Über ein Problem von H. Busemann.

Herrn Professor Otto Varga zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von J. SZENTHE (Budapest).

1. Die ersten Untersuchungen, die die Charakterisierung der euklidischen Räume im Kreise der metrischen Räume bezweckten, stammen von K. MENGER. In seinem Buch "The Geometry of Geodesics"[1]) stellt H. BUSEMANN Untersuchungen über Finslersche Räume an. In diesen Räumen gelangt er ausgehend von den metrischen Räumen durch schrittweise Hinzufügung weiterer Axiome.

In dieser Arbeit benützen wir einige von BUSEMANN herrührende Axiome. Wenn R ein metrischer Raum ist, und $\mu(x, y)$ den Abstand der Punkte x, y dieses Raumes bedeutet, dann sind diese Axiome die folgenden:

A1. *Axiom der Konvexität:* Sind x und y verschiedene Punkte von R, so gibt es einen weiteren Punkt z von R, so daß $\mu(x, z)+\mu(z, y)=\mu(x, y)$.

A2. *Axiom der Möglichkeit der lokalen Verlängerung:* Ist p ein Punkt von R, so gibt es eine Zahl $\varrho(p)>0$ so, daß zu Punkte x, y von R mit $\mu(x, p)<\varrho(p)$, $\mu(y, p)<\varrho(p)$ ein weiterer Punkt z von R existiert, für den $\mu(x, y)+\mu(y, z)=\mu(x, z)$ gilt.

A3. *Axiom der endlichen Kompaktheit:* Jede beschränkte und unendliche Teilmenge des Raumes R hat mindestens einen Häufungspunkt in R.

BUSEMANN definiert folgender Weise die *geodätische Linie* eines metrischen Raumes:

E1. Eine Teilmenge G eines metrischen Raumes R heisst eine geodätische Linie dieses Raumes, wenn eine eindeutige lokalisometrische Abbildung $x=x(t)$ der Zahlengeraden auf G existiert. Die Abbildung heißt lokalisometrisch, wenn es zu jedem t_0 eine Zahl $\varepsilon(t_0)>0$ von der Art gibt, daß $\mu(x(t_1), x(t_2))=|t_1-t_2|$ gilt, wenn $|t_1-t_0|<\varepsilon(t_0)$, $|t_2-t_0|<\varepsilon(t_0)$ sind.

[1]) H. BUSEMANN, The geometry of geodesics, *New York,* 1955.

Die *gerade Linie* eines metrischen Raumes definiert BUSEMANN folgender Weise:

E2. Eine Teilmenge F eines metrischen Raumes R, heißt gerade Linie des Raumes, wenn es eine eindeutige Abbildung $x=x(t)$ der Zahlengeraden auf F gibt, die isometrisch ist, d. h. $\mu(x(t_1), x(t_2))=|t_1-t_2|$ für alle t_1, t_2 gilt.

Mit BUSEMANNS Untersuchungen hängt folgender grundsätzlicher Satz von K. MENGER[2]) eng zusammen: wenn x und y Punkte eines kompakten metrischen Raumes R, der konvex ist, sind, dann gibt es eine Teilmenge S des Raumes R, die x und y enthält, und die ein isometrisches Bild einer Strecke der Zahlengeraden ist.

BUSEMANN bewies den folgenden Satz: Sind a und b Punkte eines metrischen Raumes R, in dem die Axiome **A1**, **A2**, **A3** gelten, dann gibt es in diesem Raum eine geodätische Linie, die die Punkte a und b enthält.

Im Anhang seines Buches stellt BUSEMANN die folgende Frage:

P1. Fallen die geodätischen Linien eines metrischen Raumes R, in dem die Axiome **A1**, **A2**, **A3** gelten, und in **A2** $\varrho(p)\equiv\infty$ ist, mit den geraden Linien zusammen?

Ein Gegenbeispiel zeigte uns, daß die Antwort auf die obige Frage von BUSEMANN zu verneinen ist. In dem erwähnten Gegenbeispiel, kam ein Minkowskischer Raum vor, dessen Eichfläche singuläre Punkte besaß. Im Anschluß an dieses Gegenbeispiel hat O. VARGA folgende Frage gestellt:

P2. Ist es möglich Minkowskische Räume mit solchen geodätischen Linien, die keine geraden Linien sind, durch Singularitäten seiner Eichfläche zu charakterisieren?

In **2.** beweisen wir einen Satz, der **P2** und auch **P1** beantwortet. In **3.** geben wir eine Einteilung der Minkowskischen Räume, die sich hauptsächlich auf ihre geodätischen und geraden Linien bezieht.

Im n-dimensionalen affinen Raum A_n definieren wir mit Hilfe einer konvexen und bezüglich des Punktes o des Raumes A_n zentralsymmetrischen Fläche φ auf bekannter Weise einen Minkowskischen Raum M. Sind a und b Punkte von M, so bezeichne $\nu(a, b)$ ihren Abstand in M. Sind a und b verschiedene Punkte von A_n, so ist ab die Gerade, die sie in A_n bestimmen. Sind a und b Punkte von A_n, so bezeichne $S(a, b)$ die von ihnen in A_n bestimmte geschlossene Strecke. Im Falle $a=b$ ist $S(a, b)$ mit dem Punkt $a=b$ identisch. Sind a und b zwei verschiedene Punkte von A_n, so bestimmt der Punkt a auf der Geraden ab zwei geschlossene Halbstrahlen; $H(a, b)$ ist derjenige von diesen geschlossenen Halbstrahlen, der den Punkt b enthält.

---

[2]) K. MENGER, Untersuchungen über allgemeine Metrik, *Math. Ann.* **100** (1928), 75—163.

Sind a und b Punkte von M, so gibt es einen einzigen Punkt φ_{ab} auf der Fläche φ, so daß die Strecke $S(a, b)$ und $S(o, \varphi_{ab})$ parallel und gleichgerichtet sind. In weiterem werden wir den folgenden bekannten Hilfssatz[3]) wiederholt anwenden:

H. Wenn a, b, c Punkte des Raumes M sind, so gilt die Ungleichung $\nu(a, b)+\nu(b, c) \geqq \nu(a, c)$, und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn φ_{ac} der Strecke $S(\varphi_{ab}, \varphi_{bc})$ angehört.

Aus diesem Hilfssatz folgt, daß M ein metrischer Raum ist.

Im Raum M gilt das Axiom **A1**; sind nämlich a und b Punkte von M und c ein weiterer Punkt der Strecke $S(a, b)$, dann folgt aus **H**, daß $\nu(a, c)+\nu(c, b)=\nu(a, b)$ ist.

Im Raum M gilt das Axiom **A2** mit $\varrho(p) \equiv \infty$; sind nämlich d und e Punkte von M, und f ein beliebiger Punkt des Halbstrahles $H(d, e)$, der nicht der Strecke $S(d, e)$ angehört, so folgt aus **H**, daß $\nu(d, e)+\nu(e, f)=\nu(d, f)$ gilt.

Im Raum M gilt das Axiom **A3**; **A3** ist nämlich im Raum A_n gültig, und M und A_n sind homeömorph.

2. Der folgende Satz beantwortet **P1** und **P2**:

Satz. *Im Minkowskischen Raum M existiert eine solche geodätische Linie, die keine gerade Linie dieses Raumes ist, dann und nur dann, wenn es drei Punkte a, b, c von M gibt, so daß die Strecken $S(a, b)$, $S(b, c)$ zur Eichfläche φ dieses Raumes, aber nicht zu derselben Stützmenge dieser Eichfläche gehören.*

Beweis. Sei M ein Minkowskischer Raum, dessen Eichfläche φ die durch die Punkte a, b, c bestimmte Strecken $S(a, b), S(b, c)$ enthält, aber keine Stützmenge hat, die diese Strecken enthält.

Aus dieser Voraussetzung folgt, daß die Punkte a, b, c eine Ebene α bestimmen. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Der Punkt o gehört zu α.
2. Die Ebene α enthält den Punkt o nicht.

1. Der Durchschnitt von φ und α ist konvex und zentralsymmetrisch, daraus folgt, daß es einen inneren Punkt a' von $S(a, b)$ so gibt, daß der Winkel $coa' \sphericalangle < \pi$ ist. Daher gibt es einen solchen Punkt d von $S(o, b)$, daß die zu oc parallele Gerade durch d die Strecke $S(o, a')$ in einem Punkte e schneidet. Wir bezeichnen die Mittelpunkte von $S(d, e)$ und $S(o, e)$ mit f bzw. g. Wir beweisen nun, daß $G'=H(g, o) \cup S(g, f) \cup H(f, d)$ eine geodätische, aber keine gerade Linie des Raumes M ist. Infolge der obigen Kon-

[3]) S. Gołab und H. Härlen: Minkowskische Geometrie I., II. *Monatsh. Math.* 38 (1931), 387—398.

struktion schneidet of $S(a', b)$ in einem inneren Punkt i von $S(a', b)$. Ist h der Schnittpunkt von fd mit $S(c, b)$ so ist $\varphi_{of} = i$, $\varphi_{fh} = c$ und $\varphi_{oh} = h$. Aus obigen folgt unmittelbar, daß die Strecke $S(i, c)$ den Punkt h nicht enthält, und zufolge **H** $r(o, f) + r(f, h) > r(o, h)$ gilt. Hieraus ergibt sich, daß eine isometrische Abbildung der Zahlengeraden auf G' nicht existiert. Nun geben wir eine eindeutige lokalisometrische Abbildung $t = \vartheta(x)$ von G' auf die Zahlengerade:

Sei

$$t = \vartheta(x) = \begin{cases} r(x, g), & \text{wenn } x \in S(g, f) \\ r(f, g) + r(x, f), & \text{wenn } x \in H(f, d) \\ -r(x, g), & \text{wenn } x \in H(g, o). \end{cases}$$

Aus **H** folgt, daß diese Abbildung in inneren Punkten von $H(g, o)$, $S(f, g)$, $H(f, d)$ lokalisometrisch ist. Wenn $x_1 \in S(o, g)$ und $x_2 \in S(g, f)$, dann folgt aus **H**, daß $r(x_1, x_2) = r(x_1, g) + r(g, x_2) = |\vartheta(x_2) - \vartheta(x_1)|$, d. h. $t = \vartheta(x)$ im Punkt g lokalisometrisch ist. Auf ähnliche Weise folgt, daß $t = \vartheta(x)$ auch in f lokalisometrisch ist. Hieraus folgt, daß $x = \vartheta^{-1}(t)$ eine lokalisometrische Abbildung der Zahlengeraden auf G' ist; G' ist also eine geodätische Linie, aber keine gerade Linie von M.

2. Da die Strecken $S(a, b)$, $S(b, c)$ nicht derselben Stützmenge von φ angehören, liegt auf dem Dreieck $abc\triangle$ ein solcher Punkt k, der von den gemeinsamen Punkt l von $H(o, k)$ mit φ, verschieden ist. Die Gerade kc schneidet $S(a, b)$ in einem Punkt m. Die mit ob parallele Gerade durch m hat mit $S(o, a)$ einen gemeinsamen Punkt n. Die mit oc parallele Gerade durch m schneidet ol im Punkte p. In diesem Falle ist $G'' = H(n, o) \cup \cup S(n, m) \cup H(m, p)$ eine geodätische Linie, aber keine gerade Linie von M. Nach obiger Konstruktion folgt, daß $\varphi_{om} = m$, $\varphi_{mp} = c$, $\varphi_{op} = l$, und l gehört nicht zu der Strecke $S(c, m)$; dann ergibt aber der Hilfssatz **H**, daß $r(o, m) + + r(m, p) > r(o, p)$ ist. Auf Grund dieser Ungleichung folgt, daß es keine isometrische Abbildung der Zahlengeraden auf G'' gibt. Wir stellen nun folgende lokalisometrische Abbildung $t = \psi(x)$ von G'' auf die Zahlengerade her:

Sei

$$t = \psi(x) = \begin{cases} r(x, n), & \text{wenn } x \in S(n, m) \\ r(n, m) + r(x, m), & \text{wenn } x \in H(m, p) \\ -r(x, n), & \text{wenn } x \in H(n, o). \end{cases}$$

Auf Grund von **H** folgt ähnlich wie im Falle 1., daß $x = \psi^{-1}(t)$ eine lokalisometrische Abbildung der Zahlengeraden auf G'' ist; es ist also G'' eine geodätische aber keine gerade Linie von M.

Ist M ein Minkowskischer Raum, in dem es eine geodätische Linie G gibt, die aber keine gerade Linie dieses Raumes ist, dann beweisen wir, daß die Eichfläche φ dieses Raumes drei solche Punkte a, b, c enthält, daß $S(a, b)$, $S(b, c)$ zu φ, jedoch nicht zu derselben Stützmenge von φ gehören. Obige Voraussetzung bedeutet mit anderen Worten: es gibt eine lokalisometrische Abbildung $x = \lambda(t)$ der Zahlengeraden auf G, und es gibt zwei Zahlen t_0 und t' so, daß $|t_0 - t'| \neq r(\lambda(t_0), \lambda(t'))$ gilt. Zufolge der Tatsache, daß $x = \lambda(t)$ im Punkt t_0 lokalisometrisch und, daß $r(x, y)$ eine stetige Funktion von x und y ist, existiert eine solche maximale abgeschlossene Strecke (t_0, t_1), im Falle $t' > t_0$, oder (t_1, t_0), im Falle $t_0 > t'$, daß $x = \lambda(t)$ auf dieser Strecke isometrisch und t_1 ein Zwischenpunkt von t_0 und t' ist. Aus der lokalisometrische Eigenschaft von $x = \lambda(t)$ folgt gleichfalls die Existenz eines Zwischenpunktes t_2 von t_0 und t_1, und eines Zwischenpunktes t_3 von t_1 und t', so, daß $|t_2 - t_3| = r(\lambda(t_2), \lambda(t_3))$, $|t_0 - t_3| \neq r(\lambda(t_0), \lambda(t_3))$ gelten. Wir führen folgende Bezeichnungen ein: $\lambda(t_0) = u$, $\lambda(t_2) = v$, $\lambda(t_1) = w$, $\lambda(t_3) = z$. Aus obigen folgt, daß im Falle $t_0 < t'$

$$t_0 < t_2 < t_1 < t_3 < t',$$

und

$$r(u, v) = t_2 - t_0, \quad r(v, w) = t_1 - t_2, \quad r(u, w) = t_1 - t_0$$

$$r(v, z) = t_3 - t_2, \quad r(w, z) = t_3 - t_1, \quad r(u, z) \neq t_3 - t_0$$

gelten; und, daß im Falle $t' < t_0$

$$t' < t_3 < t_1 < t_2 < t_0,$$

und

$$r(u, v) = t_0 - t_2, \quad r(v, w) = t_2 - t_1, \quad r(u, w) = t_0 - t_1$$

$$r(v, z) = t_2 - t_3, \quad r(w, z) = t_1 - t_3, \quad r(u, z) \neq t_0 - t_3$$

gelten.

Hieraus ergibt sich in beiden Fällen, daß $r(u, v) + r(v, w) = r(u, w)$, $r(v, w) + r(w, z) = r(v, z)$, $r(u, w) + r(w, z) \neq r(u, z)$ gelten, woraus $r(u, w) + r(w, z) > r(u, z)$, da M ein metrischer Raum ist. Mit Rücksicht auf $\mathbf{H}$ folgt weiterhin, daß $\varphi_{uw} \in S(\varphi_{uv}, \varphi_{vw})$, $\varphi_{vz} \in S(\varphi_{vw}, \varphi_{wz})$, $\varphi_{uz} \notin S(\varphi_{uw}, \varphi_{wz})$ gelten.

Nun beweisen wir, daß sich mit $\varphi_{uv} = a$, $\varphi_{vw} = b$, $\varphi_{wz} = c$ unsere obige Behauptung verwirklicht. Der Fall $a = b = c$ ist unter obigen Umständen unmöglich, dann $\varphi_{uw} = \varphi_{wz} = \varphi_{uz}$ gelten würde, was aber wegen $\mathbf{H}$ der Ungleichung $r(u, w) + r(w, z) > r(u, z)$ widerspricht. Der Fall $a = b \neq c$ ist auch unmöglich, denn in diesem Falle gilt $\varphi \supset S(b, c)$, und der Halbstrahl $H(o, \varphi_{uz})$, der die Strecke $S(b, c)$ schneidet, hat mit φ noch einen weiteren gemeinsamen Punkt φ_{uz}, der auf Grund von $\mathbf{H}$ von dem, auf $S(b, c)$ liegendem Punkte verschieden ist; das ist aber unmöglich, weil dann $H(o, \varphi_{uz})$ mit φ mehr als einen gemeinsamen Punkt hätte. Auf ähnlicher Weise sieht man ein, daß der Fall $a \neq b = c$ auch unmöglich ist. Gibt es eine Stützmenge V von φ, die

die Strecken $S(a, b)$, $S(b, c)$ enthält, so enthalte sie φ_{uw}, und $S(\varphi_{uw}, \varphi_{uz})$. In diesem Falle hat der Halbstrahl $H(o, \varphi_{uz})$ zwei gemeinsame Punkte mit φ, einen Punkt, in dem er $S(\varphi_{uw}, \varphi_{uz})$ schneidet, und den Punkt φ_{uz}, der auf Grund von **H** von dem ersten verschieden ist; das ist aber unmöglich. φ hat also keine Stützmenge V, die die beiden Strecken $S(a, b)$ und $S(b, c)$ enthält.

Die Behauptung, daß $S(a, b)$ und $S(b, c)$ zu φ gehören folgt aus obigen.

3. Auf Grund obiger Überlegungen lassen sich die Minkowskischen Räume auf drei Klassen teilen:

1. φ enthält keine Strecke; in diesem Falle hat M gerade Linien, die alle Geraden sind; und enthält geodätische Linien, die alle gerade Linien sind.

2. φ enthält Strecken, aber zu je zwei verschiedenen Strecken von φ, die gemeinsamen Punkt haben, gibt es eine Stützmenge von φ, die diese Strecken enthält. In diesem Falle gibt es gerade Linien in M, die Geraden und andere Teilmengen von M sind; in diesem Falle gibt es geodätische Linien in M, die aber alle gerade Linien sind. Z. B. φ entspricht der obigen Forderung, wenn man in dreidimensionalen Raum als Eichfläche eine faßförmige wählt.

3. φ enthält zwei Strecken mit gemeinsamen Punkt, es existiert aber keine Stützmenge von φ die diese Strecken enthält. In diesem Falle gibt es gerade Linien in M, die Geraden und andere Teilmengen von M sind, und gibt es auch geodätische Linie in M, die aber keine gerade Linie von M ist. Z. B. entspricht φ, unter anderen, der obigen Forderung, wenn man im dreidimensionalen Raum als Eichfläche ein konvexes zentralsymmetrisches Polyeder wählt.

(Eingegangen am 22. Mai 1959.)