Über die Begründung der Kongruenztatsachen der ebenen Geometrie.

Herrn Professor Otto Varga zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von J. STROMMER (Budapest).

Einleitung.

J. MOLLERUP hat ein System von Kongruenzaxiomen angegeben,[1]) in dem der einzige Grundbegriff die Streckenkongruenz ist.[2]) Die Axiome dieses Systems sind erstens die drei Hilbertschen Axiome III 1, 2, 3;[3]) hierauf stellen wir folgende Definition auf:

Die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ sind einander *kongruent*, in Zeichen:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1,$$

wenn sämtliche Kongruenzen

$$AB \equiv A_1B_1, \quad AC \equiv A_1C_1, \quad BC \equiv B_1C_1$$

erfüllt sind.

Die drei Hilbertschen Axiome III 4, 5, 6 werden nun durch die folgenden zwei ersetzt:

4. Es sei ein Dreieck ABC und eine Strecke $A_1C_1 \equiv AC$ gegeben; dann gibt es *zwei und nur zwei* Punkte B_1 und B_1', so daß

$$\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle ABC \quad \text{und} \quad \triangle A_1B_1'C_1 \equiv \triangle ABC.$$

5. (Veroneses Axiom.) Es sei $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$; man trägt die paarweise kongruenten Strecken AD und A_1D_1 auf AB und A_1B_1 (oder A_1C_1)

---

1) Studier over den plane geometris aksiomer, *Köbenhavn*, 1903, sowie: Die Beweise der ebenen Geometrie ohne Benutzung der Gleichheit und Ungleichheit der Winkel, *Math. Ann.* **58** (1903), 479—496.

2) Mit kleinen Abänderungen wurde dasselbe Axiomensystem von B. KERÉKJÁRTÓ in seinem Werke: Les fondements de la géométrie, *Budapest*, 1955, zu Grunde gelegt. Vgl. S. 90 und S. 101.

3) HILBERT, Grundlagen der Geometrie 2. (Aufl.), *Leipzig*, 1903, S. 7—8. — *Alle Angaben des folgenden beziehen sich auf diese* (von MOLLERUP benützte) *Auflage.*

und AE und A_1E_1 auf AC und A_1C_1 (oder A_1B_1) ab; dann ist immer

$$DE \equiv D_1E_1.$$ [4]

J. Mollerup hat gezeigt, daß sich die Kongruenzsätze der ebenen Geometrie auf Grund der ebenen Axiome der Verknüpfung und Anordnung, d. h. der Axiome I 1—3 und II, aus den obigen fünf Kongruenzaxiomen beweisen lassen.

In dieser Arbeit soll nun gezeigt werden, daß *zu dem Aufbau der ebenen Geometrie das obige vierte Axiom überflüssig ist,* da sämtliche Kongruenztatsachen der ebenen Geometrie sich auch aus den Axiomen I 1—3, II, III 1—3 und aus dem obigen fünften Axiom allein herleiten lassen.[4a]

§ 1. Einführung der Winkelkongruenz und Begründung der Größenvergleichung der Winkel.

Wir setzen voraus, dass alle Punkte, die in den nachfolgenden Untersuchungen auftreten, in ein und derselben Ebene liegen, und legen den Untersuchungen neben den Axiomen I 1—3, II, III 1—3 und dem obigen Axiom 5 die bekannten linearen Tatsachen der Kongruenz zu Grunde, die aus den Axiomen III 1, 2, 3 unter Heranziehung der Axiome I 1—3 und II folgen.

Die Kongruenz der Winkel wird in folgender Weise eingeführt:

Erklärung. Wir sagen: der Winkel ABC ist mit dem Winkel $A'B'C'$ *kongruent* oder *gleich,* in Zeichen:

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C',$$

wenn es auf den Schenkeln BA, $B'A'$, BC, $B'C'$ Punkte D, D', E, E', derart gibt, daß die Kongruenzen

$$BD \equiv B'D', \quad BE \equiv B'E' \quad DE \equiv D'E'$$

erfüllt sind.[5]

---

[4]) Diese Tatsache ist zuerst von G. Veronese in seinem Werke: Grundzüge der Geometrie (deutsch von A. Schepp), *Leipzig,* 1894, als Axiom hingestellt. Vgl. Ax. V auf S. 260.

[4a]) (Zusatz bei der Korrektur:) Herr P. Szász machte mich kürzlich in liebenswürdiger Weise aufmerksam, daß die obige Reduktion schon in den Arbeiten von I. L. Dorroh *(Ann. of Math.* (2) **29** (1927/28), 229—231) und H. G. Forder (*J. London Math. Soc.* **22** (1947), 268—275) durchgeführt wurde. Meine Arbeit unterscheidet sich aber wesentlich von diesen, bei welchen der Kern des Beweises in dem Nachweis der Existenz des Streckenmittelpunktes besteht.

[5]) Die oben gegebene Erklärung der Gleichheit von Winkeln entspricht dem Verfahren, mit dem in der Praxis und auch in den geometrischen Konstruktionen die Gleichheit der Winkel auf Grund der von Strecken festgesetzt wird.

Auf Grund der Reflexivität, der Symmetrie und der Transitivität der Streckenkongruenz folgt aus der obigen Erklärung die *Reflexivität*, die *Symmetrie* und die *Transivität* der Winkelkongruenz, d. h. die Gültigkeit der Sätze:

Für einen beliebigen Winkel (h, k) ist stets

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h, k) \quad \text{und} \quad \sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(k, h);$$

wenn

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k'),$$

so ist auch

$$\sphericalangle(h', k') \equiv \sphericalangle(h, k);$$

wenn

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k') \quad \text{und} \quad \sphericalangle(h', k') \equiv \sphericalangle(h'', k'')$$

ist, so ist auch

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h'', k'').$$

Auf ähnliche Art folgt aus dieser Erklärung das Axiom III 5. Dieses Axiom lautet wie folgt:

Wenn ein Winkel (h, k) sowohl dem Winkel (h', k') als auch dem Winkel (h'', k'') kongruent ist, so ist auch der Winkel (h', k') dem Winkel (h'', k'') kongruent, d. h. wenn

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k') \quad \text{und} \quad \sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h'', k'')$$

ist, so ist auch stets

$$\sphericalangle(h', k') \equiv \sphericalangle(h'', k'').$$

Daraus ergibt sich weiter, daß die Formeln

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k'), \quad \sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(k', h'),$$
$$\sphericalangle(k, h) \equiv \sphericalangle(h', k'), \quad \sphericalangle(k, h) \equiv \sphericalangle(k', h')$$

gleichbedeutend sind.

Durch Anwendung des 5. Axioms beweisen wir ferner leicht die folgende wichtige Tatsache (HILBERTS Satz 12):

Wenn zwei Winkel einander kongruent sind, so sind auch ihre Nebenwinkel einander kongruent.

Eine unmittelbare Folgerung aus dem obigen Satz ist der Satz von der Kongruenz der Scheitelwinkel.

Auf ähnliche Weise gelangen wir zu folgender Tatsache (HILBERTS Satz 14):

Es seien einerseits h, k, l und andererseits h', k', l' je drei von einem Punkte ausgehende Halbstrahlen *derart, daß irgend zwei von den Halbstrahlen h, k, l einerseits, und h', k', l' andererseits nicht derselben Geraden angehören:*

wenn dann die Kongruenzen

$$\sphericalangle(h, l) \equiv \sphericalangle(h', l') \quad \text{und} \quad \sphericalangle(k, l) \equiv \sphericalangle(k', l')$$

erfüllt sind, *und wenn l und l' gleichzeitig entweder im Inneren, oder im Äßerem des Winkels bzw.* $\sphericalangle(h, k)$, $\sphericalangle(h', k')$ *verläuft,* so ist stets auch

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k').$$ [6])

Wir sind nunmehr im Stande, die *Größenvergleichung der Winkel* zu begründen.

Erklärung. Es seien irgend zwei Winkel $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle A'B'C'$ vorgelegt. Wenn es im Inneren des Winkels $A'B'C'$ einen Punkt P' gibt, so daß

$$\sphericalangle A'B'P' \equiv \sphericalangle ABC$$

ist, so sagen wir: der Winkel $A'B'C'$ ist *größer* als der Winkel ABC, oder der Winkel ABC ist *kleiner* als der Winkel $A'B'C'$; in Zeichen:

$$\sphericalangle A'B'C' > \sphericalangle ABC \quad \text{und} \quad \sphericalangle ABC < \sphericalangle A'B'C'.$$

Wir erkennen leicht, daß die Größenvergleichung der Winkel *transitiv* ist, d. h. aus jeder der drei Voraussetzungen

$$1.\ \alpha > \beta, \beta > \gamma; \quad 2.\ \alpha > \beta, \beta \equiv \gamma; \quad 3.\ \alpha \equiv \beta, \beta > \gamma$$

folgt

$$\alpha > \gamma.$$

Aus den obigen Tatsachen der Kongruenz folgt *nicht* unmittelbar, daß für zwei Winkel α und β *mindestens einer* der drei Beziehungen

$$\alpha < \beta, \quad \alpha > \beta, \quad \alpha \equiv \beta$$

besteht oder, daß *höchstens einer* dieser Beziehungen erfüllt ist.

Auf Grund unserer Definition der Kongruenz der Dreiecke folgt weiterhin noch folgender Satz:

Erster Kongruenzsatz für Dreiecke: Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$$

gelten, so bestehen auch die Kongruenzen

$$BC \equiv B'C', \quad \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B', \quad \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'.$$

Dieser Satz enthält als Teil HILBERTS Axiom III 6.

Ebenso leicht gelangen wir zu dem Satze von der Kongruenz der Basiswinkel $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle B$ im gleichschenkeligen Dreiecke ABC.

---

[6]) Die kursiv gedruckten Worte in der Abfassung dieses Satzes *fehlen* bei Hilbert. Es ist ersichtlich, daß *ohne* diese Ergänzung der Satz 14 im Allgemeinen *nicht gilt.*

§ 2. Beweis des Satzes über die Gleichheit der rechten Winkeln.

Wir schicken einige Hilfsätze über Anordnungstatsachen voran, die wir hier nicht beweisen.[7])

Hilfsatz A. Der Punkt A gehört dann und nur dann dem Inneren des Winkels (h, k) an, wenn A nicht auf dem Schenkel h oder k liegt, und wenn sowohl A und k, als auch A und h auf derselben Seite der Geraden liegen, der h bzw. k angehört.

Hilfsatz B. Wenn A, B Punkte auf den Schenkeln h, k des Winkels (h, k), und P ein Punkt innerhalb der Strecke AB ist, so liegt P im Inneren des Winkels (h, k).

Hilfsatz C. Wenn ein Punkt A eines von O ausgehenden Halbstrahles a im Inneren des Winkels der beiden von O ausgehenden Halbstrahlen h und k liegt, so liegen auch alle Punkte von a im Inneren des Winkels (h, k); in diesem Falle sagen wir: der Halbstrahl a liegt im Inneren des Winkels (h, k).

Hilfsatz D. Wenn A, B Punkte auf den Schenkeln h, k des Winkels (h, k) sind, dann hat der Halbstrahl l, der vom Scheitel O des Winkels (h, k) ausgeht und im Inneren dieses Winkels liegt, mit der Strecke AB immer einen Punkt gemein.

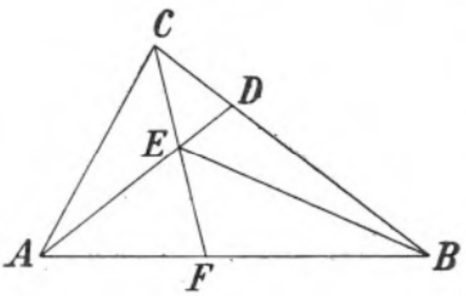

Fig. 1.

Auf Grund der im vorigen Paragraphen gefundenen Tatsachen beweisen wir zuerst folgenden Satz *(Umkehrung des Basiswinkelsatzes):*

Wenn in einem Dreieck ABC die Winkel $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle BAC$ untereinander kongruent sind, so sind auch die Seiten AC und BC einander kongruent.

Beweis. Nehmen wir im Gegenteil an, es wäre etwa AC kleiner als BC, und bestimmen wir auf der Strecke BC den Punkt D, so daß $AC \equiv BD$ wird, so stimmen die beiden Dreiecke ABD und BAC in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel überein; nach dem ersten Kongruenzsatze für Dreiecke sind mithin auch die beiden Seiten BC und AD und die beiden Winkel $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle BAD$ einander kongruent. Wegen der Transitivität der Winkelkongruenz erweisen sich auch die beiden Winkel

[7]) Die Beweise dieser Hilfsätze befinden sich z. B. in A. Rosenthal, Vereinfachungen des Hilbertschen Systems der Kongruenzaxiome, *Math. Ann.* **71** (1912), 257—274.

$\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle BAC$ untereinander kongruent. Bestimmen wir dann auf der Strecke AD den Punkt E, so daß $BD \equiv AE$ wird, so ist auch $AC \equiv AE$ und, da überdies die Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle BAD$ kongruent sind, so folgt wiederum aus dem ersten Kongruenzsatz für Dreiecke die Kongruenz $BC \equiv BE$. Durch Anwendung der Hilfsätze B, C, D schließen wir nun leicht, daß die Gerade CE mit der Strecke AB einen Punkt F gemein hat, der außerhalb der Strecke CE liegt. Die beiden Strecken CF und EF müssten mithin einander kongruent sein, da in den beiden Dreiecken FAC und FAE die Winkel bei A und die Seiten AC und AE kongruent sind, und die Seite AF beiden Dreiecken gemeinsam ist; dies ist aber nicht möglich, da nach Axiom III 1 eine jede Strecke auf einer gegebenen Seite einer gegebenen Geraden von einem gegebenen Punkte nur auf eine Weise abgetragen werden kann. Damit ist der Beweis für unserem Satz erbracht.

Auf Grund der Transitivität der Winkelkongruenz folgt weiterhin aus HILBERTS Satz 12 der folgende

Hilfsatz I. Es sei der Winkel (h, k) dem Winkel (h', k') kongruent: wenn dann $\sphericalangle(h, k)$ ein rechter Winkel ist, so ist auch stets $\sphericalangle(h', k')$ ein rechter Winkel.

Auf Grund der Umkehrung des Basiswinkelsatzes gelingt nun der Nachweis der folgenden einfachen Tatsache:

Hilfsatz II. Wenn a irgendeine Gerade ist, so gibt es immer eine Gerade b, so daß die beiden Geraden a und b auf einander senkrecht stehen.[8])

BEWEIS. Wählen wir zwei Punkte A, B auf der Geraden a und einen Punkt P äußerhalb dieser Geraden, und bestimmen wir auf den Halbstrahl AP den Punkt C, so dass $AB \equiv AC$ wird, so sind die Winkel $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle BCA$ einander kongruent. Bestimmen wir dann auf den Strecken AB und AC die Punkte B', C' derart, daß die Kongruenz $BB' \equiv CC'$ erfüllt ist, so folgt nach Axiom 5 die Kongruenz der Dreiecke BCB' und BCC', und hieraus die Kongruenz der Winkel $\sphericalangle BCB'$ und $\sphericalangle CBC'$. Auf Grund der Hilfsätze B, C, D schliessen wir leicht, daß die Strecken BC' und CB' einen Punkt D gemein haben. Wegen der Kongruenz der Winkel $\sphericalangle BCB'$ und $\sphericalangle CBC'$ folgt nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes, daß die Strecken BD und CD einander kongruent sind. Durch Anwendung der Hilfsätze B, C, D ergibt sich, daß der Halbstrahl AD mit der Strecke BC einen Punkt

---

[8]) Die Erklärung auf einander senkrechter Geraden geschieht in der üblichen Weise: Zwei Geraden a, b mit einem gemeinsamen Punkt O heißen *aufeinander senkrecht*, wenn es auf den Geraden a, b von O verschiedene Punkte A, B gibt derart, daß der Winkel AOB ein Rechter ist.

E gemein hat. Wegen der Kongruenzen

$$AB \equiv AC \quad \text{und} \quad BD \equiv CD$$

folgt nach Axiom 5, daß auch die Strecke BE der Strecke CE kongruent ist, und mithin sind die Winkel $\sphericalangle AEB$ und $\sphericalangle AEC$ einander kongruent, d. h. $\sphericalangle AEB$, $\sphericalangle AEC$ sind rechte Winkel. Bestimmen wir auf den Halbstrahlen BC und BA die Punkte F, G, so daß die Kongruenzen

$$BA \equiv BF \quad \text{und} \quad BE \equiv BG$$

erfüllt sind, so folgt nach dem ersten Kongruenzsatz für Dreiecke die Kongruenz der Winkel $\sphericalangle AEB$ und $\sphericalangle FGB$, und da der Winkel AEB ein rechter Winkel ist, so lehrt Hilfsatz I, daß auch der Winkel FGB ein rechter Winkel sein muß; hieraus ergibt sich die Behauptung des Hilfsatzes II.

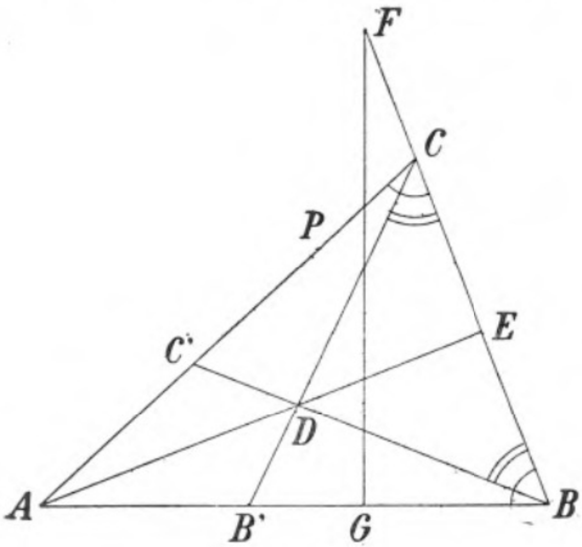

Fig. 2.

Aus dem Beweis des Hilfsatzes II folgt weiter die Existenz der Winkelhalbierenden, d. h. die folgende Tatsache:

Es sei ein Winkel (h, k) vorgelegt; dann gibt es immer einen Halbstrahl l, der vom Scheitel des Winkels (h, k) ausgeht und im Inneren dieses Winkels verlauft, derart, daß die Kongruenz

$$\sphericalangle(h, l) \equiv \sphericalangle(l, k)$$

erfüllt ist.

Aus den Eigenschaften der Grössenvergleichung von Strecken schließen wir weiterhin leicht den folgenden einfachen

Hilfsatz III. Wenn A, B zwei Punkte sind, so gibt es auf der Geraden *AB höchstens einen* Punkt O, so daß die Kongruenz

$$OA \equiv OB$$

erfüllt ist.

Wir sind nunmehr im Stande, den folgenden wichtigen Satz zu beweisen:

Wenn O ein Punkt auf einer Geraden a ist, so gibt es durch den Punkt O eine und nur eine Gerade b, so dass die beiden Geraden a und b auf einander senkrecht stehen.

Beweis. I. *Existenz*. Nach Hilfsatz I gibt es eine Gerade a', so daß die Geraden a und a' aufeinander senkrecht sind; unter der Voraussetzung, daß die

Geraden a und a' einen von O verschiedenen Punkt P miteinander gemein haben, wählen wir auf der Geraden a' äußerhalb der Geraden a einen Punkt A, und bestimmen auf der Geraden a' den Punkt B, so daß P zwischen A und B liegt, und überdies die Kongruenz $AP \equiv BP$ erfüllt ist. Da in den beiden Dreiecken AOP und BOP nach Voraussetzung

$$\sphericalangle APO \equiv \sphericalangle BPO \quad \text{und} \quad AP \equiv BP$$

ist, und die Seite OP beiden Dreiecken gemeinsam ist, so folgt nach dem ersten Kongruenzsatze für Dreiecke die Kongruenz der Winkel $\sphericalangle AOP$ und $\sphericalangle BOP$. Es sei nun $\sphericalangle AOC$ der Nebenwinkel des Winkels AOB; bestimmen wir dann im Inneren des Winkels AOC einen Punkt Q, so dass $\sphericalangle AOQ \equiv \sphericalangle COQ$ wird, so ist OQ die gesuchte Gerade b. In der Tat, aus dem Satze der Kongruenz der Scheitelwinkel folgt auf Grund der Transitivität der Winkelkongruenz, daß der Winkel AOP dem Scheitelwinkel COR des Winkels BOP kongruent sein muß; hieraus ergibt sich nach Satz 14, daß der Winkel POQ dem Winkel ROQ kongruent ist.

II. *Eindeutigkeit.* Es sei $\sphericalangle AOB$ ein rechter Winkel; wir bestimmen auf der Geraden AO, BO die Punkte A', B' derart, daß O einerseits zwischen A und A' und andererseits zwischen B und B' liegt und überdies die Kongruenzen

$$OA \equiv OA' \quad \text{und} \quad OB \equiv OB'$$

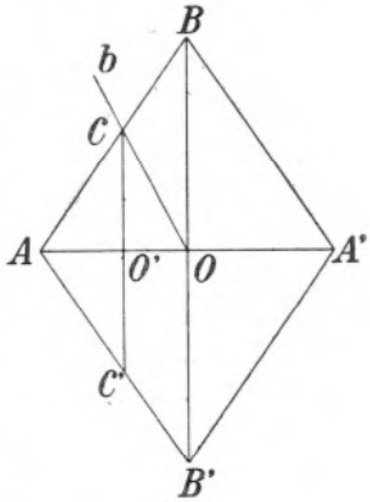

Fig. 3.

erfüllt sind; dann sind die Dreiecke ABA' und $AB'A'$ einander kongruent. Wir nehmen im Gegensatz zu unserer Behauptung an, daß es durch den Punkt O eine von OB verschiedene Gerade b gibt, so daß die beiden Geraden AO und b aufeinender senkrecht sind; dann hat nach Axiom II 4 die Gerade b entweder mit der Strecke AB oder mit $A'B$ einen Punkt C gemein; es treffe etwa die erstere Möglichkeit zu; dann sind nach Voraussetzung in den beiden Dreiecken AOC und $A'OC$ die Winkel bei O und die Seiten OA und OA' einander kongruent und, da überdies die Seite OC beiden Dreiecken gemeinsam ist, so folgt nach dem ersten Kongruenzsatze für Dreiecke die Kongruenz jener Dreiecke, d. h. die Kongruenz $AC \equiv A'C$. Bestimmen wir nun auf der Strecke AB' den Punk C', so daß $AC \equiv AC'$ wird, so ist nach Axiom 5 $A'C \equiv A'C'$, und mithin, wegen der Transitivität der Streckenkongruenz, auch $AC' \equiv A'C'$; hieraus ergibt sich die Kongruenz der Dreiecke

ACC' und $A'CC'$. Nach Hilfsatz D hat der Halbstrahl AO mit der Strecke CC' einen Punkt O' gemein. Da nach Hilfsatz B der Punkt C' im Inneren des Winkels ABO liegt, so liegt auch O' innerhalb dieses Winkels, mithin sind O, O' von einander verschiedene Punkte. Wegen der Kongruenz der Dreiecke ACC' und $A'CC'$ müßten aber nach Axiom 5 die beiden Strecken $O'A$ und $O'A'$ einander kongruent sein; dies ist aber nict möglich, da man nach Hilfssatz III auf der Geraden AA' höchstens einen Punkt O derart finden kann, daß die Kongruenz $OA \equiv OA'$ erfüllt ist. Damit ist der Beweis für unserem Satz vollständig erbracht.

Wir sind nunmehr im Stande HILBERTs Satz 15 zu beweisen. Dieser Satz lautet:

Alle rechten Winkel sind einander kongruent.

Zu dem Zwecke beweisen wir zunächst folgende Tatsache, die ein besonderer Fall des Satzes ist:

Zwei Winkel, von denen je ein Schenkel derselben Geraden angehört und die anderen Schenkel je einer Geraden, die zu dieser Geraden senkrecht stehen, sind miteinander kongruent.

BEWEIS. Wir bezeichnen die Scheitel der Winkel mit A, B und wählen auf den durch A und B gehenden und auf die Gerade AB senkrechten Geraden auf verschiedenen Seiten der Geraden AB resp. die Punkte C und D, so dass $AC \equiv BD$ wird; dann hat die Strecke CD mit der Gerade AB einen Punkt O gemein. Wenn C' und D' Punkte auf der Geraden bzw. AC, BD sind, so daß A zwischen C und C', ferner B zwischen D und D' liegt, und über dies die Kongruenzen

$$AC \equiv AC' \quad \text{und} \quad BD \equiv BD'$$

erfüllt sind, so sind die Dreiecke OAC und OAC', ferner die Dreiecke OBD und OBD' miteinander kongruent, da nach Voraussetzung die Kongruenzen

$$\sphericalangle OAC \equiv \sphericalangle OAC' \quad \text{und} \quad \sphericalangle OBD \equiv \sphericalangle OBD'$$

gelten. Wenn dann D_1 und D_1' Punkte auf dem Halbstrahl bzw. OC, OC' sind derart, daß

$$OD \equiv OD_1 \quad \text{und} \quad OD' \equiv OD_1'$$

wird, so folgt nach Hilberts Satz 14, daß die beiden Dreiecke ODD' und OD_1D_1' einander kongruent sind, da der Winkel AOC seinem Scheitelwinkel BOD kongruent ist, und mithin auch die beiden Winkel $\sphericalangle AOC'$ und $\sphericalangle BOD'$ einander kongruent ausfallen.

Nach Hilfsatz B hat die Strecke D_1D_1' mit dem Halbstrahl OA einen Punkt A' gemein; wenn dann A' mit dem Punkt A zusammenfällt, so folgt nach Hilfsatz I, daß $\sphericalangle OAD_1$ ein rechter Winkel ist, und mithin D_1 auf dem Halbstrahl AC liegt; hieraus ergibt sich unsere Behauptung. Wenn A und A' verschiedene Punkte sind, so liegt entweder D_1 zwischen O und C, oder C zwischen O und D_1; nehmen wir nun an, es treffe etwa die erstere Möglichkeit zu, so liegt auch D_1' zwischen O und C'. Aus den linearen Tat-

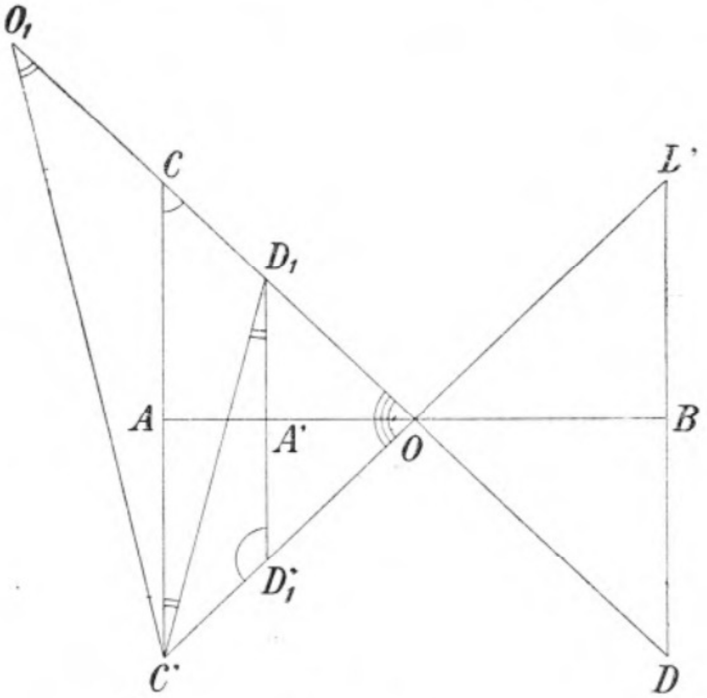

Fig. 4.

sachen der Kongruenz kann nun leicht die Kongruenz $CD_1 \equiv C'D_1'$ geschlossen werden; ferner folgt aus den Kongruenzen

$$AC \equiv AC', \quad AC \equiv BD, \quad BD \equiv BD'$$

nach Axiom III 3 die Kongruenz $CC' \equiv DD'$; nun war aber das Dreieck ODD' mit dem Dreiecke OD_1D_1' kongruent und somit müssen auch die Strecken CC' und D_1D_1' miteinander kongruent sein; hieraus erweisen sich die Dreiecke $CC'D_1$ und $D_1'D_1C'$ untereinander kongruent. Bestimmen wir dann auf der Geraden OC den Punkt O_1, so daß C zwischen D_1 und O_1 liegt, und überdies die Strecken OC' und O_1D_1 einander gleich sind, so ist nach Axiom 5 $OD_1 \equiv C'O_1$, und mithin sind die Dreiecke $C'OD_1$ und D_1O_1C' untereinander kongruent, d. h. es ist auch der Winkel $C'OO_1$ dem Winkel $C'O_1O$ kongruent und somit müßte nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes auch die Strecke OC' der Strecke $C'O_1$ kongruent sein; das ist aber nicht möglich, weil aus den Beziehungen

$$OD_1 < OC, \quad OD_1 \equiv C'O_1, \quad OC \equiv OC'$$

die Beziehung

$$C'O_1 < OC'$$

folgt.

Hiermit ist der Beweis des Satzes 15 für den obigen besonderen Fall erledigt.

Nunmehr kehren wir zu dem allgemeinen Fall zurück. Vorausgesetzt, daß die durch irgendeinen Schenkel des einen rechten Winkels gehende Gerade a mit der durch einen Schenkel des anderen rechten Winkels gehende Gerade b einen Punkt C gemein hat, tragen wir die einander kongruenten Strecken CA und CB auf die Gerade a bzw. b ab, und bestimmen auf der Strecke AB den Punkt D, so dass $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BCD$ wird, dann sind wegen der Kongruenz der Dreiecke ACD und BCD die Kongruenzen

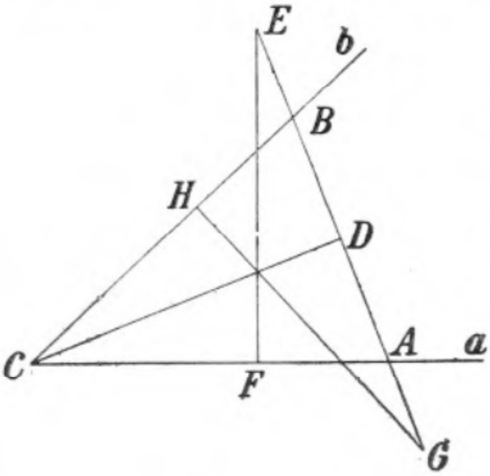

Fig. 5.

$$AD \equiv BD, \quad \sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle BDC,$$
$$\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle CBD$$

erfüllt. Bestimmen wir nun auf den Halbstrahlen AB und AC die Punkte bzw. E, F, so dass die Kongruenzen

$$AC \equiv AE \quad \text{und} \quad AD \equiv AF$$

erfüllt sind, so sind die Dreiecke ACD und AEF einander kongruent, da in den beiden Dreiecken die Winkel bei A und die anliegenden Seiten entsprechend kongruent sind, mithin auch die beiden Winkel $\sphericalangle ADC$ und $\sphericalangle AFE$ einander kongruent sein müssen und, da überdies $\sphericalangle ADC$ ein rechter Winkel ist, folgt nach Hilfsatz I, daß auch $\sphericalangle AFE$ ein rechter Winkel sein muß. Bestimmen wir ferner auf den Halbstrahlen BA und BC die Punkte bzw. G, H, so daß

$$AE \equiv BG \quad \text{und} \quad AF \equiv BH$$

wird, so erweisen sich die Dreiecke AEF und BGH wegen der Kongruenz der Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle ABC$, untereinander kongruent, d. h. es ist die Kongruenz $\sphericalangle AFE \equiv \sphericalangle BHG$ erfüllt und, da $\sphericalangle AFE$ ein rechter Winkel ist, so folgt nach Hilfsatz I, daß auch $\sphericalangle BHG$ ein rechter Winkel sein muß; hieraus ergibt sich leicht mit Hilfe der oben dargelegten Tatsache die Kongruenz der beiden gegebenen rechten Winkel.

Auf ähnliche Art beweisen wir den vorliegenden Satz im Falle, wenn keine durch einen Schenkel des einen gegebenen rechten Winkels gelegte Gerade die Geraden durch die Schenkeln des anderen gegebenen rechten Winkels schneidet,[9]) mittels Betrachtung eines beliebigen rechten Winkels, der einen Schenkel hat, der mit einem der Schenkeln der gegebenen rechten Winkel je einen Punkt gemein hat.

Hiermit ist der Beweis für Hilberts Satz 15 vollständig erbracht.

§ 3. Möglichkeit und Eindeutigkeit der Winkelabtragung.

Aus den Überlegungen der vorigen Paragraphen folgt unmittelbar die *Möglichkeit der Winkelabtragung*.

Es sei nämlich ein Winkel (h, k) und eine Gerade a', sowie eine bestimmte Seite von a' gegeben, und es bedeute h' einen Halbstrahl der Geraden a', der vom Punkte O' ausgeht. Wir bestimmen einen vom Scheitel des Winkels (h, k) ausgehenden Halbstrahl l, der mit k auf derselben Seite der durch h gehenden Geraden liegt, und einen von O' ausgehenden Halbstrahl l' auf der gegebenen Seite der Geraden a' derart, daß $\sphericalangle(h, l)$ und $\sphericalangle(h', l')$ beide rechte Winkel sind. Unter der Voraussetzung, daß $\sphericalangle(h, k)$ ein spitzer Winkel, d. h. kleiner als $\sphericalangle(h, l)$ ist, folgt auf Grund der Gleichheit der rechten Winkel aus der Transitivität der Größenvergleichung der Winkel, daß $\sphericalangle(h, k) < \sphericalangle(h', l')$ ist, und somit gibt es nach Erklärung der Begriffe „größer" und „kleiner" einen von O' ausgehenden und (nach Hilfsatz C) im Inneren des Winkels (h', l') verlaufenden Halbstrahl k', so daß $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k')$ ist;[10]) nach Hilfsatz A

[9]) Aus der elementaren hyperbolischen Geometrie ist folgende Tatsache bekannt: wen der Winkel $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$ ist, so gibt es eine Strecke p, so dass $\Pi(p)$ der Parallelenwinkel der Strecke p ist. Es sei nun g eine Gerade der hyperbolischen Ebene und P ein Punkt auf ihr; es sei ferner O ein Punkt des im Punkte P auf dieser Geraden errichteten Lotes derart, dass für die Strecke $OP = p$ $\Pi(p) = \frac{\pi}{4}$ ist, und ferner sei O' ein Punkt der Geraden OP, so daß P zwischen O und O' liegt und überdies die Strecken OP und OP' einander gleich sind. Wenn dann h und k je ein Halbstrahl der zu g parallelen verschiedenen Geraden durch O sind, die von O ausgehen, sowie h' und k' je ein Halbstrahl solcher Geraden durch O', die von O' ausgehen, so sind $\sphericalangle(h, k)$ und $\sphericalangle(h', k')$ rechte Winkel derart, daß keine Gerade durch irgendeinen Schenkel des einen Winkels die Geraden durch die Schenkel des anderen Winkels schneidet.

[10]) Wir heben hervor, daß man in der Grundlegung der Geometrie unter „Winkelabtragung" nicht ein Konstruktionsverfahren versteht, sondern nur die Tatsache, daß es einen Halbstrahl k' gibt, der auf einer gegebenen Seite von a' liegt, und dabei der Winkel (h, k) dem Winkel (h', k') kongruent ist. Es wäre auf Grund der obigen Entwicklungen nicht schwer für die Winkelabtragung auch eine Konstruktion zugeben.

liegen dann alle inneren Punkte des Winkels (h', k') auf der gegebenen Seite von a'.

Aus der obigen Entwicklung folgt nach HILBERTS Satz 12 die Möglichkeit der Winkelabtragung auch für stumpfe Winkel.

Um nun die *Eindeutigkeit der Winkelabtragung* zu beweisen, betrachten wir den Halbstrahl h der beliebigen Geraden a, der vom Punkte O ausgeht; wir nehmen an es wären k und k' zwei Halbstrahlen die vom Punkte O ausgehen und auf ein und derselben Seite der Geraden a verlaufen, und überdies der Winkel (h, k) dem Winkel (h, k') kongruent wäre; wenn dann der eine der Winkel $\sphericalangle(h, k)$, $\sphericalangle(h, k')$ ein spitzer Winkel ist, so ist nach der Transitivität der Größenvergleichung der Winkel auch der andere Winkel ein spitzer Winkel. Wir nehmen an, daß die beiden Winkel $\sphericalangle(h, k)$ und $\sphericalangle(h, k')$ spitze Winkel sind. Von den Halbstrahlen k, k' fällt entweder k' in das Innere des Winkels (h, k), oder k in das Innere des Winkels (h, k'); es treffe etwa die erstere Möglichkeit zu. Wir tragen $\sphericalangle(h, k)$ an den Halbstrahl h an, so daß k und der entstehende Schenkel k'' auf verschiedenen Seiten der Geraden a liegen, und bestimmen dann auf den Schenkeln k und k'' die Punkte A, A'' derart, daß $OA \equiv OA''$ wird. Nach Hilfsätze A und C folgern wir leicht, daß der Halbstrahl h mit der Strecke AA'' einen Punkt B gemein hat. Wegen der Kongruenz der Dreiecke AOB und $A''OB$ wird $\sphericalangle OBA \equiv \sphericalangle OBA''$, d. h. $\sphericalangle OBA$ ist ein rechter Winkel. Bestimmen wir auf der Geraden a einen Punkt O', so daß B zwischen O und O' liegt, und überdies die Strecken OB und $O'B$ einander kongruent sind, so hat nach Voraussetzung und Hilfsatz D der Halbstrahl k' mit der Strecke AO' einen Punkt A' gemein. Da ferner $\sphericalangle OBA$ ein rechter Winkel ist und somit die Winkel $\sphericalangle OBA$ und $\sphericalangle O'BA$ einander kongruent sind, so folgt nach dem ersten Kongruenzsatz für Dreiecke, daß auch die Winkel $\sphericalangle AOB$ und $\sphericalangle AO'B$ einander kongruent sind. Wegen der vorausgesetzten Gleichheit der Winkel $\sphericalangle AOB$ und $\sphericalangle A'OB$ wird auch der Winkel $A'OB$ dem Winkel $A'O'B$ kongruent und somit ist nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes $OA' \equiv O'A'$; so erweisen sich die Dreiecke $A'OB$ und $A'O'B$ untereinander kongruent, d. h. es sind die Winkel $\sphericalangle OBA'$ und $\sphericalangle O'BA'$ einander kongruent, und somit müßte auch $\sphericalangle OBA'$

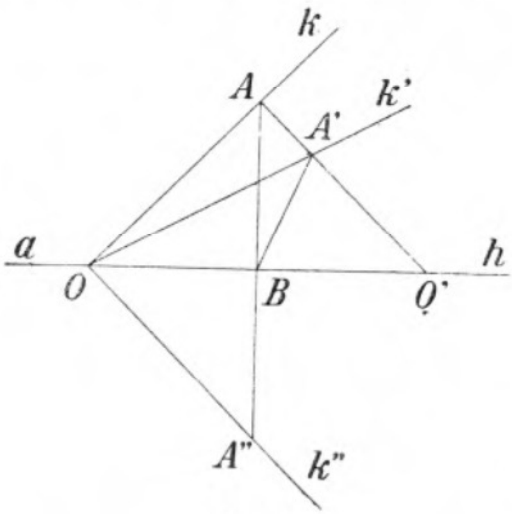

Fig. 6.

ein rechter Winkel sein; das ist nicht möglich, weil wir nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen im Punkte B zur Geraden a nur eine Senkrechte errichten können; hieraus ergibt sich nach der Transitivität der Winkelkongruenz unsere Behauptung.

Ist $\sphericalangle(h, k)$ und somit auch $\sphericalangle(h, k')$ ein stumpfer Winkel, so wird eine Abänderung dieses Schlußverfahrens notwendig, die leicht ersichtlich ist.

Hiermit haben wir auch das Axiom III 4 als Satz bewiesen, und damit ist die Möglichkeit des Aufbaues der ebenen Geometrie ohne Hilfe des vierten Axioms gezeigt.

Zum Schlusse spreche ich Herrn Prof. O. VARGA für seine wertvollen Ratschläge, die er mir beim Lesen des Manuscriptes erteilt hat, auch an dieser Stelle meinen besten Dank aus.

(Eingegangen am 12. Mai 1959.)