ik}\xi_i\xi_k$ (n. s. auf i, k) erhalten wir aus (11) wegen (9) den Satz 3.

Auf ähnliche Weise können wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 3*. *Jede, aus dem Tensor t_{ik} und aus dem Vektor η^i gebildete stetige Invariante I hat die Form:*

$$I(t_{ik}, \eta^j) = h(t_{ik}\eta^i\eta^k)$$

($h(x)$ ist auch in diesem Falle eine stetige Funktion).

Schließlich möchte ich auch an dieser Stelle den Herren Prof. J. Aczél, B. Gyires für ihre wertvollen Bemerkungen und auch Herrn A. Moór, der meine Aufmerksamkeit auf diese Probleme gerichtet und mit mir darüber wertvolle Diskussionen geführt hat, meinen Dank aussprechen.

Literatur.

[1] J. Aczél und S. Gołąb, Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte, *Warszawa,* 1960.

[2] M. Ikeda and S. Abe, On tensorial concomitants of a nonsymmetric tensor $g_{\mu\nu}$. I, *Tensor,* (new series) 7 (1957). 59—69.

[3] A. Moór, Über Tensoren, die aus angegebenen geometrischen Objekten gebildet sind, *Publ. Math. Debrecen* **6** (1959), 15—25.

(Eingegangen am 12. März, 1959.)