Über die Schranken der Eigenwerte von Hypermatrizen.

Herrn Professor Dr. O. Varga zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von BÉLA GYIRES (Debrecen).

1. In der vorliegenden Arbeit verwenden wir die folgenden Bezeichnungen: Mit Indizes versehene große lateinische Buchstaben bezeichnen Matrizes der Ordnung p, große lateinische Buchstaben ohne Indizes Matrizes der Ordnung np, große griechische Buchstaben Matrizes der Ordnung n, wobei sämtliche Matrizes über dem komplexen Zahlkörper gebildete quadratische Matrizes sind. E steht für die Einheitsmatrix der Ordnung p, und mit einem Stern wird, wie üblich, die Konjugierte der Transponierten einer Matrix bezeichnet. Die Indizes k und l durchlaufen voneinander unabhängig die Werte $1, 2, \ldots, n$. Mit x_k bzw. mit y_k bezeichnen wir von Null verschiedene Vektoren des komplexen Vektorraumes der Ordnung p. Der kleinste bzw. der größte unter den Eigenwerten einer Hermiteschen Matrix wird durch einen oberen Index (α) bzw. (ω) ausgezeichnet.

In unseren Beweisen machen wir von der bekannten Tatsache Gebrauch, daß der auf der Einheitssphäre betrachteter Wertevorrat einer zu einer quadratischen Matrix gehörigen Bilinearform auf der komplexen Zahlenebene durch einen abgeschlossenen Kreisbereich vom Mittelpunkt Null dargestellt wird. Den Radius dieses Bereiches bezeichnen wir mit $R(\,)$, wobei zwischen den Klammern die betreffende Matrix angedeutet wird. Wir werden uns auch auf den bekannten Satz berufen, wonach die auf der Einheitssphäre genommene untere bzw. obere Grenze des Wertevorrates einer zu einer Hermiteschen Matrix gehörenden quadratischen Form mit dem kleinsten bzw. mit dem größten Eigenwert der Matrix zusammenfällt. Die auf der Einheitssphäre genommene obere Grenze des Absolutwertes einer beliebigen quadratischen Matrix wird durch $M(\,)$ bezeichnet, wobei zwischen Klammern wiederum die betreffende Matrix angedeutet wird. Bekanntlich gilt

$$(1) \qquad 0 \leqq M(\,) \leqq R(\,) \leqq 2M(\,)$$

und für normale Matrizes $M(\,) = R(\,)$.

2. Von den Matrizes A_{kl} und von den der Bedingung

(2) $$P_{kl} P_{lk}^* = E$$

genügenden Matrizes P_{kl} ausgehend bilden wir die Matrizes

(3) $$B_{kl} = P_{kl} A_{kl} P_{lk}^*$$

und sodann die Hypermatrix

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \cdot & & \cdots & \cdot \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix}.$$

Der Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, für die Eigenwerte der Matrix B von den Matrizes A_{kl} und P_{kl} abhängige obere und untere Schranken zu bestimmen. Unsere daraufbezüglich erhaltenen Resultate werden durch die folgenden Sätze ausgedrückt:

Satz 1. *Es werde durch λ_{kl} ein beliebiger Eigenwert der positiv definiten Hermiteschen Matrix $P_{kl} P_{kl}^*$ und durch μ ein beliebiger Eigenwert der Matrix B bezeichnet. Ausserden sei*

(4) $$\Omega = \langle M(A_{11}), M(A_{22}), \ldots, M(A_{nn}) \rangle,$$

wobei $\langle \; \rangle$ diejenige Diagonalmatrix bezeichnet, in deren Diagonalen der Reihe nach die angedeuteten Zahlen auftreten, und es sei endlich

(5) $$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & 0 & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

wobei

(6) $$c_{kl} = R(A_{kl}) \sqrt{\frac{\lambda_{kl}^{(\omega)}}{\lambda_{kl}^{(\alpha)}}} \qquad (k \neq l)$$

ist; dann gilt

(7) $$|\mu| \leqq M(\Omega + \Gamma).$$

Falls wir in der Matrix (4) an Stelle der Zahlen $M(A_{kk})$ die Zahlen $R(A_{kk})$ einsetzen, so wird — wie dies mit Rücksicht auf (1) aus einer Untersuchung der Hermiteschen Formen auf der Einheitssphäre hervorgeht — der Wert $M(\Omega + \Gamma)$ in (7) durch eine nicht kleinere Zahl ersetzt. Falls jedoch die Matrizes A_{kk} Hermitesch sind, so gilt — wie wir dies schon erwähnt haben — $M(A_{kk}) = R(A_{kk})$, d. h. (7) bleibt unverändert. Im Falle der Auferlegung einer stärkeren Einschränkung, und zwar wenn

$$A_{kl} = A_{lk}^{*} \tag{8}$$

gilt, können wir auch eine bessere Abschätzung als (7) erhalten. Es gilt nämlich

$$\frac{\lambda_{kl}^{(\omega)}}{\lambda_{kl}^{(\alpha)}} = \frac{\lambda_{lk}^{(\omega)}}{\lambda_{lk}^{(\alpha)}} \tag{9}$$

und wegen (8)

$$R(A_{kl}) = R(A_{lk}), \tag{10}$$

so daß auf Grund von (6) die Matrix (5) eine aus nichtnegativen Elementen bestehende reelle symmetrische Matrix ist. Bezeichnet ϱ einen beliebigen Eigenwert dieser Matrix, dann gilt

$$\varrho^{(\omega)} \geqq 0. \tag{11}$$

Nunmehr sei λ_k ein beliebiger Eigenwert der wegen (8) Hermiteschen Matrix A_{kk}, und es sei

$$\Lambda^{(\alpha)} = \langle \lambda_1^{(\alpha)}, \ldots, \lambda_n^{(\alpha)} \rangle,$$
$$\Lambda^{(\omega)} = \langle \lambda_1^{(\omega)}, \ldots, \lambda_n^{(\omega)} \rangle,$$

außerdem soll γ bzw. δ einen beliebigen Eigenwert der reellen symmetrischen Matrix $\Lambda^{(\alpha)} - \Gamma$ bzw. $\Lambda^{(\omega)} + \Gamma$ bedeuten. Sodann gilt der folgende

Satz 2. *Ist die Bedingung* (8) *erfüllt, so gilt*

$$\gamma^{(\alpha)} \leqq \mu^{(\alpha)} \leqq \mu^{(\omega)} \leqq \delta^{(\omega)}. \tag{12}$$

Es sei noch

$$\lambda^{(\alpha)} = \min \lambda_k^{(\alpha)}, \quad \lambda^{(\omega)} = \max \lambda_k^{(\omega)},$$

für diesen Fall wird durch den folgenden Satz eine Abschätzung gegeben, welche aber in beiden Richtungen weniger günstig ausfällt als (12):

Satz 3. *Ist die Gleichung* (8) *erfüllt, so gilt*

$$\lambda^{(\alpha)} - \varrho^{(\omega)} \leqq \mu^{(\alpha)} \leqq \mu^{(\omega)} \leqq \lambda^{(\omega)} + \varrho^{(\omega)}. \tag{13}$$

Diese Ungleichung ist keiner Verschärfung fähig, da es der Bedingung (8) genügenden Matrizes A_{kl} und der Bedingung (2) genügenden Matrizes P_{kl} gibt, für welche in (13)

$$\lambda^{(\alpha)} - \varrho^{(\omega)} = \mu^{(\alpha)}, \quad \lambda^{(\omega)} + \varrho^{(\omega)} = \mu^{(\omega)}$$

gilt. Daraus folgt aber zugleich, daß auch die Ungleichungen (12) nicht verschärft werden können.

Nach einem Satz von COLLATZ ([1], S. 223) gilt

$$\varrho^{(\omega)} \leqq \max_{(k)} \sum_{l=1}^{n} c_{kl}.$$

Falls auch noch

$$\lambda^{(\alpha)} - \sum_{l=1}^{n} c_{kl} \geqq 0$$

erfüllt ist, so sind nach (13) sämtliche Eigenwerte der die Bedingung (8) befriedigenden Hermiteschen Matrix B positiv. Dieses Ergebnis kann als eine Verallgemeinerung des Minkowskischen Determinantensatzes [2] angesehen werden.

Es ist noch zu bemerken, daß (7), und auch (12) sowie (13), in dem Sinne unitär invariant sind, daß die in diesen Ungleichungen auftretenden Schranken dann und nur dann von den Matrizes P_{kl} unabhängig sind, falls

$$P_{kl} P_{kl}^* = d_{kl} E \qquad (d_{kl} > 0)$$

gilt. Es hängt nämlich nur die Matrix (5) von den P_{kl} ab, aber auch diese wird unabhängig, falls die Quotienten (9) gleich 1 sind, d. h. falls $\lambda_{kl}^{(\alpha)} = \lambda_{kl}^{(\omega)} = d_{kl} > 0$ ist. Zugleich erreichen in diesem Falle die für gegebene Matrizes A_{kl} in den Ungleichungen (7), (12) und (13) auftretenden Schranken ihren kleinsten Wert.

3. Hier geben wir die Beweise unserer im Punkt 2. dargelegten Ergebnisse.

Da die Matrizes P_{kl} im Sinne von (2) regulär sind, fallen sämtliche Eigenwerte der Hermiteschen Matrix $P_{kl} P_{kl}^*$ positiv aus. Auf Grund von (2) gilt

$$(P_{kl} P_{kl}^*)(P_{lk} P_{lk}^*) = E$$

und folglich

$$\lambda_{lk}^{(\alpha)} = \frac{1}{\lambda_{kl}^{(\omega)}}, \quad \lambda_{lk}^{(\omega)} = \frac{1}{\lambda_{kl}^{(\alpha)}}, \tag{14}$$

so daß die Relation (9) besteht. Auf Grund von (14) ist auch noch die Ungleichung

$$\frac{x_k P_{kl} P_{kl}^* x_l^*}{x_k x_k^*} \cdot \frac{x_l P_{lk} P_{lk}^* x_l^*}{x_l x_l^*} \leqq \frac{\lambda_{kl}^{(\omega)}}{\lambda_{kl}^{(\alpha)}} \tag{15}$$

erfüllt.

Da nun

$$\frac{x_k B_{kl} x_l^*}{\sqrt{x_k x_k^*}\sqrt{x_l x_l^*}} = \frac{y_k A_{kl} y_l^*}{\sqrt{y_k y_k^*}\sqrt{y_l y_l^*}} \sqrt{\frac{x_k P_{kl} P_{kl}^* x_k^*}{x_k x_k^*}} \sqrt{\frac{x_l P_{lk} P_{lk}^* x_l^*}{x_l x_l^*}}$$

ist, und da die Transformation $y_k = x_k P_{kl}$ den p-dimensionalen komplexen

Vektorraum in umkehrbar eindeutiger Weise auf sich selbst abbildet, gilt auf Grund der Definition der Größen $R(A_{kl})$ und wegen (15) die Ungleichung

$$|x_k B_{kl} x_l^*| \leqq c_{kl} \sqrt{x_k x_k^*} \sqrt{x_l x_l^*}. \tag{16}$$

Anderseits sind mit Rücksicht auf (2) die Matrizes P_{kk} unitär, und so ist

$$\frac{x_k B_{kk} x_k^*}{x_k x_k^*} = \frac{y_k A_{kk} y_k^*}{y_k y_k^*}, \tag{17}$$

wobei diesmal $y_k = x_k P_{kk}$ ist, und folglich gilt auf Grund der Definition von $M(A_{kk})$

$$|x_k B_{kk} x_k^*| \leqq M(A_{kk}) x_k x_k^*. \tag{18}$$

Wegen (16) und (18) gilt nunmehr

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} x_k B_{kl} x_l^*}{\sum_{k=1}^{n} x_k x_k^*} \leqq \frac{\sum_{k=1}^{n} M(A_{kk}) (\sqrt{x_k x_k^*})^2 + \sum_{k \neq l} c_{kl} \sqrt{x_k x_k^*} \sqrt{x_l x_l^*}}{\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{x_k x_k^*})^2}.$$

Falls wir die obere Grenze der auf der Einheitssphäre genommenen Absolutwerte der auf der rechten Seite dieser Ungleichung auftretenden quadratischen Form bilden und auch noch darauf Rücksicht nehmen, daß der auf der Einheitssphäre genommene Wertevorrat einer zu einer Matrix gehörigen quadratischen Form auch die Eigenwerte enthält, so erhalten wir den Beweis des Satzes 1.

Um den Nachweis von Satz 2. zu erbringen, beweisen wir vor allem die Gültigkeit von (10). Gemäß (8) gilt

$$\overline{x_l A_{lk} x_k^*} = x_k A_{kl} x_l^*, \tag{19}$$

d. h. die auf der Einheitssphäre genommenen reellen Werte der zu A_{kl} und zu A_{lk} gehörigen bilinearen Formen stimmen überein. Da die auf der Einheitssphäre betrachtete bilineare Form der Matrix A_{kl} auch den Wert $R(A_{kl})$ annimmt, gehört dieser Wert nach dem vorher gesagten auch zu dem, auf der Einheitssphäre genommenen Wertevorrat der dem Matrix A_{lk} zugeordneten bilinearen Form. Dementsprechend gilt $R(A_{kl}) \leqq R(A_{lk})$. Indem wir jetzt noch die Rollen der beiden Matrizes vertauschen, gelangen wir zu der Gleichung (10).

(11) ergibt sich trivialerweise, falls wir den Umstand in Erwägung ziehen, daß die zu (5) gehörige quadratische Form für jeden Vektor mit lauter nichtnegativen Komponenten einen nichtnegativen Wert annimmt.

Wegen des Erfülltseins der Bedingung (8) und mit Rücksicht auf (2) und auf (3) gilt

$$B_{kl} = B_{lk}^*, \tag{20}$$

so daß die Matrix B Hermitesch ist. Da nun wegen (20) die Gleichung (19) auch dann bestehen bleibt, falls A_{kl} durch B_{kl} ersetzt wird, ist

$$x_k B_{kl} x_l^* + x_l B_{lk} x_k^*$$

reell, so daß (16) durch

$$-2c_{kl}\sqrt{x_k x_k^*}\sqrt{x_l x_l^*} \leqq x_k B_{kl} x_l^* + x_l B_{lk} x_k^* \leqq 2c_{kl}\sqrt{x_k x_k^*}\sqrt{x_l x_l^*} \tag{21}$$

ersetzt werden kann. Wegen (20) ist B_{kk} Hermitesch und mit Rücksicht auf (17) gilt

$$\lambda_k^{(\alpha)} x_k x_k^* \leqq x_k B_{kk} x_k^* \leqq \lambda_k^{(\omega)} x_k x_k^*. \tag{22}$$

Auf Grund von (21) und von (22) gilt

$$\begin{aligned} &\frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(\alpha)} (\sqrt{x_k x_k^*})^2 - \sum_{k \neq l} c_{kl}\sqrt{x_k x_k^*}\sqrt{x_l x_l^*}}{\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{x_k x_k^*})^2} \leqq \frac{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} x_k B_{kl} x_l^*}{\sum_{k=1}^{n} x_k x_k^*} \leqq \\ &\leqq \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(\omega)} (\sqrt{x_k x_k^*})^2 + \sum_{k \neq l} c_{kl}\sqrt{x_k x_k^*}\sqrt{x_l x_l^*}}{\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{x_k x_k^*})^2}. \end{aligned} \tag{23}$$

Hier treten auf der linken bzw. auf der rechten Seite solche Werte der zu der Matrix $\Lambda^{(\alpha)} - \Gamma$ bzw. $\Lambda^{(\omega)} + \Gamma$ gehörenden quadratischen Form auf, die auf der Einheitssphäre angenommen werden. Wenden wir jetzt den in der Einleitung erwähnten Satz an, wonach der auf der Einheitssphäre angenommene Wertevorrat einer Hermiteschen Form in das, durch den größten und den kleinsten Eigenwert der Form abgegrenztes Intervall fällt, so gelangen wir zu der Behauptung von Satz 2.

Wenden wir den soeben erwähnten Satz in (23) der Reihe nach auf die Matrizes $\Lambda^{(\alpha)}$, $\Lambda^{(\omega)}$ und Γ an, so wird dadurch Satz 3. bewiesen. Da nun das Maximum einer Summe nicht größer sein kann als die Summe der Maxima der einzelnen Glieder, und das Minimum einer Differenz nicht kleiner, als die Differenz zwischen den Minima des Minuenden und des Subtrahenden, so gilt offenbar

$$\lambda^{(\alpha)} - \varrho^{(\omega)} \leqq \gamma^{(\alpha)}, \quad \lambda^{(\omega)} + \varrho^{(\omega)} \geqq \delta^{(\omega)}$$

und daraus geht hervor, daß die Abschätzung (12) in beiden Richtungen tatsächlich besser ist als (13).

Es sei nunmehr $n = 2$ und

$$A_{11} = A_{22} = E, \quad P_{12}P_{12}^* = E, \quad A_{12} = U, \quad UU^* = E.$$

In diesem Falle gilt $\mu^{(\omega)}=2$, $\mu^{(\alpha)}=0$. Anderseits ist $R(U)=1$, $\lambda_{12}^{(\omega)}=\lambda_{12}^{(\alpha)}=1$, und folglich $\varrho^{(\omega)}=1$, weiterhin $\lambda^{(\alpha)}=\lambda^{(\omega)}=1$ und so endlich $\lambda^{(\alpha)}-\varrho^{(\omega)}=0=\mu^{(\alpha)}$ und $\lambda^{(\omega)}+\varrho^{(\omega)}=2=\mu^{(\omega)}$. Folglich kann die Ungleichung (13) tatsächlich nicht verschärft werden.

Es sei also wiederum $n=2$, sowie $p\geqq 2$ und

$$A_{11}=A_{22}=E,\quad A_{12}=A_{21}^*=U,\quad UU^*=E,$$

wobei U eine unitäre Matrix bedeutet, in welcher sämtliche Elemente der letzten Zeile bzw. der letzten Spalte gleich Null sind, mit Ausnahme des ersten Elementes, welches gleich 1 ist, d. h.

$$U=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \cdot & V & \cdot \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\quad VV^*=E$$

(im Falle $p=2$ tritt V nicht auf), und es sei P_{12} eine Diagonalmatrix, deren erstes Element gleich a, und deren letztes Element gleich b ist, $(a>b>0)$ während an den übrigen Stellen lauter Einsen stehen, d. h. es sei

$$P_{12}=\begin{pmatrix} a & & & \\ & 1 & (0) & \\ & (0) & \ddots\; 1 & \\ & & & b \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt bereits

$$P_{12}=P_{12}^*=P_{21}^{-1}=(P_{21}^{-1})^*.$$

Gemäß diesen Bedingungen ist $\lambda^{(\alpha)}=\lambda^{(\omega)}=1$, sowie

$$R(A_{12})=R(A_{21})=1,\quad \sqrt{\frac{\lambda_{12}^{(\omega)}}{\lambda_{12}^{(\alpha)}}}=\frac{a}{b}>1,$$

woraus $\varrho^{(\omega)}=\dfrac{a}{b}$ folgt. Auf Grund von (13) gilt also

$$1-\frac{a}{b}\leqq\mu^{(\alpha)}\leqq\mu^{(\omega)}\leqq 1+\frac{a}{b}. \tag{23}$$

Nunmehr berechnen wir die Wurzeln der charakteristischen Gleichung vom Grade $2p$

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} A_{11}-\mu E & P_{12}A_{12}P_{21}^* \\ P_{21}A_{21}P_{12}^* & A_{22}-\mu E \end{pmatrix}=0. \tag{24}$$

Da die Matrizes, welche sich in der ersten und in der zweiten Zeile der

Hypermatrix dieser Determinante befinden, miteinander vertauschbar sind, läßt sich (24) durch die Gleichung

$$\operatorname{Det}\left((1-\mu)^2E-(P_{12}UP_{21}^*)(P_{21}U^*P_{12}^*)\right)=0$$

ersetzen. Es ist aber

$$P_{12}UP_{21}^*=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \frac{a}{b} \\ \cdot & V & \cdot \\ \frac{b}{a} & \cdots & 0 \end{pmatrix},\quad P_{21}U^*P_{12}^*=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \frac{b}{a} \\ \cdot & V^* & \cdot \\ \frac{a}{b} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

und folglich

$$(P_{12}UP_{21}^*)(P_{21}U^*P_{12}^*)=\begin{pmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)^2 & \cdots & 0 \\ \cdot & VV^* & \cdot \\ 0 & \cdots & \left(\frac{b}{a}\right)^2 \end{pmatrix},$$

d. h. die Wurzeln der Gleichung (24) sind $1+\frac{a}{b}$, $1-\frac{a}{b}$, $1+\frac{b}{a}$, $1-\frac{b}{a}$, 2, 0, wobei die ersten vier Werte mit der Multiplizität 1, die beiden übrigen aber mit der Multiplizität $p-2$ auftreten. Somit ist $\mu^{(\alpha)}=1-\frac{a}{b}$ und $\mu^{(\omega)}=1+\frac{a}{b}$ und ein Vergleich mit (23) zeigt uns wiederum, daß in (13) die Grenzen keiner Verbesserung fähig sind. Zugleich sieht man aber, daß es möglich ist, durch passende Wahl der Matrizes P_{kl} die linke Seite der Ungleichung (13) beliebig klein und die rechte Seite beliebig groß zu machen, wobei diese Grenzen genaue Grenzen sind.

Literatur.

[1] L. Collatz, Einschließungssatz bei Matrizen, *Math. Z.* **48** (1942—43), 221—226.

[2] H. Minkowski, Zur theorie der Einheiten in der algebraischer Zahlkörpern, *Gesammelte Abhandlungen von. H. Minkowski* 1, *Leipzig—Berlin*, 1911, S. 316—317.

(*Eingegangen am 10. April, 1959.*)