Verallgemeinerung eines Satzes über assoziative Funktionen von mehreren Veränderlichen

Von E. VINCZE (Miskolc)

1. In einer früheren Arbeit [7] haben wir bewiesen, daß man eine in der Menge H definierte Operation

$$(1) \qquad u = u_1 u_2 \cdots u_n \qquad (u, u_1, \ldots, u_n \in H)$$

von n Faktoren unter bestimmten Bedingungen mit Hilfe einer Operation von zwei Veränderlichen darstellen kann; es gilt nämlich der folgende

Satz 1. *Wenn die in H definierte Operation* (1) *den folgenden Bedingungen genügt:*

a) *es gibt ein festes Elementsystem $c_2, \ldots, c_{n-1} (\in H)$, für das die Abbildungen*

$$\omega_k(u) = c_k \cdots c_2 u c_{n-1} \cdots c_k \qquad (\omega_k(u): H \to H;\ k = 2, 3, \ldots, n-1)$$

in H eindeutig umkehrbar sind, $(\omega_k^{-1}\omega_k(u) = \omega_k\omega_k^{-1}(u) = u)$;

b) *die Operation* (1) *ist assoziativ, d. h. es gilt*

$$(2) \qquad \begin{cases} (u_1 \cdots u_n) u_{n+1} \cdots u_{2n-1} = u_1 \cdots u_k (u_{k+1} \cdots u_{k+n}) u_{k+n+1} \cdots u_{2n-1} = \\ = u_1 \cdots u_{n-1} (u_n \cdots u_{2n-1}) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-2;\ n \geqq 3;\ u_1, \ldots, u_{2n-1} \in H) \end{cases}$$

(vgl. [4]);

dann kann man die Operation (1) *in der Form*

$$(3) \qquad \begin{cases} u_1 u_2 \cdots u_n = u_1 * [\omega_{n-1}^{-1}(u_2) * [\omega_{n-2}^{-1}(u_3) * \cdots * [\omega_2^{-1}(u_{n-1}) * u_n] \cdots]] \\ \qquad (u_1, \ldots, u_n \in H;\ \omega_{n-1}^{-1}(u_2), \ldots, \omega_2^{-1}(u_{n-1}): H \to H) \end{cases}$$

angeben, wo die Operation

$$(4) \qquad u * v = u c_{n-1} \cdots c_2 v$$

von zwei Faktoren in H assoziativ ist, also die Menge H bezüglich der Operation (4) *eine Halbgruppe bildet.*

J. Aczél [1] (vgl. [2]) bewies, daß jede eingliedrige streng monotone kontinuierliche Halbgruppe (mit oder ohne Einselement) mit einer Additions-Halbgruppe der reellen Zahlen isomorph ist, d. h. sämtliche stetige streng monotone Lösungen der Funktionalgleichung

$$F[F(x, y), z] = F[x, F(y, z)] \qquad x, y, z, F \in (a, b)$$

von der Gestalt

$$F(x, y) = \varphi^{-1}[\varphi(x) + \varphi(y)] \tag{5}$$

sind.

Einen ähnlichen, aber nicht so allgemeinen Satz haben wir in [7] für die der Gleichung (2) genügende reelle Funktion (1) formuliert. In dieser Arbeit werden wir diesen Satz verallgemeinern.

Wir bemerken, daß A. P. GUINAND [5] sich seit des Abschlusses der Arbeit [7] mit assoziativen Systemen beschäftigt und ohne Beweis die Behauptung ausgesprochen hat, daß jede nichttriviale assoziative Funktion von drei Veränderlichen in einer der Gestalten

$$F(x, y, z) = \varphi^{-1}[\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)],$$

$$F(x, y, z) = \varphi^{-1}\left[\frac{\varphi(x)\varphi(z)}{\varphi(y)}\right],$$

$$F(x, y, z) = \varphi^{-1}\left[-\frac{\varphi(x)\varphi(z)}{\varphi(y)}\right]$$

darstellbar ist.

2. Wir brauchen die Lösung der Funktionalgleichung

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i), \tag{6}$$

die eine Verallgemeinerung der PEXIDERschen Funktionalgleichung ist (vgl. [6]). Für diese Gleichung gilt der folgende

Satz 2. *Die Lösungen der Funktionalgleichung* (6) *in einer bezüglich der Addition geschlossenen Menge sind die Funktionen*

$$g(x) = h(x) + c_0, \quad g_i(x) = h(x) + c_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{7}$$

wo die Funktion $h(x)$ auf einer bezüglich der Addition der reellen Zahlen geschlossenen Menge der CAUCHY*schen Funktionalgleichung*

$$h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2) \tag{8}$$

genügt, und die Zahlen c_i $(i = 0, 1, \dots, n)$ beliebige Konstanten mit der Beschränkung

$$c_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i \tag{9}$$

sind.

Beweis. Setzen wir in (6) $x_i = \alpha_i$ (konst.), dann ist

$$\beta_0 = g\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} g_i(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i,$$

also kann man mit der Bezeichnung $x_i = \alpha_i + \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ statt (6) die Gleichung

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) - \beta_0 = \sum_{i=1}^{n} [g_i(\alpha_i + \xi_i) - \beta_i] \tag{10}$$

schreiben. Bei

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \xi\right) - \beta_0 = h(\xi) \tag{11}$$

und

$$g_i(\alpha_i + \xi) - \beta_i = h_i(\xi) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{12}$$

folgt die Gleichung

$$h\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} h_i(\xi_i) \tag{13}$$

aus (10). Aus der Gleichung (12) ergibt sich $h_i(0) = 0$ falls $\xi = 0$, also wenn man in (13)

$$\xi_1 = \cdots = \xi_{i-1} = \xi_{i+1} = \cdots = \xi_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

schreibt, dann erhält man

$$h_i(\xi_i) = h(\xi_i),$$

und (13) geht mit den Einsetzungen $\xi_3 = \cdots = \xi_n = 0$ tatsächlich in die Cauchysche Gleichung (8) über; und die Formeln

$$g(x) = h\left(x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) + \beta_0 = h(x) + h\left(-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) + \beta_0 = h(x) + c_0$$

und

$$g_i(x) = h(x - \alpha_i) + \beta_i = h(x) + h(-\alpha_i) + \beta_i = h(x) + c_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

folgen aus den Gleichungen (11) und (12). Die Gleichung (9) ergibt sich, wenn man in der Gleichung (6) die Funktionen $g(x)$ und $g_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ einsetzt.

3. Es sei

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n \tag{14}$$

eine reelle Funktion von n Veränderlichen; wir können den in [7] ausgesprochenen Satz folgendermaßen verschärfen:

Satz 3. *Die für reelle Zahlen definierte Funktion* (14) *genüge den folgenden Bedingungen:*

c) *der Definitionsbereich und bei Konstanthalten von $n-1$ Veränderlichen auch der Wertevorrat der Funktion F ist für alle Veränderlichen dasselbe reelle Intervall $I \equiv (a, b)$;*

d) *die Funktion F ist stetig und streng monoton in allen Veränderlichen;*

e) *die Funktion F ist assoziativ, d. h. es gilt (2) für (14);*

dann kann man die Funktion F für gerade n in der Form

$$F = x_1 x_2 \cdots x_n = \psi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} \psi(x_i)\right] \tag{15}$$

darstellen, für ungerade n gilt eine der folgende Darstellungen

$$F = x_1 x_2 \cdots x_n = \psi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} \psi(x_i)\right], \tag{16$_1$}$$

bzw.

$$F = x_1 x_2 \cdots x_n = \varphi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \varphi(x_i)\right], \tag{16$_2$}$$

wo die Funktionen $\varphi(x), \psi(x)$ $(x \in I; \varphi, \psi : I \to I)$, und folglich auch ihre Umkehrfunktionen $\varphi^{-1}(x)$, $\psi^{-1}(x)$ stetig und streng monoton sind.

Bemerkung. In [7] haben wir außer den Bedingungen c), d), e) auch die Bedingung gefordert, daß es ein festes Element $e(\in I)$ gibt, für das

$$F(e, e, \ldots, e) = e$$

gilt, und dann folgt auch $\psi(e) = 0$.

Beweis. Die den Bedingungen c), d), e) genügende Funktion kann man nach dem Satz 1 und der Gleichung (5) in der Form

$$F = \varphi^{-1}\left[\varphi(x_1) + \sum_{i=2}^{n-1} f_i(x_i) + \varphi(x_n)\right] \tag{17}$$

schreiben, wo

$$f_i(x_i) = \varphi\, \omega_{n-i+1}^{-1}(x_i) \qquad (i = 2, 3, \ldots, n-1)$$

ist. Setzen wir die Funktion (17) in die Gleichung (2) ein, dann erhalten wir die Gleichung

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi^{-1}\Big\{\varphi\varphi^{-1}\Big[\varphi(x_1) + \sum_{i=2}^{n-1} f_i(x_i) + \varphi(x_n)\Big] + \sum_{i=2}^{n-1} f_i(x_{n-1+i}) + \varphi(x_{2n-1})\Big\} = \\ &\quad = \varphi^{-1}\Big\{\varphi(x_1) + \sum_{i=2}^{k-1} f_i(x_i) + f_k\varphi^{-1}\Big[\varphi(x_k) + \sum_{i=2}^{n-1} f_i(x_{k-1+i}) + \\ &\qquad + \varphi(x_{k+n-1})\Big] + \sum_{i=k+1}^{n-1} f_i(x_{n-1+i}) + \varphi(x_{2n-1})\Big\} \\ &\qquad\qquad (k = 2, 3, \ldots, n-1), \end{aligned}\right. \tag{18}$$

d. h. die Gleichung

$$(19)\qquad \begin{cases} f_k\varphi^{-1}\left[\varphi(x_k)+\sum_{i=2}^{n-1} f_i(x_{k-1+i})+\varphi(x_{k+n-1})\right]= \\ \qquad =\sum_{i=k}^{n-1} f_i(x_i)+\varphi(x_n)+\sum_{i=2}^{k} f_i(x_{n-1+i}) \end{cases} \qquad (k=2,3,\ldots,n-1).$$

Nimmt man in (19) $k=2$ und

$$x_2=\varphi^{-1}(y_1),\quad x_{n+1}=\varphi^{-1}(y_n),$$

$$x_{i+1}=f_i^{-1}(y_i), \qquad (i=2,3,\ldots,n-1)$$

dann kann man statt (19) die Gleichung

$$(20)\qquad f_2\varphi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i\right]=f_2\varphi^{-1}(y_1)+\sum_{i=3}^{n-1} f_i f_{i-1}^{-1}(y_{i-1})+\varphi f_{n-1}^{-1}(y_{n-1})+f_2\varphi^{-1}(y_n)$$

schreiben, die von der Gestalt (6) ist.

Aus der Bedingung d) folgt, daß die Funktionen f_i und f_i^{-1} $(i=2,3,\ldots,n-1)$ stetig und streng monoton sind; darum genügt es, wenn man nur die stetige und streng monotone Lösung der Gleichung (8) sucht. Es ist bekannt [3], daß die Gleichung (8) als einzige stetige und streng monotone Lösung die Funktion $h(x)=cx$ $(c\neq 0$, konst.) besitzt. Darum sind die in der Gleichung (20) stehenden Funktionen nach dem Satz 2 die folgenden:

$$(21)\qquad f_2\varphi^{-1}(y)=cy+c_0,$$

$$(22)\qquad f_2\varphi^{-1}(y_1)=cy_1+c_1,$$

$$(23)\qquad f_i f_{i-1}^{-1}(y_{i-1})=cy_{i-1}+c_{i-1}, \qquad (i=3,4,\ldots,n-1)$$

$$(24)\qquad \varphi f_{n-1}^{-1}(y_{n-1})=cy_{n-1}+c_{n-1},$$

$$(25)\qquad f_2\varphi^{-1}(y_n)=cy_n+c_n.$$

Aus den Gleichungen (9), (21), (22), (25) ergibt sich

$$(26)\qquad c_0=c_1=c_n=\sum_{i=1}^{n} c_i.$$

Aus den Gleichungen (24), bzw. (23) folgen

$$(27)\qquad \varphi(y)=cf_{n-1}(x)+c_{n-1},$$

bzw.

$$(28)\qquad \begin{cases} f_i(x)=cf_{i-1}(x)+c_{i-1}=c[cf_{i-2}(x)+c_{i-2}]+c_{i-1}=\cdots \\ \qquad \cdots=c^{i-2}f_2(x)+\sum_{\nu=0}^{i-3} c^{\nu}c_{i-1-\nu} \end{cases} \qquad (i=3,4,\ldots,n-1).$$

Da laut (22)

$$f_2(x) = c\varphi(x) + c_1$$

gilt, folgt

$$f_i(x) = c^{i-1}\varphi(x) + \sum_{\nu=0}^{i-2} c^\nu c_{i-1-\nu} \qquad (i = 2, 3, \ldots, n-1) \tag{29}$$

aus (28). Ist $i = n-1$ in (29), und setzen wir dies in die Gleichung (27) ein, so erhalten wir die Gleichung

$$\varphi(x) = c^{n-1}\varphi(x) + \sum_{\nu=-1}^{n-3} c^{\nu+1} c_{n-2-\nu}. \tag{30}$$

Die Gleichung (30) kann für beliebige x nur dann gelten, wenn

$$c^{n-1} = 1 \tag{31}$$

und

$$\sum_{\nu=-1}^{n-3} c^{\nu+1} c_{n-2-\nu} = 0 \tag{32}$$

ist. Bei beliebigem ganzem $n (\geqq 3)$ ist $c = 1$ eine Lösung von (31), und dann geht die Gleichung (32) in (26) über. Setzen wir in der Gleichung (29) $c = 1$, dann ist

$$f_i(x) = \varphi(x) + \sum_{\nu=1}^{i-1} c_\nu \qquad (i = 2, 3, \ldots, n-1). \tag{33}$$

Man kann leicht einsehen, daß die Funktionen (33) der Gleichung (18) tatsächlich genügen. Schreiben wir die Funktionen (33) in (17) ein, dann erhalten wir die Gleichung

$$F = \varphi^{-1}\left\{\varphi(x_1) + \sum_{i=2}^{n-1}\left[\varphi(x_i) + \sum_{\nu=1}^{i-1} c_\nu\right] + \varphi(x_n)\right\} =$$

$$= \varphi^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\varphi(x_k) + \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{i-1} c_\nu\right] - \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{i-1} c_\nu\right\},$$

woraus die Darstellungen (15), bzw. (16_1) mit der Bezeichnung

$$\varphi(x) + \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{i-1} c_\nu = \psi(x)$$

tatsächlich folgen.

Ist $n (\geqq 3)$ eine ungerade Zahl, dann besitzt die Gleichung (31) auch die Lösung $c = -1$, also folgt

$$f_i(x) = (-1)^{i-1}\varphi(x) + \sum_{\nu=0}^{i-2} (-1)^\nu c_{i-1-\nu} \qquad (i = 2, 3, \ldots, n-1) \tag{34}$$

aus (29). Setzen wir die Funktionen (34) in die Gleichung (19) ein, dann ergibt sich

$$(-1)^{k-1}\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{i-2}(-1)^{\nu}c_{i-1-\nu}+\sum_{\nu=0}^{k-2}(-1)^{\nu}c_{k-1-\nu}=$$

$$=\sum_{i=k}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{i-2}(-1)^{\nu}c_{i-1-\nu}+\sum_{i=2}^{k}\sum_{\nu=0}^{i-2}(-1)^{\nu}c_{i-1-\nu},$$

d. h. es ist

$$[(-1)^{k-1}-1]\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{i-2}(-1)^{\nu}c_{i-1-\nu}=0.$$

Diese Gleichung kann für jedes k $(=2,3,\dots,n-1)$ nur dann gelten, wenn

$$\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{i-2}(-1)^{\nu}c_{i-1-\nu}=0 \tag{35}$$

ist. Schreiben wir die Funktionen (34) in die Gleichung (17) ein und beachten dabei (35), dann erhalten wir mit der Umformung

$$F=\varphi^{-1}\left\{\varphi(x_1)+\sum_{i=2}^{n-1}\left[(-1)^{i-1}\varphi(x_i)+\sum_{\nu=0}^{i-2}(-1)^{\nu}c_{i-1-\nu}\right]+\varphi(x_n)\right\}=$$

$$=\varphi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\varphi(x_i)+\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{i-2}(-1)^{\nu}c_{i-1-\nu}\right]=\varphi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\varphi(x_i)\right]$$

tatsächlich die Darstellung (16_2).

Damit ist der Satz 3 vollständig bewiesen.

Literatur

[1] J. Aczél, Sur les opérations définies pour nombres réels, *Bull. Soc. Math. France* **76** (1949), 59—64.

[2] J. Aczél, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, *Basel und Stuttgart,* 1961.

[3] A. L. Cauchy, Cours d'analyse de l'École Polytechnique, 1. Analyse algébrique, *Paris,* 1821; Oeuvres II^e série t. III, *Paris,* 1897, 98—113.

[4] W. Dörnte, Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff, *Math. Z.* **29** (1928), 1—19.

[5] A. P. Guinand, Les équations fonctionnelles de la loi d'associativité ternaire, *C. R. Acad. Sci. Paris* **249** (1959), 23—24.

[6] W. Pexider, Notiz über Funktionaltheoreme, *Monatsh. Math.* **14** (1902), 293—301.

[7] E. Vincze, Über die Charakterisierung der assoziativen Funktionen von mehreren Veränderlichen, *Publ. Math. Debrecen* **6** (1959), 241—253.

(Eingegangen am 15. August 1959;
in veränderter Gestalt am 10. April 1960.)