Über die Begründung der lokalen metrischen Differentialgeometrie.

Herrn Professor O. Varga anlässlich seines 50. Geburtstages mit Zuneigung und Verehrung gewidmet.

Von A. RAPCSÁK (Debrecen).

§ 1. Das lokale Koordinatensystem.

Bei der Begründung der metrischen differentialgeometrischen Räume betrachten wir zwei Grundelemente, und zwar

a) *das Linienelement* ($\mathfrak{v}$)

b) *die Kurve* ($\mathfrak{g}$).

Wir brauchen außerdem eine Klasse (Λ) von Funktionen einer Veränderlichen, welche den folgenden Bedingungen genügt:[1])

1. $\Lambda \subset C^3$

2. Ist $f(t) \in \Lambda$, dann gilt

a) $-\infty \leqq \alpha < t < \beta \leqq +\infty$

b) $|f(t)| < 1$.

Die Funktionen $f^i(t)$ werden ein Funktionen-n-tupel genannt,[2]) falls

1. $f^i \in \Lambda$ und 2. $\sum_{i=1}^{n} (f^i{}'(t))^2 > 0$.

I. A: *Die Menge der Linienelemente und der Kurven läßt sich in (nicht notwendigerweise disjunkte) Teilmengen zerlegen, deren jede die folgenden Eigenschaften besitzt:*

1. *Jedem Linienelement* $\mathfrak{v}$ *lassen sich zwei geordnete Zahlen-n-tupeln zuordnen, wobei*

a) $x^i x^i < 1$ *und* b) $v^i v^i > 0$

---

1) C^k bedeutet die Klasse der mindestens k-mal stetig differenzierbaren Funktionen.

2) Die lateinischen Indizes laufen von 1 bis n. Das auftretende Komma bedeutet die Differentiation.

gilt. — Umgekehrt gehört zu jedem a) *und* b) *befriedigenden Zahlen-2n-tupel ein Linienelement* $\mathfrak{v}$.

2. *Jeder Kurve* $\mathfrak{g}$ *lassen sich zwei geordnete Funktionen-n-tupel* $f^i(t)$ *und* $\varphi^i(t)$ *zuordnen, für welche* $f^i(t) \in A$ *und* $\varphi^i(t) \in A$ *gilt. — Umgekehrt gehört zu jedem solchen Funktionen-2n-tupel eine Kurve.*[3])

II. A: 1. *Zwei Linienelemente*

$$\underset{(1)}{\mathfrak{v}}(\underset{(1)}{x}, \underset{(1)}{v}) \quad und \quad \underset{(2)}{\mathfrak{v}}(\underset{(2)}{x}, \underset{(2)}{v})$$

sind dann und nur dann identisch, falls

$$\text{a)} \quad \underset{(1)}{x^i} = \underset{(2)}{x^i}$$

$$\text{b)} \quad \underset{(1)}{v^i} = \lambda \underset{(2)}{v^i} \qquad (\lambda > 0)$$

gilt.

2. *Zwei Kurven* $\underset{(1)}{\mathfrak{g}}[\underset{(1)}{f^i}, \underset{(1)}{\varphi^i}]$ *und* $\underset{(2)}{\mathfrak{g}}[\underset{(2)}{f^i}, \underset{(2)}{\varphi^i}]$ *sind dann und nur dann identisch, falls*

$$\text{a)} \quad \underset{(1)}{f^i}(t) \equiv \underset{(2)}{f^i}(t)$$

$$\text{b)} \quad \underset{(1)}{\varphi^{i'}}(t) \equiv \lambda(t) \underset{(2)}{\varphi^{i'}}(t), \qquad (\lambda > 0)$$

gilt.

Definition I. Der Zahlen-n-tupel x^i eines Linienelementes $\mathfrak{v}(x, v)$ wird das *Zentrum*, der Zahlen-n-tupel v^i hingegen die *Richtung* des Linienelementes genannt.

Satz 1. *Die durch* I. A *und* II. A *bestimmte Zuordnung ist von dem zugrundegelegten Parameter t unabhängig.*

Beweis. Wir betrachten eine zulässige Parametertransformation $t = t(\tau)$.[4]) Dann geht die Kurve $\mathfrak{g}[f^i(t), \varphi^i(t)]$ in die Kurve

$$\mathfrak{g}[\bar{f}^i(\tau), \bar{\varphi}^i(\tau)]$$

über, wobei

$$\bar{f}^i(\tau) = f^i(t(\tau)), \quad \bar{\varphi}^i(\tau) = \varphi^i(t(\tau))$$

gilt. Die somit erhaltene Kurve ist aber wegen II. A mit der Kurve $\mathfrak{g}[f^i(t), \varphi^i(t)]$ identisch, q. e. d.

[3]) Nach erfolgter Zuordnung wird das Linienelement durch $\mathfrak{v}(x^i, v^i)$, die Kurve hingegen durch $\mathfrak{g}[f^i(t), \varphi^i(t)]$ bezeichnet.

[4]) Als zulässig betrachten wir die üblicherweise so bezeichnete und dabei noch streng monoton wachsende Parametertransformationen.

III. A: *Ein Linienelement* $\mathfrak{v}(x, v)$ *gehört zu einer Kurve* $\mathfrak{g}[f^i(t), \varphi^i(t)]$, *falls es einen Parameterwert* $\alpha < t_0 < \beta$ *gibt, derart, daß die Bedingungen*

$$\text{a)} \quad x^i = f^i(t_0)$$

$$\text{b)} \quad v^i = \lambda f^{i'}(t_0) \qquad (\lambda > 0)$$

erfüllt sind.

Definition II. Die durch die Bedingungen I. A, II. A, III. A begründete Zuordnung wird das *lokale Koordinatensystem* des Raumes genannt.

Definition III. Eine auf Grund von I. A im betrachteten Raum eingeführte neue Zuordnung, welche durch eine umkehrbar eindeutige, mindestens zweimal stetig differenzierbare und daher mit einer nichtverschwindenden Funktionaldeterminante versehene funktionale Relation ausgedrückt wird, nennen wir eine *zulässige Koordinatentransformation*.

IV. A: *Bei einer zulässigen Koordinatentransformation bleiben die Zugehörigkeitsrelationen* III. A *bestehen.*

Satz 2. *Die zulässigen Koordinatentransformationen der Linienelemente und der Kurven folgen aus den zulässigen Transformationen der Zentren der Linienelemente.*

Es sei nämlich

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x), \quad \bar{v}^i = \bar{v}^i(v)$$

$$\bar{f}^i(t) = \bar{f}^i[f^1(t), \dots f^n(t)]$$

eine zulässige Koordinatentransformation. (In den Transformationsformeln der Funktionen f^i sind natürlich die Transformationsformeln sämtlicher zur Klasse A gehöriger Funktionen inbegriffen.)

Es bezeichne $\mathfrak{g}[f^i(t), \varphi^i(t)]$ eine Kurve, zu der die stetige Linienelementenfolge $\mathfrak{v}[x^i(t), v^i(t)]$ gehört ist. Kraft I. A gibt es tatsächlich eine solche Linienelementenfolge

$$x^i(t) = f^i(t), \quad v^i(t) = \lambda(t)\varphi^{i'}(t) \qquad (\lambda > 0).$$

Wegen IV. A muß also die Linienelementenfolge $\mathfrak{v}[\bar{x}^i(t), \bar{v}^i(t)]$ der Kurve $\mathfrak{g}[\bar{f}^i(t), \bar{\varphi}^i(t)]$ zugehören. Aus III. A folgt also, daß

$$\bar{f}^i[f^1(t), \dots f^n(t)] \equiv \bar{x}^i[x^1(t), \dots x^n(t)]$$

für jedes t gilt. Somit sind die Transformationsformeln der zur Klasse A gehörigen Funktionen mit den Transformationsformeln der Zentren der Linienelemente identisch.

Betrachten wir nun die Kurve $\mathfrak{g}[f^i(t), \varphi^i(t)]$ für $t = t_0$, und es sei

$$f^i(t_0) = x^i(t_0) = \varphi^i(t_0) + c^i. \qquad (c^i = \text{const})$$

Da wegen II. A

$$\mathfrak{g}[f^i(t),\ \varphi^i(t)+c^i] \equiv \mathfrak{g}[f^i(t),\ \varphi^i(t)]$$

gilt, haben wir

$$\left.\frac{d\overline{\varphi}^i[\varphi^1(t)+c^1, \ldots \varphi^n(t)+c^n]}{dt}\right|_{t=t_0} =$$

$$= \frac{\partial \overline{\varphi}^i}{\partial \varphi^k} \varphi^{k'} \Big|_{t=t_0} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} v^k \Big|_{t=t_0}.$$

Aus II. A und IV. A folgt nunmehr

$$\bar{v}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} v^k.$$

Es sei jetzt $\mathfrak{v}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{v})$ ein beliebiges Linienelement. Wir betrachten die folgende Kurve:

$$\mathfrak{g}[\{f^i(t) - f^i(t_0) + \underset{(0)}{x^i}\}, \{\varphi^i(t) - \varphi^{i'}(t_0)t + t\underset{(0)}{v^i}\}].$$

Das Linienelement $\mathfrak{g}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{v})$ ist dieser Kurve an der Stelle $t = t_0$ offenbar zugehörig, so daß nach dem vorher gesagten

$$\bar{v}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} v^k$$

gilt, womit wir den Beweis unseres Satzes vollkommen erbracht haben.

§ 2. Die Metrik.

Satz 3. $\mathfrak{g}[f^i(t), f^i(t)]$ *ist eine Kurve.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus I. A.

Definition IV. Die Kurven $\mathfrak{g}[f^i(t), f^i(t)]$ werden *Kurven vom Typ a)*, die Kurven $\mathfrak{g}[f^i(t), \varphi^i(t)](f^i \not\equiv \varphi^i)$ *Kurven vom Typ b)* genannt.

Betrachten wir eine Kurvenmannigfaltigkeit von $2n-2$ Dimensionen, bestehend aus Kurven vom Typ a), welche die Extremalmannigfaltigkeit eines positiv-definiten regulären Variationsproblems darstellt:[5])

$$\mathfrak{g}[x^2(t, a^1, \ldots a^{2n-2}),\ x^i(t, a^1, \ldots a^{2n-2})].$$

Die Existenz einer solchen Mannigfaltigkeit ist offenbar gesichert, z. B. können alle die x^i linear in t sein.

[5]) Funktionen werden wir von nun an im allgemeinen durch die Buchstaben $f^i = {}_0x^i$ bzw. $\varphi^i = v^i$ bezeichnen; die Derivation nach t wird durch einen Punkt, die Derivation nach s durch ein Komma angedeutet.

Es sei $F(x, v)$ eine Grundfunktion des erwähnten Variationsproblem die in den v^i pozitiv homgen erster Ordnung ist. Wir nehmen an, daß $F(x, v)$ nach jeder der Veränderlichen mindestens dreimal stetig differenzierbar ist.

In die gegebene Kurvenschar führen wir den durch die Gleichung

$$s = \int_{t_0}^{t} F(x(t), \dot{x}(t))\, dt$$

definierten Wert s als neuen Parameter ein. Dann läßt sich das Gleichungssystem[6])

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} x^i &= x^i(s, a^1, \dots a^{2n-2}) \\ x^{i'} &= x^{i'}(s, a^1, \dots a^{2n-2}) \\ x^{i''} &= x^{i''}(s, a^1, \dots a^{2n-2}) \end{aligned}$$

auf eine und nur eine Weise nach $s, a^1, \dots a^{2n-2}$ auflösen, und zwar auf folgende Weise: (S. z. B. J. DOUGLAS [2])

$$(2.\,1) \qquad x^{i''} = -2G^i(x, x') \qquad F(x, x') = 1,$$

wobei die Funktion $G^i(x, v)$ in v^i positiv homogen zweiter Ordnung ist.

Wir setzen:

$$\frac{\partial \frac{1}{2} F^2(x, v)}{\partial v^i \partial v^k} \overset{\text{def}}{=} g_{ik}(x, v).$$

Satz 4.

$$(2.\,2) \qquad g_{rh} G^r = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \frac{1}{2} F^2}{\partial v^h \partial x^k} v^k - \frac{\partial \frac{1}{2} F^2}{\partial x^h} \right] \overset{\text{def}}{=} G_h.$$

BEWEIS. Das zur Grundfunktion $F(x, x')$ gehöriges Euler-Lagrangesches Differentialgleichungssystem ist nämlich (s. z. B. DUSCHEK—MAYER, [3] II. S. 91)

$$(2.\,3) \qquad x^{r''} g_{rh}(x, x') = -2G_h(x, x')$$

und aus (2. 1) und (2. 3), sowie aus der Eindeutigkeit der Lösung des Systems (B) folgt unsere Behauptung.

DEFINITION V_1. Die Kurven des Systems (B) nennen wir die *Geodätischen* des Raumes.

V_1 A: *Die Bogenlänge des durch die Parameterwerte t_1 und t_2 bestimmten Teiles einer Kurve $\mathfrak{g}[x^i(t), x^i(t)]$ vom Typ* a) *sei*

$$s = \int_{t_1}^{t_2} F(x, \dot{x})\, dt.$$

[6]) Die transformierten Funktionen werden durch dieselben Buchstaben bezeichnet!

Satz 5. *Man kann eine Funktion $v^i = v^i(x)$ bestimmen, derart, daß die zu einem beliebigen Anfangswert gehörige Lösung des Differentialgleichungssystems*

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\ \frac{d^2x^i}{ds^2} = -\Gamma^{*i}_{jk}(x, v)\, x^{j'} x^{k'} \\ &\text{b)}\ \frac{dv^i}{ds} = -G^i_k(x, v) x^{k'} + \frac{1}{F(x,v)} \frac{dF}{ds} v^i \end{aligned}$$

eine Extremale der Grundfunktion

$$\Omega(x, v(x), \dot{x}) = [g_{ik}(x, v(x))\, \dot{x}^i \dot{x}^k]^{1/2}$$

ist. In (2. 4) *ist*

$$\Gamma^{*k}_{ij}(x, v) g_{kh} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ih}}{\partial v^r} \frac{\partial G^r}{\partial v^j} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{jh}}{\partial v^r} \frac{\partial G^r}{\partial v^i} \right) - \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^r} \frac{\partial G^r}{\partial v^h} \right) \right\}$$

und

$$G^i_k(x, v) = \frac{\partial G^i(x, v)}{\partial v^k}.$$

BEWEIS. Es sei die den Anfangswerten $(\overset{(0)}{x^i}, \overset{(0)}{v^i}, \overset{(0)}{\dot{x}^i})$ entsprechende Lösung von (2. 4)

$$(\mathrm{C})\qquad \begin{aligned} x^i &= x^i(s) \\ v^i &= v^i(s). \end{aligned}$$

O. VARGA hat gezeigt, (O. VARGA [6].) daß man eine Funktion $v^i = v^i(x)$ konstruieren kann, für welche (C) entlang außer (2. 4) auch noch

$$(2.5)\qquad \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = -G^i_j + \frac{1}{F} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x^j} v^i$$

erfüllt ist.

Indem wir das Euler-Lagrangesches Differentialgleichungssystem von $\Omega(x, v, \dot{x})$ bilden, erhalten wir unter Berücksichtigung von (2. 5) und (2. 4)

$$(2.6)\qquad \frac{d^2x^i}{ds^2} g_{ik} + \Gamma^{*i}_{jr} g_{ik} x^{j'} x^{r'} = 0.$$

Ist

$$(2.7)\qquad \det |g_{ik}| = g \neq 0,$$

dann bedeutet (2. 6), daß die Kurve (C) eine Extremale des zur Funktion $\Omega(x, v, \dot{x})$ gehörigen Variationsproblems ist.

Wir beweisen (2. 7) in der folgenden schärferen Form:

Satz 6. *Die Funktionen $g_{ik}(x, v)$ sind die Koeffizienten einer positiv definiten quadratischen Form.*

Beweis. Wegen

$$g_{ik}(x, v) v^i = F \frac{\partial F}{\partial v^k}$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial v^k} \neq 0,$$

muss auch (2. 7) gelten. Führen wir jetzt

$$s = \int_{t_0}^{t} F(x, \dot{x}) dt$$

als neuen Parameter für die Geodätischen ein, so gilt längst derselben

$$F(x, x') = 1 \tag{2. 8}$$

d. h. das reguläre Variationsproblem von $F(x, x')$ und dasjenige von $F^2(x, x')$ sind identisch. Für die Funktion F^2 bedeutet dies, daß der Ausdruck

$$g_{ik} X^i X^k$$

in den Hilfsvariablen X^i definit ist. Wegen

$$g_{ik}(x, v) v^i v^k = F(x, v) > 0,$$

ist nun dieser Ausdruck positiv definit, q. e. d.

Definition V_2. Die aus den Lösungen des Differentialgleichungssystems (2. 4) gebildeten Kurven $\mathfrak{g}[x^i(t), v^i(t)]$ vom Typ b) nennen wir *Quasigeodätischen.*[7])

In vollkommener Analogie zur Forderung V_1. A können wir auch fordern:

V_2. A: *Für eine beliebige Kurve $\mathfrak{g}[x^i(t), v^i(t)]$ vom Typ b) sei die Bogenlänge zwischen den Parameterwerten t_1 und t_2 durch*

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ik}(x, v) \dot{x}^i \dot{x}^k} \, dt$$

gegeben.

Satz 6_1. *Ist die Grundfunktion $F^2(x, v)$ quadratisch in v^i, so ist die in V_1 und V_2 bestimmte Bogenlänge s von den zur Kurve gehörigen Linienelementen unabhängig.*

---

7) Die quasigeodätischen Kurven sind von O. Varga eingeführt worden. S. z. B. O. Varga [5].

Es sei nämlich

$$F^2(x, v) = g_{ik}(x)\, v^i v^k,$$

dann gilt

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{2} F^2}{\partial v^i \partial v^k} = g_{ik}(x)$$

und folgt aus V_2. A die Behauptung des Satzes.

VI. A: *Unter der „Entfernung" zweier Linienelemente $\underset{(1)}{\mathfrak{v}}$ und $\underset{(2)}{\mathfrak{v}}$ verstehen wir die untere Grenze der Bogenlängen der zu ihnen gehörigen Kurven. Die Bogenlänge soll zwischen den, den Linienelementen $\underset{(1)}{\mathfrak{v}}$ und $\underset{(2)}{\mathfrak{v}}$ entsprechenden Parameterwerten genommen werden.*

Der durch die Bedingung VI. A festgelegte Entfernungsbegriff genügt offenbar den drei Entfernungsaxiomen. $\left(d(\underset{(1)}{\mathfrak{v}}, \underset{(1)}{\mathfrak{v}}) = 0,\ d(\underset{(1)}{\mathfrak{v}}\,\underset{(2)}{\mathfrak{v}}) > 0,\right.$ für $\underset{(1)}{\mathfrak{v}} \neq \underset{(2)}{\mathfrak{v}}$, $\left. d(\underset{(1)}{\mathfrak{v}}\,\underset{(2)}{\mathfrak{v}}) + d(\underset{(2)}{\mathfrak{v}}, \underset{(3)}{\mathfrak{v}}) \geqq d(\underset{(1)}{\mathfrak{v}}\,\underset{(3)}{\mathfrak{v}})\right)$.

§ 3. Der tangentiale Vektorraum.

Jedem Linienelement des durch die Bedingungen I. A — VI. A charakterisierten lokalen metrischen Raumes können wir gewisse Vektorräume zuordnen.

Definition VI. Die an der durch den Parameterwert t bestimmter Stelle einer Kurve $\mathfrak{g}[x^i(t), v^i(t)]$ betrachtete, durch die Derivierten $\dot{x}^i(t)$ bestimmte Größe nennen wir den *Tangentenvektor* der Kurve. Der Tangentenvektor wird durch $\vec{x}\,[\mathfrak{g}(t), \dot{x}^i(t)]$ bezeichnet.

Es sei ein Linienelement $\underset{(0)}{\mathfrak{v}}\,[\underset{(0)}{x^i}, \underset{(0)}{v^i}]$ gegeben. Wir betrachten die Gesamtheit der zu $\underset{(0)}{\mathfrak{v}}$ gehörigen Kurven, unter Zugrundelegung derselben Parameterdarstellung. $\underset{(0)}{\mathfrak{v}}$ soll für den Parameterwert t_0 zu diesen Kurven gehören.

Definition VII. Sind $\underset{(1)}{\vec{x}} = \vec{x}\,[\underset{(1)}{\mathfrak{g}}(t_0)\underset{(1)}{\dot{x}^i}(t_0)]$ und $\underset{(2)}{\vec{x}} = \vec{x}\,[\underset{(2)}{\mathfrak{g}}(t_0)\,\underset{(2)}{\dot{x}^i}(t_0)]$ zwei beliebige Tangentenvektoren, dann sei

I. $\underset{(1)}{\vec{x}} = \underset{(2)}{\vec{x}}$

falls

1. $\underset{(1)}{x^i}(t_0) = \underset{(2)}{x^i}(t_0)$ 2. $\underset{(1)}{v^i}(t_0) = \underset{(2)}{v^i}(t_0)$ 3. $\underset{(1)}{\dot{x}^i}(t_0) = \underset{(2)}{\dot{x}^i}(t_0)$

und ferner

II. $\underset{(1)}{\vec{x}}+\underset{(2)}{\vec{x}}=\vec{x}[\bar{\mathfrak{g}}(t_0),\ \underset{(1)}{\dot{x}^i}(t_0)+\underset{(2)}{\dot{x}^i}(t_0)]$

III. $\lambda\underset{(1)}{\vec{x}}=\vec{x}[\hat{\mathfrak{g}}(t_0),\ \lambda\underset{(1)}{\dot{x}^i}(t_0)]$,

wobei λ eine beliebige Zahl bedeutet. Ist $\underset{(1)}{\dot{x}^i}(t_0)+\underset{(2)}{\dot{x}}(t_0)=0$, oder $\lambda=0$, dann sind die erhaltenen Vektoren Nullvektoren.

Satz 7. *Die in dem Punkt t_0 genommenen Tangentenvektoren der zum Linienelement $\underset{(0)}{\mathfrak{v}}$ gehörigen Kurven bilden, unter Hinzunahme des Nullvektors, einen n-dimensionalen Vektorraum, welchen wir durch $\mathfrak{M}(\underset{(0)}{\mathfrak{v}})$ bezeichnen.*

Beweis. Auf Grund der Definition VII genügt es zu zeigen, daß die zu $\underset{(0)}{\mathfrak{v}}$ gehörige Kurvenschar je eine Kurve enthält, deren Tangentenvektor II bzw. III ist.[8]) Man sieht sofort, daß

$$\bar{\mathfrak{g}}[\underset{(1)}{x^i}(t)+\underset{(2)}{x_i}(t)-\underset{(2)}{x^i}(t_0),\ v^i(t)]$$

bzw.

$$\hat{\mathfrak{g}}[\lambda x^i(t)-(\lambda-1)x^i(t_0),\ v^i(t)]$$

die gesuchten Kurven sind, so daß $\mathfrak{M}(\underset{(0)}{\mathfrak{v}})$ tatsächlich einen Vektorraum darstellt.

Wir betrachten die Kurven

$$\underset{(k)}{\mathfrak{g}}[\underset{(k)}{x^i}(t),\ v^i(t)],$$

wobei

$$\underset{(k)}{x^i}(t)=\begin{cases}\underset{(0)}{x^i} & i\neq k\\ t+\underset{(0)}{x^i}-t_0 & i=k\end{cases}$$

ist. Die sich ergebenden n Vektoren

$$\underset{k}{\vec{e}}=\underset{k}{\vec{e}}[\underset{(k)}{\mathfrak{g}},\ (\underset{(1)}{0},\ldots\underset{(k)}{1},\ldots\underset{(n)}{0})]$$

sind offenbar linear unabhängig.

Es sei $\vec{x}=\vec{x}[\mathfrak{g}[x^i(t_0),\ v^i(t_0)],\ \dot{x}^i(t_0)]\in\mathfrak{M}(\underset{(0)}{\mathfrak{v}})$ ein beliebiger Vektor, dann ist

$$\vec{x}=\underset{(k)}{\vec{e}}\,\dot{x}^k(t_0).$$

Damit haben wir den Beweis unseres Satzes vollendet.

[8]) Handelt es sich hier um Nullvektoren, so ist die Behauptung trivial.

Die soeben eingeführten Vektorräume nennen wir kontravariante Vektorräume. Die einzelnen Vektoren bezeichnen wir, auf die übliche Weise, kurzerhand durch ihre Komponenten $\xi^i(x, v)$.

Aus der Bedingung II. A und aus dem Satz 7 folgt, daß ein Vektor $\xi^i(x, v)$ in v^i homogen nullter Ordnung ist.

Auf Grund des Satzes 2 gilt für kontravariante Vektoren das Transformationsgesetz:

$$\bar{\xi}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \xi^k. \tag{3.1}$$

Satz 8. *Gilt für n in* $\underset{(0)}{\mathfrak{v}}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{v})$ *definierten Grössen das Transformationsgesetz* (3. 1), *so stellen diese einen kontravarianten Vektor dar.*

Betrachten wir die Kurve

$$\mathfrak{g}[\xi^i \cdot t - \xi^i t_0 + \underset{(0)}{x^i}, \underset{(0)}{v^i}(t)]$$

so leuchtet unsere Behauptung sofort ein.

Zum Linienelement $\underset{(0)}{\mathfrak{v}}$ kann der kovariante Vektorraum auf die übliche Weise $(g_{ik}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{v})\xi^i(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{v}))$ eingeführt werden.

VII. A: *Führen wir in der Gleichung einer Kurve* $\mathfrak{g}$ *die Bogenlänge als Parameter ein, dann sei die Länge des Tangentenvektors gleich* 1.

Die Forderungen $V_1 \cdot A$, $V_2 \cdot A$ und VII. A. geben Anlaß zur

Definition VIII. Die *Länge eines Vektors* $\xi^i(x, v)$ ist

$$\lambda = \begin{cases} F(x, \xi) & \text{für} \quad \nu\xi^i = v^i \qquad (\nu > 0) \\ [g_{ik}(x, v)\xi^i\xi^k]^{1/2} & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Im ersten Falle sagen wir, daß die Richtung des Vektors mit derjenigen seines Linienelementes übereinstimmt.

Betrachten wir nunmehr eine beliebige Kurve $\mathfrak{g}[x^i(t), v^i(t)]$ und führen wir die Bogenlänge als Parameter ein.

Es gelte auf Grund von (2. 4) der Kurve $\mathfrak{g}$ entlang

$$F\omega^i = \frac{dv^i}{ds} + G^i_k(x, v)x^{k'} - \frac{1}{F}\frac{dF}{ds}v^i. \tag{3.2}$$

Wie man leicht einsieht, ist ω^i ein Vektor.

Ist die Kurve $\mathfrak{g}$ vom Typ a), dann gilt, wie man leicht nachrechnet

$$g_{ik}(x, x')\omega^i x^{k'} = 0. \tag{3.3}$$

Ist die Kurve $\mathfrak{g}$ vom Typ b) dann gilt hingegen

$$g_{ik}(x, v)x^{i'}x^{k'} = 1. \tag{3.4}$$

Indem wir die Indentität (3.4) nach s derivieren und die Formeln des Satzes 5 berücksichtigen, erhalten wir

$$\begin{aligned} g_{ik}(x, v)x^{i''}x^{k'} + g_{ik}(x, v)\Gamma^{*i}_{js}(x, v)x^{j'}x^{s'}x^{k'} + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}(x, v)}{\partial v^s}\omega^s x^{i'}x^{k'} = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dies bedeutet, daß das „skalare" Produkt des Tangentenvektors und der Vektoren

$$\Omega^i = x^{i''} + \Gamma^{*i}_{jk}x^{j'}x^{k'} + A^i_{jk}(x, v)\omega^j x^{k'} \tag{3.6}$$

verschwindet.[9])

In (3.6) ist

$$A^i_{jk} = F\,\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kj}}{\partial v^s}g^{si}$$

$$g^{si}g_{ji} = \delta^s_j,$$

δ^s_j bedeutet das Kroneckersche Symbol.

Definition IX. Der Vektor ω^i wird der *erste Normalvektor der Kurven vom Typ* a), der Vektor Ω^i der erste Normalvektor der Kurven vom Typ b) genannt.

Auf Grund der Definition VIII. und von (3.4) sowie (3.5) formulieren wir die

Definition X. Der *Cosinus* des Winkels zwischen zwei Vektoren $\xi^i(x, v)$, $\eta^i(x, v)$ sei

$$\cos(\xi\eta\sphericalangle) = \frac{g_{ik}\xi^i\eta^k}{\sqrt{\xi_r\xi^r}\sqrt{\eta_s\eta^s}}.$$

Nunmehr können wir zwischen den, der Kurve entlang definierten, Vektorräumen einen Zusammenhang herstellen.

Definition XI_1. Gilt für eine, zu einer Kurve $\mathfrak{g}$ gehörige Linienelementenfolge (2.4)b., dann sprechen wir von einer *parallelen Linienelementenfolge.*

Definition XI_2. Gilt in (3.6) der Kurve entlang $\Omega^i \equiv 0$, dann werden die Tangentenvektoren parallel genannt.

[9]) Man kann durch eine einfache Rechnung beweisen, daß Ω^i ein Vektor ist.

DEFINITION XI_3. Falls die Vektoren ξ^i einer Kurve entlang das folgende, aus (3.6) abgeleitete Differentialgleichungssystem befriedigen

$$\frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma^{*i}_{jk}\xi^j x^{k'} + A^i_{jk}\omega^j x^{k'} = 0$$

dann werden die Vektoren ξ^i längst der Kurve parallel genannt.

Literatur.

[1] E. CARTAN, Les espaces de Finsler, *Act. Sci. Industrielles* **79**, Paris, 1934.

[2] J. DOUGLAS, The general theory of paths, *Ann. of Math.* **29** (1928), 143—168.

[3] A. DUSCHEK—W. MAYER, Lehrbuch der Differentialgeometrie, *Leipzig und Berlin*, 1930.

[4] P. FINSLER, Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, (Dissertation) *Göttingen*, 1918.

[5] O. VARGA, Normalkoordinaten in allgemeinen differentialgeometrischen Räumen und ihre Verwendung zur Bestimmung sämtlicher Differentialinvarianten, *Comptes Rendus du Premier Congrès des Mathématiciens Hongrois*, Budapest, 1952, 131—146.

[6] O. VARGA, Über das Krümmungsmaß in Finslerschen Räumen, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949), 116—122.

(Eingegangen am 30. April 1959.)