Über die Spuren der verallgemeinerten Toeplitzschen Matrizes

Von BÉLA GYIRES (Debrecen)

Herrn Professor Dr. L. Rédei zum 60. Geburtstag gewidmet

Einführung

1. In der vorliegenden Arbeit treten oft quadratische Matrizes der Ordnung p auf, deren Elemente auf einer Menge Ω definierte reelle oder komplexe Funktionen sind. In der Folge werden wir solche Matrizes Funktionenmatrizes nennen. Unsere Bedingungen bezüglich Funktionenmatrizes sind so zu verstehen, daß dieselben für sämtliche Elemente der Funktionenmatrix gültig sein sollen. In diesem Sinne werden wir von beschränkten, messbaren, integrierbaren quadratisch integrierbaren usw. Funktionenmatrizes sprechen. Unter dem Integral einer integrierbaren Funktionenmatrix verstehen wir die aus den Integralen der Elemente derselben gebildete Matrix, und schreiben, um sie zu bezeichnen, die betreffende Matrix hinter dem Integralzeichen. Unter dem Absolutwert einer Matrix verstehen wir die aus den Absolutwerten der Elemente derselben gebildete Matrix, und schreiben, um sie zu bezeichnen, die betreffende Matrix zwischen die beiden Vertikalstriche des Absolutwertes. Die jeweilige Einheits- bzw. Nullmatrix wird mit $\mathbf{E}$ bzw. $\mathbf{O}$ bezeichnet. Eine Hermitesche Matrix wird positiv definit bzw. positiv semidefinit genannt, je nachdem die zu ihr gehörige Hermitesche Form nur im Nullpunkt, oder auch außerhalb desselben verschwindet. Kann eine Matrix sowohl positiv definit als auch positiv semidefinit sein, so nennen wir sie nichtnegativ definit.

Hat die quadratische Normalmatrix $\mathbf{A}$ der Ordnung m die Gestalt

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\mathbf{U}^*,\quad \mathbf{U}\mathbf{U}^*=\mathbf{E}$$

und ist $F(\lambda)$ eine Funktion, die an den den Eigenwerten von $\mathbf{A}$ entsprechenden Stellen definiert ist, so soll das Symbol $F(\mathbf{A})$ durch den Ausdruck

$$F(\mathbf{A})=\mathbf{U}\big(F(\lambda_1),\ldots,F(\lambda_m)\big)\mathbf{U}^*$$

definiert werden.

2. In den Arbeiten [3] und [4] beschäftigt sich der Verfasser mit stetigen Hermiteschen Funktionenmatrizes, die auf dem Intervall $\Omega=[-\pi,\pi]$ definiert sind. Ist $\mathbf{f}(x)$ eine solche Matrix, so bilden wir aus den Matrizes

$$(\alpha)\qquad \mathbf{c}_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{f}(x)e^{-ikx}dx \qquad (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$$

der Ordnung p die Hypermatrizes

$$(\beta)\qquad \mathbf{T}_n(\mathbf{f})=\begin{pmatrix} \mathbf{c}_0 & \mathbf{c}_1 & \cdots & \mathbf{c}_n \\ \mathbf{c}_{-1} & \mathbf{c}_0 & \cdots & \mathbf{c}_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \mathbf{c}_{-n} & \mathbf{c}_{-n+1} & \cdots & \mathbf{c}_0 \end{pmatrix} \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

der Ordnung $(n+1)p$. Die Eigenwerte $\lambda_1(x),\ldots,\lambda_p(x)$ der Matrix $\mathbf{f}(x)$ sind nach den für diese Matrix gemachten Voraussetzungen reell, und können auch so gewählt werden, daß sie stetig ausfallen, wobei sie dann die Ungleichung

$$m\leqq\lambda_k(x)\leqq M \qquad (k=1,\ldots,p)$$

befriedigen, in welcher $m<M$ passend gewählte Konstanten sind.

In der oben erwähnten Arbeit [3] ist es dem Verfasser gelungen, den folgenden Satz zu beweisen:

Die $(n+1)p$ Eigenwerte $\lambda_1^{(n)},\ldots,\lambda_{(n+1)p}^{(n)}$ der zu $\mathbf{f}(x)$ gehörigen Hermiteschen Matrix $\mathbf{T}_n(\mathbf{f})$ fallen für jedes natürliche n zwischen m und M. Ist ferner $F(\lambda)$ eine im Intervall $[m,M]$ definierte stetige Funktion, so gilt

$$(\gamma)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{(n+1)p}F(\lambda_k^{(n)})=\frac{1}{2\pi}\sum_{l=1}^{p}\int_{-\pi}^{\pi}F(\lambda_l(x))dx.$$

In der Arbeit [3] hat der Verfasser den Beweis der ersten Behauptung des Satzes mit Hilfe der Hauptachsentransformation der durch die Matrix $\mathbf{f}(x)$ repräsentierten Hermiteschen Form durchgeführt. Was die zweite Behauptung betrifft, so wurde dieselbe von einer Verallgemeinerung eines Toeplitzschen Satzes ausgehend zuerst für solche Matrizes $\mathbf{f}(x)$ bewiesen, deren Elemente trigonometrische Polynome sind, und dann wurde mittels des Weierstrass'schen Approximationssatzes das Ergebnis auf Hermitesche Funktionenmatrizes übertragen, deren Elemente beliebige stetige Funktionen sind.

Ist die stetige Hermitesche Funktionenmatrix positiv definit, so kann m auch positiv gewählt werden. Es sei in diesem Falle $F(\lambda)=\log\lambda$, dann erhalten wir aus (γ) den Ausdruck

$$(\delta)\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{\operatorname{Det}\mathbf{T}_n(\mathbf{f})}=e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\operatorname{Det}\mathbf{f}(x)\,dx}.$$

Der oben formulierte Satz des Verfassers, sowie der soeben erwähnte Spezialfall desselben stammen für $p=1$ von G. Szegő ([2], [5], [6], [7]). Szegő zeigt, [6], daß vom Spezialfall (δ) ausgehend der Satz auch im allgemeinen Falle bewiesen werden kann.

Im § 3. der Arbeit verallgemeinert der Verfasser die Toeplitzschen Matrizes für den Fall von meßbaren und beschränkten Funktionenmatrizes, die auf einer beliebigen Menge Ω definiert sind, und eines orthonormierten Systems, dessen einzelne Glieder wiederum Matrizes sind. Durch Einführung der Matrixspur von Hypermatrizes ist es dem Verfasser gelungen, eine matriziale Verallgemeinerung seines angeführten Satzes zu geben, und zwar für den Fall wo die Funktionenmatrix beschränkt, meßbar und Hermitesch ist. (Sätze 13. und 14.) Die Bedingung (27), die beim Aussprechen von Satz 13. eine Rolle spielte, ist im wesentlichen eine Verallgemeinerung der von *U.* Grenander ([1], 130) für den Fall formulierten Bedingung, wo es sich nicht um eine Funktionenmatrix, sondern um eine Funktion über der Menge Ω handelt. Gehen wir von der Matrixspur auf die gewöhnliche Spur über, so erhalten wir die Verallgemeinerung des oben erwähnten Satzes des Verfassers auf messbare und beschränkte Hermitesche Funktionenmatrizes. Als Spezialfall können wir wiederum (δ) erhalten. Auch hier zeigt der Verfasser, daß man aus (δ) die Relation (γ) zurückgewinnen kann. Zur Verallgemeinerung der Toeplitzschen Matrizes im § 3. und zum Beweis der dort ausgesprochenen Sätze ist eine Verallgemeinerung des Hilbertschen Raumes erforderlich, bei welcher auch das innere Produkt eine Matrix ist. Diese Verallgemeinerung wird von Verfasser im § 2. angegeben. Im § 1. werden die Eigenwerte meßbarer Funktionen untersucht.

§ 1. Über die Eigenwerte meßbarer Funktionen

Im folgenden machen wir von der leicht einzusehenden Tatsache Gebrauch, daß die Eigenwerte Hermitescher Matrizes, deren Elemente auf einer Menge Ω definierte meßbare Funktionen sind, auch so gewählt werden können, daß sie sich als auf dieser Menge meßbare Funktionen erweisen. Ziel dieses Paragraphen ist es, dies zu beweisen, und einige daraus sich ergebende Folgerungen zu erörtern.

Lemma. *Ist* $\mathbf{f}(x)$ *eine nichtnegativ definite, auf der Menge* Ω *messbare Funktionenmatrix, und sind seine Eigenwerte in eine nicht abnehmende Folge geordnet für jedes* x

$$\lambda_1(x), \ldots, \lambda_p(x), \tag{1}$$

so sind auch diese Funktionen auf der Menge Ω *meßbar.*

Beweis. Es ist klar, daß die Koeffizienten des Polynoms

$$\mathrm{Det}\,(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{f}(x))=\lambda^{p}+a_{p-1}(x)\lambda^{p-1}+\cdots+a_0(x) \tag{2}$$

auf der Menge Ω meßbare Funktionen sind.

Zuerst zeigen wir die Meßbarkeit von $\lambda_p(x)$. Ist $\lambda_p(x)=0$, so verschwinden an dieser Stelle alle die Funktionen (1), so daß

$$a_{p-1}(x)=\cdots=a_0(x)=0 \tag{3}$$

gilt. Gilt umgekehrt (3), so ist $\lambda_p(x)=0$. Ist also

$$\Omega(a_k(x)=0)=e_k \qquad (k=0,1,\ldots,p-1),$$

so ist

$$\Omega(\lambda_p(x)=0)=\bigcap_{k=0}^{p-1}e_k=E_0,$$

so daß E_0 und $\Omega-E_0$ beide meßbar sind. Offenbar gilt

$$\lambda_p(x)\begin{cases}=0 & \text{für}\quad x\in E_0\\ >0 & \text{für}\quad x\in\Omega-E_0.\end{cases} \tag{4}$$

Da $\lambda_p(x)$ auf der Menge E_0 konstant ist, ist sie auf derselben offenbar auch meßbar. Wegen (4) gilt auf der Menge $\Omega-E_0$ die Beziehung

$$s_\nu(x)=\lambda_1^\nu(x)+\cdots+\lambda_p^\nu(x) \qquad (\nu=1,2,\ldots). \tag{5}$$

$s_\nu(x)$ berechnet man aus den Koeffizienten von (2) mit Hilfe der ersten drei Grundoperationen, und folglich ist sie meßbar. Da ist aber wegen (5) auch $\dfrac{s_{\nu+1}(x)}{s_\nu(x)}$ und zugleich

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{s_{\nu+1}(x)}{s_\nu(x)}=\lambda_p(x)$$

auf der Menge $\Omega-E_0$ meßbar. Also ist $\lambda_p(x)$ auf der Menge $E_0 U(\Omega-E_0)=\Omega$ meßbar.

Um nun die Meßbarkeit von $\lambda_{p-1}(x)$ zu zeigen, genügt es nach dem vorangehenden zu zeigen, daß die Koeffizienten des Polynoms

$$\frac{1}{\lambda-\lambda_p(x)}\,\mathrm{Det}\,(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{f}(x))$$

auf der Menge Ω meßbar sind. Dies folgt aber sogleich daraus, daß sich diese Koeffizienten aus den Potenzsummen $s_\nu(x)-\lambda_p^\nu(x)$ mit Hilfe der ersten drei Grundrechnungsarten berechnen lassen, und daß wegen der Meßbarkeit von $\lambda_p^\nu(x)$, sowie von $s_\nu(x)$ auch $s_\nu(x)-\lambda_p^\nu(x)$ auf der Menge Ω meßbar ist.

Durch sukzessive Anwendung ähnlicher Gedankengänge können wir die Meßbarkeit sämtlicher Funktionen (1) beweisen.

Aus unserem Lemma ergibt sich das

Korollar 1. *Ist* $\mathbf{f}(x)$ *eine auf der Menge* Ω *definierte L-integrierbare nichtnegativ definite Hermitesche Funktionenmatrix, so sind auch die für jedes* x *in die nicht abnehmende Folge* (1) *geordneten Eigenwerte dieser Funktionenmatrix auf der Menge* Ω *integrierbar.*

Ist nämlich $\mathbf{f}(x) = (f_{jk}(x))$, so gilt nach dem wohlbekannten Satz von Frobenius

$$\lambda_k(x) \leqq \bigcup_{j=1}^{p} \sum_{l=1}^{p} |f_{jl}(x)|, \tag{6}$$

wo der Ausdruck auf der rechten Seite die obere Einhüllende der voraussetzungsgemäß integrierbaren Funktionen $\sum_{l=1}^{p} |f_{jl}(x)|$ $(j = 1, \ldots, p)$ bedeutet, die ihrerseits wiederum integrierbar ist.

Korollar 2. *Ist die Funktionenmatrix* $\mathbf{f}(x)$ *Hermitesch und auf der Menge* Ω *meßbar und beschränkt, so sind seine für jeden Wert von* x *nicht abnehmend geordneten Eigenwerte* (1) *auf der Menge* Ω *integrierbare Funktionen.*

Dann sind nämlich gemäß (6) die Funktionen (1) beschränkt, und wenn α eine positive Zahl ist, für welche

$$|\lambda_1(x)| < \alpha, \quad |\lambda_p(x)| < \alpha$$

gilt, so ist die Matrix $\mathbf{f}(x) + \alpha\mathbf{E}$ positiv definit, also sind nach unserem Lemma $\alpha + \lambda_k(x)$ und folglich auch $\lambda_k(x)$ $(k = 1, \ldots, p)$ auf der Menge Ω meßbare, nach dem Korollar 1. integrierbare Funktionen.

Korollar 3. *Ist* $\mathbf{f}(x)$ *eine Hermitesche, meßbare und beschränkte Funktionenmatrix auf der Menge* Ω, z *ein Zeilenvektor der Ordnung* p,

$$\inf \mathbf{z}\mathbf{f}(x)\mathbf{z}^* = m, \quad \sup \mathbf{z}\mathbf{f}(x)\mathbf{z}^* = M, \quad x \in \Omega, \mathbf{z}\mathbf{z}^* = 1$$

und $F(\lambda)$ *eine im Intervall* $[m, M]$ *definierte stetige Funktion, so sind im Falle von Eigenwerten, die für jedes* x *nicht abnehmend geordnet sind, die Funktionen* $F(\lambda_k(x))$ $(k = 1, \ldots, p)$ *und folglich auch die Funktion* $\operatorname{Sp} F(\mathbf{f}(x))$ *auf der Menge* Ω *meßbar und beschränkt.*

§ 2. Quasi-Hilbertscher Raum

1) *Die Menge* R *der (Punkte und Vektoren genannten) Elemente* $f, g, h, \ldots$ *nennen wir einen linearen Raum, wenn*

a) In R *eine Addition genannte und mit dem Pluszeichen bezeichnete Operation definiert ist, bezüglich welcher* R *eine Abelsche Gruppe bildet.* (Das Nullelementh bezeicnen wir mit 0.)

Es bezeichne M die Gesamtheit der Matrizes p-ter Ordnung, die sich aus komplexen Zahlen bilden lassen. $\mathbf{E}$ bzw. $\mathbf{O}$ sei die Einheitsmatrix bzw. die Nullmatrix.

b) Eine Linksmultiplikation der Elemente von R mit denjenigen von M gegeben ist, die auf folgende Weise definiert wird: Ist $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \in M$, $f, g, h, \ldots \in R$, dann ist

$$1)\ \alpha f \in R,\quad 2)\ \alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g,\quad 3)\ \alpha(\beta f)=(\alpha\beta)f,$$
$$4)\ (\alpha+\beta)f=\alpha f+\beta f,\quad 5)\ \mathbf{E}f=f,\quad 6)\ \mathbf{O}f=0.$$

Die Vektoren

$$f_k \in R \qquad (k=1,\ldots,n) \tag{7}$$

werden linear unabhängig genannt, falls

$$\alpha_1 f_1+\cdots+\alpha_n f_n=0,\quad \alpha_k \in M$$

dann und nur dann gilt, wenn

$$\alpha_1=\cdots=\alpha_n=\mathbf{O}$$

ist. — Im Gegenfalle sind die Vektoren (7) *voneinander linear abhängig.*

Kommt unter den Vektoren (7) auch die 0 vor, so sind diese Vektoren voneinander linear abhängig.

Wir nennen den linearen Raum R metrisiert, falls jedem Elementenpaar $f, g \in R$ eine wohldefinierte Matrix $(f, g) \in M$ derart zugeordnet ist, daß diese Zuordnung die folgenden Bedingungen erfüllt:

(8)

1. $(f,g)=(g,f)^*$,
2. $(\alpha f+\beta g, h)=\alpha(f,h)+\beta(g,h)$,
3. *(f,f) ist eine nichtnegative Hermitesche Matrix, welche dann und nur dann verschwindet, wenn $f=0$ ist.*

Die Matrix (f, g) nennen wir das innere (skalare) Produkt der Vektoren f und g.

Aus (8) folgt

$$(f, \alpha g+\beta h)=(f,g)\alpha^*+(f,h)\beta^*. \tag{9}$$

Der metrisierte lineare Raum R soll mit S bezeichnet werden.

Unter der Gramschen Matrix, bzw. der Gramschen Determinante der Vektoren $f_k \in S$ $(k=1,\ldots,p)$ verstehen wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} (f_1,f_1) & \cdots & (f_1,f_n) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ (f_n,f_1) & \cdots & (f_n,f_n) \end{pmatrix}=\mathbf{G}(f_1,\ldots,f_n) \tag{10}$$

bzw. die Determinante derselben.

Satz 1. *Die Gramschen Matrizes sind nichtnegativ definite Hermitesche Matrizes.*

Daß (10) Hermitesch ist, ist auf Grund von (8) 1. offenbar. Für beliebige Matrizes $\boldsymbol{\alpha}_k \in M$ $(k=1,\ldots,n)$ gilt unter Berücksichtigung der Rechenregeln (8)

$$\sum_{j,k=1}^{n} \boldsymbol{\alpha}_j (f_j, f_k) \boldsymbol{\alpha}_k^* = \left(\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\alpha}_j f_j, \quad \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\alpha}_j f_j \right), \tag{11}$$

d. h. nach (8) 3. ist die Matrix

$$\sum_{j,k=1}^{n} \boldsymbol{\alpha}_j (f_j, f_k) \boldsymbol{\alpha}_k^* \tag{12}$$

eine nichtnegativ definite Hermitesche Matrix. Dann folgt aber aus (12), wenn wir noch den ersten Zeilenvektor von $\boldsymbol{\alpha}_k$ mit $\mathbf{x}_k$ bezeichnen, die Ungleichung

$$\sum_{j,k=1}^{n} \mathbf{x}_j (f_j, f_k) \mathbf{x}_k^* \geqq 0,$$

welche bereits unsere Behauptung ergibt.

Die sich als Folgerung aus diesem Satze ergebende Ungleichung

$$\operatorname{Det} \mathbf{G}(f_1, \ldots, f_n) \geqq 0$$

ist nichts anderes, als die Verallgemeinerung des wohlbekannten Gramschen Determinantensatzes.

Satz 2. *Damit die Vektoren $f_k \in S$ $(k=1,\ldots,n)$ linear abhängig sein sollen, ist es notwendig und hinreichend, daß*

$$\operatorname{Det} \mathbf{G}(f_1, \ldots, f_n) = 0 \tag{13}$$

sein soll.

Beweis. Es sollen nämlich die Vektoren $f_k \in S$ $(k=1,\ldots,n)$ linear abhängig sein, d. h. es soll die Beziehung

$$\boldsymbol{\alpha}_1 f_1 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n f_n = 0 \tag{14}$$

derart bestehen, daß zwischen den Matrizes $\boldsymbol{\alpha}_k$ auch von der Nullmatrix verschiedene vorkommen. Multiplizieren wir nun beide Seiten von (14) skalar mit $\boldsymbol{\alpha}_k f_k$, und summieren danach bezüglich k, so folgt unter Berücksichtigung der Rechenregeln (8) die Beziehung

$$\sum_{j,k=1}^{n} \boldsymbol{\alpha}_j (f_j, f_k) \boldsymbol{\alpha}_k^* = \mathbf{0}. \tag{15}$$

Da die Matrizes $\boldsymbol{\alpha}_k$ nicht alle Nullmatrizes sind, gibt es zwischen den Reihenvektoren mit gleichem Index dieser Matrizes einen solchen, welcher nicht aus lauter Nullvektoren besteht. Ist z. B. $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ so, dann gilt nach dem vorangehenden

$$\sum_{j,k=1}^{n} \mathbf{z}_j (f_j, f_k) \mathbf{z}_k^* = 0, \tag{16}$$

d. h. die nichtnegative Hermitesche Form

$$\sum_{j,k=1}^{n} \mathbf{x}_j (f_j, f_k) \mathbf{x}_k^*$$

verschwindet außer dem Nullpunkt noch mindestens an einer Stelle. Dies ist aber nur möglich falls (13) gilt.

Nehmen wir jetzt an, daß (13) gilt, so muß es Vektoren $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ geben, für welche $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_1^* + \cdots + \mathbf{z}_n\mathbf{z}_n^* > 0$ ist und (16) besteht. Bezeichnen wir nun die Matrix der Ordnung p, deren sämtliche Zeilen gleich $\mathbf{z}_k$ sind, mit α_k, so gilt (15). Auf grund der Identität (11) und von (8) 3. ist $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j = 0$, d. h. die Vektoren f_j $(j = 1, \ldots, n)$ sind linear abhängig.

Aus den Sätzen 1. und 2. ergibt sich der

Satz 3. *Damit die Vektoren $f_k \in S$ $(k = 1, \ldots, n)$ linear unabhängig sind, ist es notwendig und hinreichend, daß ihre Gramsche Determinante positiv ist.*

2) Ist $f \in S$ und linear unabhängig, so ist nach Satz 3. $\operatorname{Det}(f,f) > 0$, und so existiert $(f,f)^{-1}$.

Es bezeichne $\|f\| = (f,f)^{\frac{1}{2}}$ diejenige gleichfalls nichtnegative Hermitesche Matrix, welche wir aus (f,f) gewinnen, indem wir in der Jordanschen Normalform desselben die Eigenwerte durch ihre positive Quadratwurzel ersetzen.

Die Matrix $\|f\|$ nenne wir die Norm des Vektors f, und ist noch f linear unabhängig, so nennen wir den Vektor $\|f\|^{-1}f = \varphi \in S$ die Normierte von f.

Satz 4. $\|\varphi\| = \mathbf{E}$.

Beweis.

$$(\varphi, \varphi) = (\|f\|^{-1}f, \|f\|^{-1}f) = \|f\|^{-1}(f,f)(\|f\|^{-1})^* = \|f\|^{-1}(f,f)\|f\|^{-1} = \mathbf{E},$$

da $\|f\|$ Hermitesch ist, ist auch $\|f\|^{-1}$ so, also gilt $(\|f\|^{-1})^* = \|f\|^{-1}$.

Auf Grund der Rechenregeln (8) ist es klar, daß für $f \in S$, $g \in S$ und $(f,g) = \mathbf{0}$ zugleich auch $(g,f) = \mathbf{0}$ gilt.

Ist $f \in S$, $g \in S$ und $(f,g) = \mathbf{0}$, so sagen wir, dass die Vektoren f und g orthogonal sind.

Indem wir das übliche Verfahren einigermaßen modifizieren, können wir die folgende, auf unseren Fall bezügliche Verallgemeinerung des sog. Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens bewiesen:

Satz 5. *Sind die Vektoren $f_k \in S$ $(k=1,\ldots,n)$ linear unabhängig, so können wir mit ihrer Hilfe solche Vektoren $\varphi_k \in S$ $(k=1,\ldots,n)$ bilden, die den Relationen $(\varphi_k,\varphi_l)=\delta_{kl}\mathbf{E}$ genügen und von denen sich f_k durch die ersten k Vektoren und φ_k durch die ersten k der Vektoren f_j $(j=1,\ldots,n)$ linear ausdrücken lässt.*

Auf Grund von (8) 1. ist es klar, dass es genügt, die Relationen $(\varphi_k,\varphi_l)=\delta_{kl}\mathbf{E}$ nur für den Fall $k\geqq l$ zu fordern.

BEWEIS. Da die Vektoren f_k linear unabhängig sind, ist (f_1,f_1) regulär, und so ist

$$\varphi_1=\|f_1\|^{-1}f_1.$$

Im Ausdruck $\psi_2=f_2-\alpha_1\varphi_1$ soll die Matrix α_1 so bestimmt werden, daß

$$(\psi_2,\varphi_1)=(f_2,\varphi_1)-\alpha_1(\varphi_1,\varphi_1)=\mathbf{0}$$

gilt. Hieraus folgt $\alpha_1=(f_2,\varphi_1)$. $\psi_2\in S$ kann nicht linear abhängig sein. Wäre er nämlich so, dann würde es eine von der Nullmatrix verschiedene Matrix $\beta\in M$ geben, für welche

$$\beta_2\psi_2=\beta f_2-\beta\alpha_1\|f_1\|^{-1}f_1=0$$

ist, was jedoch der linearen Unabhängigkeit der Vektoren f_k widerspricht. Also ist ψ regulär. Es sei

$$\varphi_2=\|\psi_2\|^{-1}\psi_2.$$

Nehmen wir an, daß unser Satz für $m-1<n$ bereits gilt. Es sollen die Matrizes $\alpha_k\in M$ $(k=1,\ldots,m)$ so bestimmt werden, daß der Vektor

$$\psi_m=f_m-\alpha_{m-1}\varphi_{m-1}-\cdots-\alpha_1\varphi_1 \tag{17}$$

auf die Vektoren φ_k $(k=1,\ldots,m-1)$ orthogonal ist. Da diese letzteren Vektoren nach Induktionsvoraussetzung paarweise orthogonal und normiert sind, folgt aus den Relationen $(\psi_m,\varphi_k)=0$ $(k=1,\ldots,m-1)$, daß $\alpha_k=(f_m,\varphi_k)$. Wie vorher im Falle von ψ_2, folgt ebenso auch hier, daß $\|\psi_m\|$ regulär ist. Darum ist $\varphi_m=\|\psi_m\|^{-1}\psi_m$ normiert, auf die Vektoren φ_k $(k=1,\ldots,m-1)$ orthogonal, und nach (17) läßt sich f_m durch diese Vektoren linear ausdrücken. Es ist aber auch die umgekehrte Behauptung richtig. Es sollen nämlich auf Grund unserer Induktionsvoraussetzung die Vektoren φ_k $(k=1,\ldots,m-1)$ mit Hilfe der Vektoren f_j $(j=1,\ldots,k)$ ausgedrückt werden, und die so erhaltenen Ausdrücke sollen in die mit $\|\psi_m\|^{-1}$ multiplizierte Identität (17) eingesetzt werden, womit wir bereits auch die zweite Hälfte unserer Behauptung bewiesen haben.

Die Vektorfolge $f_k \in R$ $(k=1,2,\ldots)$ nennen wir ein linear unabhängiges System, falls jeder endliche Schnitt dieser Folge aus linear unabhängigen Vektoren besteht.

Korollar. *Ist $f_k \in S$ $(k=1,2,\ldots)$ ein linear unabhängiges System, so lässt sich dazu mit Hilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens ein orthogonales und normiertes System $\varphi_k \in S$ $(k=1,2,\ldots)$ derart konstruieren, daß sich φ_m durch die ersten m Vektoren f_k und f_m durch die ersten m Vektoren φ_k linear ausdrücken läßt.*

Ist $f \in S$, $g \in S$, so kann der Abstand $\varrho(f,g)$ der Vektoren f und g durch $\|f-g\|$ gemessen werden. Also:

Wir sagen, daß $f_k \in S$ $(k=1,2,\ldots)$ im Mittel gegen den Vektor $f \in S$ konvergiert, falls $\|f_n-f\| \to \mathbf{0}$, $n \to \infty$ ist, und bezeichnen dies durch $f_n \to f$, wobei unter dem Grenzwert einer Matrixfolge der Grenzwert der entsprechenden Elemente der Matrizes verstanden wird.

Satz 6. *Damit die aus nichtnegativ definiten Hermiteschen Matrizes bestehende Folge $\mathbf{A}_n$ $(n=1,2,\ldots)$ konvergiert und die Nullmatrix als Grenzwert besitzt, ist es notwendig und hinreichend, daß* $\mathrm{Sp}\,\mathbf{A}_n$ *eine Nullfolge ist.*

Beweis. Die Bedingung ist trivialerweise notwendig. Sie ist aber auch hinreichend. Ist nämlich $\mathbf{A}_n=(a_{kl}^{(n)})$ und $\mathrm{Sp}\,\mathbf{A}_n$ eine Nullfolge, so ist $\mathrm{Sp}\,\mathbf{A}_n<\varepsilon$ und umso mehr $a_{kk}^{(n)}<\varepsilon$, falls $n>N(\varepsilon)$ gilt. $\mathbf{A}_n$ ist aber eine nichtnegativ definite Hermitesche Matrix, so dass alle seine Hauptminoren nichtnegativ sind, und folglich ist $a_{kk}^{(n)}a_{ll}^{(n)}-|a_{kl}|^2 \geqq 0$, woraus sich $\varepsilon^2-|a_{kl}|^2>0$ ergibt, d. h. es ist $|a_{kl}|<\varepsilon$ für $n>N(\varepsilon)$.

Hieraus ergibt sich

Satz 7. *Damit die Folge $f_n \in S$ $(n=1,2,\ldots)$ im Mittel zum Vektor $f \in S$ konvergiert, ist es notwendig und hinreichend, daß* $\mathrm{Sp}\,\|f_n-f\|$ $(n=1,2,\ldots)$ *bzw.* $\mathrm{Sp}\,\|f_n-f\|^2$ $(n=1,2,\ldots)$ *eine Nullfolge ist.*

Wir sagen, daß die Elemente $f,g,h,\ldots$ der Menge H einen Quasi-Hilbertschen Raum bilden, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) H ist ein linearer Raum über dem Matrixring der Ordnung p mit komplexen Elementen.

b) In der Menge H ist ein inneres Produkt mit den Eigenschaften (8) *definiert.*

c) H ist bezüglich der soeben eingeführten Konvergenz vollständig.

d) Für jede natürliche Zahl n gibt es n linear unabhängige Vektoren.

Satz 8. *Das skalare Produkt ist bezüglich der Normkonvergenz eine stetige Funktion.*

Ist nämlich $f_n \to f$, $g_n \to g$ so werden wir auf Grund der Relation

$$(f_n, g_n) - (f, g) = (f_n, g_n - g) + (f_n - f, g)$$

unseren Satz bewiesen haben, falls wir noch zeigen, dass

$$(f_n, g_n - g) \to 0, \quad (f_n - f, g) \to 0, \quad n \to \infty$$

ist. Wir betrachten zu diesem Zweck die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} (f_n, f_n) & (f_n, g_n - g) \\ (g_n - g, f_n) & (g_n - g, g_n - g) \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Ist entgegen unserer Behauptung $(f_n, g_n - g) \not\to 0$, so lässt sich leicht zeigen, daß bei genügend großem n die zur Matrix (18) gehörige quadratische Form auch negative Werte annehmen kann, was unserem Satz 1 widerspricht.

Unter der Fourierschen Reihe bezüglich des orthonormierten Systems $\varphi_k \in H$ $(k = 1, 2, \ldots)$ des Vektors $f \in H$ verstehen wir die Reihe

$$f \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \varphi_\nu,$$

wobei $\alpha_\nu = (f, \varphi_\nu)$ ist.

Es gelten die Identitäten

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \varphi_\nu, \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \varphi_\nu\right) = \left(f, \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \varphi_\nu\right) = \left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \varphi_\nu, f\right) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \alpha_\nu^*$$

und so ist

$$\left(f - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \varphi_\nu, f - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \varphi_\nu\right) = (f, f) - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \alpha_\nu^*. \tag{19}$$

Diese nichtnegativ definite Hermitesche Matrix ist nichts anderes, als die Besselsche Gleichung in H. Sagen wir, wie üblich, daß eine Hermitesche Matrix $\mathbf{A}$ nicht kleiner ist als die ebenfalls Hermitesche Matrix $\mathbf{B}$, wenn $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ eine nichtnegativ definite Hermitesche Matrix ist, so kann (19) auch in der Gestalt

$$0 \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \alpha_\nu^* \leqq (f, f),$$

bzw.

$$0 \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \alpha_\nu^* \leqq (f, f) \tag{20}$$

geschrieben werden, und diese beiden Formeln stellen die Besselsche Ungleichung in H dar. Steht rechts in (20) das Gleichheitszeichen, so erhalten wir die Parselvasche Formel.

Das orthonormierte System $\varphi_k \in H$ $(k = 1, 2, \ldots)$ nennen wir vollständig, wenn die Parsevalsche Gleichung für jeden Vektor $f \in H$ gilt.

Satz 9. *Ist das orthonormierte System $\varphi_k \in H$ $(k=1, 2, \ldots)$ vollständig und ist $g \in H$, dann gilt*

$$(f,g)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\beta_\nu^* \qquad \left(g \sim \sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu\varphi_\nu\right).$$

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus der Parsevalschen Gleichung auf die übliche Weise.

H_1 ist ein Unterraum von H, falls $H_1 \subset H$ ist und die Forderungen *a)—d)* auch in H_1 erfüllt sind.

Im folgenden definieren wir den Abstand eines Unterraumes $H_1 \subset H$ von einem Vektor. Besteht der Operatorbereich von H nur aus den skalaren Matrizes der Ordnung p, so gelangen wir in diesem Raum vom verallgemeinerten inneren Produkt zum inneren Produkt im gewöhnlichem Sinne, falls wir dieselbe auf die bekannte Weise durch $\langle f,g\rangle=\mathrm{Sp}\,(f,g)$ definieren. Definieren wir nun, auf Grund der sich daraus ergebenden Metrik, den Abstand der Elemente f und g von H durch

$$\varrho(f,g)=\sqrt{\mathrm{Sp}\,(f-g,f-g)},$$

so befriedigt dieser Abstandsbegriff auf natürliche Weise die dem Abstand gegenüber zu stellenden Forderungen. Mit Hilfe dieses Abstandsbegriffes können wir den Abstand von H_1 und f wie üblich durch den Ausdruck

$$\varrho(H_1,f)=\inf_{h\in H_1}\varrho(h,f)$$

definieren. Da H und so auch H_1 in der Konvergenz der aus dem inneren Produkt $\langle f,g\rangle$ stammenden Metrik vollständig ist, gibt es einen Vektor $h_1 \in H_1$ derart, dass

$$\varrho(H_1,f)=\varrho(h_1,f), \quad \langle h,f-h_1\rangle=0, \quad h\in H_1$$

gilt.

Satz 10. $(h,f-h_1)=\mathbf{0}$, $h\in H_1$.

Beweis. Es soll die Matrix $(h,f-h_1)$ von links mit einem solchen orthogonalen Matrix ω multipliziert werden, welche des Element mit den Indizes j,k in die Diagonale überführt, und dann mit einer diagonalen Matrix α, in deren Diagonale dort, wo in der Matrix $\omega(h,f-h_1)$ das Element mit Indizes j,k der Matrix $(h,f-h_1)$ steht, die Einheit steht, und an den übrigen Stellen die Null. Da nun $\alpha\omega h_1 \in H_1$ ist, gilt

$$\mathrm{Sp}\,\alpha\omega(h,f-h_1)=\mathrm{Sp}\,(\alpha\omega h_1,f-h_1)=\mathbf{0},$$

d. h. das Element mit Indizes j,k der Matrix $(h,f-h_1)$ ist gleich Null. Da dies aber ein beliebiges Element unserer Matrix ist, haben wir unseren Beweis bereits vollendet.

Es sei $h \in H_1$. Dann ist

$$(f-h, f-h) = ((f-h_1)+(h_1-h), (f-h_1)+(h_1-h)) =$$
$$= (f-h_1, f-h_1)+(f-h_1, h_1-h)+(h_1-h, f-h_1)+(h_1-h, h_1-h).$$

Es ist aber $h_1 - h \in H_1$, und so wegen Satz 10

$$(f-h_1, h_1-h) = (h_1-h, f-h_1) = \mathbf{0}$$

und folglich

$$\|f-h\|^2 = \|f-h_1\|^2 + \|h_1-h\|^2,$$

was nichts anderes ist, als der in unserem Raum gültige Pythagoreische Lehrsatz. Hieraus folgt

$$\|f-h\|^2 \geqq \|f-h_1\|^2,$$

wobei Gleichheit dann und nur dann gilt, wenn $h_1 = h$ ist.

Nach dem gesagten können wir nun die matriziale Entfernung eines Unterraumes von einem Vektor wie folgt definieren:

Unter dem Abstand des Unterraumes H_1 vom Vektor $f \in H$ verstehen wir die untere Grenze der Matrixmenge $\|f-h\|$ $(h \in H_1)$, wobei die Ungleichung zwischen Hermiteschen Matrizes auf die übliche Weise zu definieren ist.

Wir sagen, daß $g \in H$ auf den Unterraum H_1 orthogonal ist, falls g auf alle Vektoren von H_1 orthogonal ist.

Satz 11. *Jeder Vektor f von H läßt sich in der Gestalt $f = e + g$ darstellen, wobei $e \in H_1$ ist, und g auf H_1 orthogonal ist. Diese Darstellung ist eindeutig bestimmt.*

Die erste Behauptung ist auf Grund von Satz 10 klar, die zweite wiederum kann auf die übliche Weise bewiesen werden.

Satz 12. *In jedem Quasi-Hilbertschen Raum gibt es vollständige orthonormierte Systeme.*

Der Beweis stimmt wörtlich mit demjenigen überein, der in Handbüchern für den Fall $p = 1$ gegeben wird.

§ 3. Über die Matrixspur der verallgemeinerten Toeplitzschen Matrizes

1. Es bezeichne L die Gesamtheit der Matrizes der Ordnung p, deren Elemente auf der Menge Ω beschränkte und messbare Funktionen sind. Es bezeichne $\mathbf{0}$ die Matrix, deren sämtliche Elemente auf der Menge Ω fast überall verschwinden. Verstehen wir unter der Summe dieser Matrizes die gewöhnliche Matrixsumme, und unter der Multiplikation mit Matrizes aus M

die Matrixmultiplikation, so bildet L einen linearen Raum. Offenbar befriedigt der Ausdruck

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}(x)\mathbf{g}^*(x)\,dx, \quad \mathbf{f}(x) \in L, \quad \mathbf{g}(x) \in L$$

die Forderungen (8) bezüglich des verallgemeinerten inneren Produktes. Da, wie man leicht einsieht, auch $\mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x) \in L$ gilt, kommt zu den Eigenschaften (8) auch noch

$$(\mathbf{f}\mathbf{g}, \mathbf{h}) = (\mathbf{f}, \mathbf{h}\mathbf{g}^*) \tag{22}$$

hinzu.

Es sei $\{\omega_\nu(x)\}$ ein orthonormiertes vollständiges System in der Menge der auf Ω definierten beschränkten und messbaren Funktionen. Offenbar ist auch die Funktionenmatrixfolge $\{\omega_\nu(x)\mathbf{E}\}$ in L orthonormiert. Wir zeigen, dass sie auch vollständig ist. Ist nämlich

$$\mathbf{f}(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{a}_\nu \boldsymbol{\varphi}_\nu(x) \quad (\boldsymbol{\varphi}_\nu(x) = \omega_\nu(x)\,\mathbf{E})$$

und wird der n-te Abschnitt davon durch $\mathbf{s}_n(x)$ bezeichnet, so gilt nach (19)

$$\int_{\Omega} (\mathbf{f}(x) - \mathbf{s}_n(x))(\mathbf{f}(x) - \mathbf{s}_n(x))^*\,dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}(x)\mathbf{f}^*(x)\,dx - \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{a}_\nu \mathbf{a}_\nu^*. \tag{23}$$

Wegen $\mathbf{f}(x) \in L$ konvergiert die Spur der linken Seite von (23) für $n \to \infty$ gegen Null. Dann konvergiert aber wegen Satz 6. die auf der linken Seite, und folglich auch die auf der rechten Seite von (23) stehende Matrix gegen die Nullmatrix, d. h. die Parsevalsche Gleichung ist erfüllt.

Ist $\{\alpha_k(x)\}$ ein auf der Menge Ω definiertes, beschränktes und messbares linear unabhängiges Funktionensystem, so bildet offenbar auch $\{\alpha_k(x)\mathbf{E}\}$ eine linear unabhängige Funktionenmatrixfolge in L. Es ist aber leicht einzusehen, dass ausser dieser auf triviale Weise linear unabhängigen Matrixfolgen auch noch andere Folgen linear unabhängig sind, z. B. die durch

$$\mathbf{f}_k(x) = \begin{pmatrix} \omega^{(1)}_{(k-1)p+1}(x) & \cdots & \omega^{(p)}_{(k-1)p+1}(x) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \omega^{(1)}_{kp}(x) & \cdots & \omega^{(p)}_{kp}(x) \end{pmatrix} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

definierte Folge, falls $\omega^{(j)}_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ eine auf der Menge Ω linear unabhängige Funktionenfolge bildet. So ist die Funktionenmatrixfolge $x^{(k-1)p}\mathbf{f}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ auf der ganzen reellen Zahlengeraden linear unabhängig, falls hier

$$\mathbf{f}(x)=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x & \cdots & x \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ x^{p-1} & \cdots & x^{p-1} \end{pmatrix}, \quad \text{oder} \quad \mathbf{f}(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & \cdots & x^{p-1} \\ x^{p-1} & 1 & \cdots & x^{p-2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x & x^2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ist.

2. Es sei $\mathbf{f}(x) \in L$ und $\boldsymbol{\varphi}_k(x) \in L$ $(k=1,2,\ldots)$ ein vollständiges orthonormiertes System, ferner sei

$$\boldsymbol{\varphi}_k(x)\mathbf{f}(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{a}_\nu^k \boldsymbol{\varphi}_\nu(x) \qquad (k=1,2,\ldots),$$

wobei offenbar

$$\mathbf{a}_\nu^k = (\boldsymbol{\varphi}_k \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}_\nu)$$

sein soll.

Unter der durch die Funktionenmatrix $\mathbf{f}(x)$ *erzeugte Toeplitzsche Matrix verstehen wir die unendliche Matrix*

$$\mathbf{M}(\mathbf{f})=\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^1 & \mathbf{a}_2^1 & \mathbf{a}_3^1 & \cdots \\ \mathbf{a}_1^2 & \mathbf{a}_2^2 & \mathbf{a}_3^2 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix}$$

und unter dem n-ten Abschnitt derselben die Matrix

$$\mathbf{M}_n(\mathbf{f})=\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^1 & \mathbf{a}_2^1 & \cdots & \mathbf{a}_n^1 \\ \mathbf{a}_1^2 & \mathbf{a}_n^2 & \cdots & \mathbf{a}_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \mathbf{a}_1^n & \mathbf{a}_2^n & \cdots & \mathbf{a}_n^n \end{pmatrix}.$$

Es sei nunmehr $\mathbf{g}(x) \in L$,

$$\boldsymbol{\varphi}_k(x)\mathbf{g}(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{b}_\nu^k \boldsymbol{\varphi}_\nu(x),$$

ferner

$$\boldsymbol{\varphi}_k(x)\mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{c}_\nu^k \boldsymbol{\varphi}_\nu(x).$$

Da nach (22)

$$\mathbf{c}_l^k = (\boldsymbol{\varphi}_k \mathbf{f}\mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi}_l) = (\boldsymbol{\varphi}_k \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}_l \mathbf{g}^*)$$

ist, und da

$$(\boldsymbol{\varphi}_l \mathbf{g}^*, \boldsymbol{\varphi}_\nu) = (\boldsymbol{\varphi}_l, \boldsymbol{\varphi}_\nu \mathbf{g}) = (\boldsymbol{\varphi}_\nu \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi}_l)^* = (\mathbf{b}_l^\nu)^*$$

gilt, haben wir nach Satz 9

$$\mathbf{c}_l^k = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{a}_\nu^k \mathbf{b}_l^\nu \tag{24}$$

und folglich

$$\mathbf{M}(\mathbf{f}\mathbf{g}) = \mathbf{M}(\mathbf{f})\mathbf{M}(\mathbf{g}). \tag{25}$$

Diese Formel besagt auch, daß zwei unendliche Toeplitzsche Matrizes, die durch zwei zu L gehörigen Funktionenmatrizes erzeugt werden, immer ein Produkt besitzen. Die Multiplikation dieser Matrizes ist assoziativ. Ist nämlich $\mathbf{f}(x)\in L$, $\mathbf{g}(x)\in L$, $\mathbf{h}(x)\in L$, so haben wir auf Grund von (25)

$$(\mathbf{M}(\mathbf{f})\mathbf{M}(\mathbf{g}))\mathbf{M}(\mathbf{h})=\mathbf{M}(\mathbf{f}\mathbf{g})\mathbf{M}(\mathbf{h})=\mathbf{M}((\mathbf{f}\mathbf{g})\mathbf{h})=\mathbf{M}(\mathbf{f}(\mathbf{g}\mathbf{h}))=$$
$$=\mathbf{M}(\mathbf{f})\mathbf{M}(\mathbf{g}\mathbf{h})=\mathbf{M}(\mathbf{f})(\mathbf{M}(\mathbf{g})\mathbf{M}(\mathbf{h})).$$

Ist $\mathbf{f}(x)$ Hermitesch, so ist in Hinblick auf den Ausdruck

$$\int_{\Omega}\boldsymbol{\varphi}_k(x)\mathbf{f}(x)\boldsymbol{\varphi}_l^*(x)\,dx=\Big(\int_{\Omega}\boldsymbol{\varphi}_l(x)\mathbf{f}(x)\boldsymbol{\varphi}_k^*(x)\,dx\Big)^*,$$

offenbar auch $M_n(f)$ Hermitesch.

Unter der Matrixspur der Matrix $\mathbf{M}_n(\mathbf{f})$ *verstehen wir die Matrix*

$$\mathbf{S}\mathbf{M}_n(\mathbf{f})=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{a}_k^k. \tag{26}$$

Der Satz, der die matriziale Verallgemeinerung des in der Einleitung erwähnten Szegőschen Satzes als Spezialfall enthält, lautet nun wie folgt:

Satz 13. *Ist* $\mathbf{f}(x)\in L$ *und Hermitesch und gilt*

$$\inf \mathbf{z}\mathbf{f}(x)\mathbf{z}^*=m,\quad \sup \mathbf{z}\mathbf{f}(x)\mathbf{z}^*=M,\quad x\in\Omega.\quad \mathbf{z}\mathbf{z}^*=1,$$

so fällt der Wertevorrat von $\mathbf{M}_n(\mathbf{f})$ *zwischen* m *und* M. *Ist ferner* $F(\lambda)$ *eine im Intervall* $[m, M]$ *definierte stetige Funktion, und gilt für jede mit* $\mathbf{f}(x)$ *vertauschbare Hermitesche Funktionenmatrix* $\mathbf{g}(x)\in L$ *die Beziehung*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\mathbf{S}\mathbf{M}_n(\mathbf{f}\mathbf{g})-\mathbf{S}\mathbf{M}_n(\mathbf{f})\mathbf{M}_n(\mathbf{g})]=\mathbf{0}, \tag{27}$$

so ist

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\mathbf{S}\mathbf{M}_n(F(\mathbf{f}))-\mathbf{S}F(\mathbf{M}_n(\mathbf{f}))]=\mathbf{0}. \tag{28}$$

Die erste Behauptung des Satzes kann wie folgt bewiesen werden:

Es seien die Vektoren $\mathbf{z}_k$ $(k=1,\dots,n)$ solche Zeilenvektoren des p-dimensionalen Raumes, für welche $\sum_{k=1}^{n}\mathbf{z}_k\mathbf{z}_k^*=1$ gilt. Wir bilden die zur Matrix $\mathbf{M}_n(\mathbf{f})$ gehörende Hermitesche Form

$$H(\mathbf{M}_n(\mathbf{f}))=\sum_{k,l=1}^{n}\mathbf{z}_k\boldsymbol{\alpha}_l^k\mathbf{z}_l^*.$$

Da $\mathbf{f}(x)$ eine Hermitesche Funktionenmatrix ist, d. h. sich auf die Gestalt

$$\mathbf{f}(x)=\mathbf{U}(x)(\lambda_1(x),\dots,\lambda_p(x))\mathbf{U}^*(x),\quad \mathbf{U}(x)\mathbf{U}^*(x)=\mathbf{E}$$

bringen läßt, gilt

$$H(\mathbf{M}_n(\mathbf{f})) = \int_{\Omega} \mathbf{A}(x)(\lambda_1(x), \ldots, \lambda_p(x)\mathbf{A}^*(x))dx,$$

wobei

$$\mathbf{A}(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{z}_k \varphi_k(x)\right) \mathbf{U}(x)$$

für jedes x ein Vektor des p-dimensionalen Raumes ist. In Hinblick auf

$$\int_{\Omega} \mathbf{A}(x)\mathbf{A}^*(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{z}_k(\varphi_k, \varphi_k)\mathbf{z}_k^* = 1,$$

folgt nun

$$m \leqq H(\mathbf{M}_n(\mathbf{f})) \leqq M. \tag{29}$$

Ist $\mathbf{N}$ eine Normalmatrix, und bezeichnet λ ihren Eigenwert mit grösstem Absolutwert, so ist — wie man sich leicht überzeugt — $|\mathbf{N}| \leqq |\lambda| \mathbf{E}_1$, wobei $\mathbf{E}_1$ diejenige Matrix ist, deren sämtliche Elemente gleich der Einheit sind. Indem wir darauf Rücksicht nehmen, folgt aus (29) auch

$$\frac{1}{n} |\mathbf{S}\mathbf{M}_n(\mathbf{f})| \leqq K\mathbf{E}_1, \tag{30}$$

falls nur

$$\max(|m|, |M|) = K.$$

Um die zweite Behauptung unseres Satzes zu beweisen, gehen wir von der Bedingung (27) aus. Hieraus folgt sogleich:

Sind die $\mathbf{f}_\nu(x)$ $(\nu = 1, \ldots, k)$ meßbare, beschränkte und paarweise vertauschbare Hermitesche Funktionenmatrizes, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} [\mathbf{S}\mathbf{M}_n(\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_k) - \mathbf{S}\mathbf{M}_n(\mathbf{f}_1) \ldots \mathbf{M}_n(\mathbf{f}_k)] = \mathbf{0}.$$

Ist hier $\mathbf{f}_1(x) = \cdots = \mathbf{f}_k(x) = \mathbf{f}(x)$, so gilt unser Satz bereits für $F(\lambda) = \lambda^k$, und zugleich auch im Falle, wo $F(\lambda)$ ein beliebiges Polynom ist.

Nunmehr sei unseren Bedingungen gemäß $F(\lambda)$ eine im Intervall $[m, M]$ definierte stetige Funktion, und $P(\lambda)$ ein Polynom, für welches

$$|F(\lambda) - P(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad m \leqq \lambda \leqq M \tag{31}$$

gilt.

Es soll $\mathbf{M}_n(\mathbf{f})$ die Jordansche Normalform

$$\mathbf{M}_n(\mathbf{f}) = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}^*, \quad \mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{E} \tag{32}$$

haben, wobei die hier auftretenden Matrizes sich aus quadratischen Matrizes der Ordnung p gemäß der Formel

$$\boldsymbol{\Lambda} = (\boldsymbol{\Lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\Lambda}_n), \quad \mathbf{U} = (\mathbf{u}_{kl})$$

aufbauen lassen. — Aus (32) folgt

$$\mathbf{a}_k^k = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{u}_{k\nu} \mathbf{\Lambda}_\nu \mathbf{u}_{k\nu}^* . \tag{33}$$

Nehmen wir jetzt darauf Rücksicht, daß $\mathbf{u}_{k1}, \ldots, \mathbf{u}_{kn}$ die k-te Hypermatrixreihe der Matrix $\mathbf{U}$ ist, so ergibt sich

$$|\mathbf{a}_k^k| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} |\mathbf{u}_{k\nu} \mathbf{\Lambda}_\nu \mathbf{u}_{k\nu}^*| \leqq \max_{(k,l)} \lambda_{kl}^{(n)} \mathbf{E}_1, \tag{34}$$

wobei

$$\mathbf{\Lambda}_\nu = (\lambda_{\nu 1}^{(n)}, \ldots, \lambda_{\nu p}^{(n)}) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ist, und $\lambda_{kl}^{(n)}$ $(k = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, p)$ die Eigenwerte von $\mathbf{M}_n(\mathbf{f})$ bedeuten.

Auf Grund von (33) ist

$$\mathbf{S} F(\mathbf{M}_n(\mathbf{f})) = \sum_{k,\nu=1}^{n} \mathbf{u}_{k\nu} F(\mathbf{\Lambda}_\nu) \mathbf{u}_{k\nu}^*$$

und so gilt wegen (31) für jedes n die Beziehung

$$\mathbf{I}_1 = \frac{1}{n} |\mathbf{S} F(\mathbf{M}_n(\mathbf{f})) - \mathbf{S} P(\mathbf{M}_n(\mathbf{f}))| \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{n} \sum_{k,\nu=1}^{n} |\mathbf{u}_{k\nu}(F(\mathbf{\Lambda}_\nu) - P(\mathbf{\Lambda}_\nu)) \mathbf{u}_{k\nu}^*| < \frac{\varepsilon}{3} \mathbf{E}_1 .$$

Da

$$\mathbf{S}\mathbf{M}_n(F(\mathbf{f})) - \mathbf{S}\mathbf{M}_n(P(\mathbf{f})) = \mathbf{S}[\mathbf{M}_n(F(\mathbf{f})) - \mathbf{M}_n(P(\mathbf{f})) =$$
$$= \mathbf{S}\mathbf{M}_n(F(\mathbf{f}) - P(\mathbf{f}))$$

ist, gilt wegen (30) für jedes n die Beziehung

$$\mathbf{I}_2 = \frac{1}{n} |\mathbf{S}\mathbf{M}_n(F(\mathbf{f})) - \mathbf{S}\mathbf{M}_n(P(\mathbf{f}))| < \frac{\varepsilon}{3} \mathbf{E}_1 .$$

Indem wir endlich darauf Rücksicht nehmen, daß im Falle, wo $F(\lambda)$ ein Polynom ist, auch die zweite Behauptung unseres Satzes gilt, erhalten wir

$$\mathbf{I}_3 = \frac{1}{n} |\mathbf{S}\mathbf{M}_n(P(\mathbf{f})) - \mathbf{S} P(\mathbf{M}_n(\mathbf{f}))| < \frac{\varepsilon}{3} \mathbf{E}_1, \qquad n \geqq N(\varepsilon).$$

Auf Grund der gesagten ist nun

$$\frac{1}{n} |\mathbf{S}\mathbf{M}_n(F(\mathbf{f})) - \mathbf{S} F(\mathbf{M}_n(\mathbf{f}))| \leqq \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 < \varepsilon \mathbf{E}_1, \quad n \geqq N(\varepsilon),$$

womit wir auch die zweite Behauptung unseres Satzes bewiesen haben.

In Hinblick darauf, daß

$$\mathbf{S}\mathbf{M}_n(F(\mathbf{f})) = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\varphi}_k(x) F(\mathbf{f}(x)) \boldsymbol{\varphi}_k^*(x)\, dx$$

ist, können wir die Behauptung (28) unseres Satzes auch in der Form

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\mathbf{S} F(\mathbf{M}_n(\mathbf{t})) - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\varphi}_k(x) F(\mathbf{f}(x)) \boldsymbol{\varphi}_k^*(x)\, dx \right] = \mathbf{0} \tag{35}$$

schreiben. Ist auch noch

$$\varphi_k(x)\varphi_k^*(x) = \mathbf{E} \qquad (x \in \Omega,\ k = 1, 2, \ldots)$$

und ist jede $\varphi_k(x)$ mit $f(x)$ vertauschbar, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathbf{S} F(\mathbf{M}_n(\mathbf{f})) = \int_{\Omega} F(\mathbf{f}(x))\, dx. \tag{36}$$

3. Es sei nunmehr $\Omega = [-\pi, \pi]$, $\boldsymbol{\varphi}_{2\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\nu x}\mathbf{E}$, $\boldsymbol{\varphi}_{2\nu+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\nu x}\mathbf{E}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ und $\mathbf{f}(x)$ eine in diesem Intervall definierte beschränkte, meßbare, Hermitesche Matrix. Mittels einer gleichen Anzahl von Reihen- und Spaltenvertauschungen läßt sich $\mathbf{M}_{n+1}(\mathbf{f})$ in die Matrix

$$\mathbf{T}_n(f) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_{-1} & \mathbf{a}_0 & \cdots & \mathbf{a}_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \mathbf{a}_{-n} & \mathbf{a}_{-n+1} & \cdots & \mathbf{a}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{f}(x) e^{-i\nu x}\, dx \tag{37}$$

überführen. Also gibt es eine nur von n und von p abhängige orthogonale Matrix $\mathbf{O}$, für welche

$$\mathbf{O}\mathbf{M}_{n+1}(\mathbf{f})\mathbf{O}^* = \mathbf{T}_n(\mathbf{f})$$

gilt. Auf Grund von (37) ist es klar, daß

$$\mathbf{S}\mathbf{M}_{n+1}(\mathbf{f}) = \mathbf{S}\mathbf{T}_n(\mathbf{f}), \quad \mathbf{S}\mathbf{M}_{n+1}(\mathbf{f})\mathbf{M}_{n+1}(\mathbf{g}) = \mathbf{S}\mathbf{T}_n(\mathbf{f})\mathbf{T}_n(\mathbf{g}), \tag{38}$$
$$\mathbf{S}F(\mathbf{M}_{n+1}(\mathbf{f})) = \mathbf{S}F(\mathbf{T}_n(\mathbf{f}))$$

ist.

Jetzt beweisen wir den Satz, welcher eine matriziale Verallgemeinerung des in der Einleitung erwähnten Szegőschen Satzes und zugleich eines gleichfalls in der Einleitung formulierten Satzes des Verfassers darstellt.

Satz 14. *Ist $\mathbf{f}(x)$ eine im Intervall $[-\pi, \pi]$ definierte beschränkte messbare Hermitesche Funktionenmatrix, so fällt der Wertevorrat von $\mathbf{T}_n(\mathbf{f})$ zwischen m und M, falls nur*

$$m = \inf \mathbf{z}\mathbf{f}(x)\mathbf{z}^*, \quad M = \sup \mathbf{z}\mathbf{f}(x)\mathbf{z}^*, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad \mathbf{z}\mathbf{z}^* = 1$$

ist. Ist ferner $F(\lambda)$ eine im Intervall $[m, M]$ definierte stetige Funktion, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \mathbf{S}F(\mathbf{M}_n(\mathbf{f})) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\mathbf{f}(x))\, dx.$$

BEWEIS. Die erste Behauptung des Satzes folgt aus Satz 13. In Hinblick darauf, dass im gegenwärtigen Falle $\boldsymbol{\varphi}_k(x)\boldsymbol{\varphi}_k^*(x)=\frac{1}{2\pi}\mathbf{E}$ $(k=1,2,\ldots)$ ist und die Elemente von $\{\boldsymbol{\varphi}_k(x)\}$ mit $\mathbf{f}(x)$ vertauschbar sind, wird die zweite Hälfte unseres Satzes ebenfalls aus Satz 13, und zwar aus der speziellen Form (36) der zweiten Behauptung des Satzes folgen, falls wir nur das Erfülltsein von (27) zeigen können. Die Gültigkeit dieser letzteren Relation ergibt sich nun auf Grund von (38) aus der folgenden, auch an sich selbst interessanten Tatsache:

Lemma. *Falls* $\mathbf{f}(x)$ *und* $\mathbf{g}(x)$ *beschränkte, meßbare Hermitesche Funktionenmatrizes sind, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}[\mathbf{S}\mathbf{T}_n(\mathbf{fg})-\mathbf{S}\mathbf{T}_n(\mathbf{f})\mathbf{T}_n(\mathbf{g})]=\mathbf{0}.$$

Ist nämlich

$$\mathbf{a}_\nu=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{f}(x)e^{-i\nu x}dx,\quad \mathbf{b}_\nu=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{g}(x)e^{-i\nu x}dx, \tag{39}$$

$$\mathbf{c}_\nu=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{f}(x\}\mathbf{g}(x)e^{-i\nu x}dx,\qquad (\nu=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$$

so gilt auf Grund von (24)

$$\mathbf{c}_\nu=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathbf{a}_k\mathbf{b}_{\nu-k}. \tag{40}$$

Nach (39) und nach (40) ist nun

$$\mathbf{S}\mathbf{T}_n(\mathbf{fg})-\mathbf{S}\mathbf{T}_n(\mathbf{f})\mathbf{T}_n(\mathbf{g})=(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_{-1}+\mathbf{a}_{-1}\mathbf{b}_1)+2(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_{-2}+\mathbf{a}_{-2}\mathbf{b}_2)+$$
$$+\cdots+n(\mathbf{a}_n\mathbf{b}_{-n}+\mathbf{a}_{-n}\mathbf{b}_n)+(n+1)\sum_{k=n+1}^{\infty}(\mathbf{a}_k\mathbf{b}_{-k}+\mathbf{a}_{-k}\mathbf{b}_k).$$

Da $\mathbf{f}(x)$ und $\mathbf{g}(x)$ meßbar, beschränkt und Hermitesch sind, und da $\{e^{i\nu x}\mathbf{E}\}$ im Intervall $[-\pi,\pi]$ ein vollständiges orthonormiertes System bildet, gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x)dx=\mathbf{a}_0\mathbf{b}_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\mathbf{a}_k\mathbf{b}_{-k}+\mathbf{a}_{-k}\mathbf{b}_k)$$

und folglich

$$\left|\sum_{k=\nu}^{\infty}(\mathbf{a}_k\mathbf{b}_{-k}+\mathbf{a}_{-k}\mathbf{b}_k)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\mathbf{E}_1,\quad \nu\geqq N(\varepsilon). \tag{41}$$

Es sei nunmehr ν_0 eine der Bedingung $\nu_0\geqq N(\varepsilon)$ genügende festgewählte natürliche Zahl, und es soll n so gewählt werden, dass $n > \nu_0$ ist. Nach (35) ist dann

$$\frac{1}{n+1}|\mathbf{S}\mathbf{T}_n(\mathbf{f}\mathbf{g}) - \mathbf{S}\mathbf{T}_n(\mathbf{f})\mathbf{T}_n(\mathbf{g})| \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{n+1}|(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_{-1} + \mathbf{a}_{-1}\mathbf{b}_1) + \cdots + \nu_0(\mathbf{a}_{\nu_0}\mathbf{b}_{-\nu_0} + \mathbf{a}_{-\nu_0}\mathbf{b}_{\nu_0})| +$$
$$+ \frac{1}{n+1}|(\nu_0+1)(\mathbf{a}_{\nu_0+1}\mathbf{b}_{-(\nu_0+1)} + \mathbf{a}_{-(\nu_0+1)}\mathbf{b}_{\nu_0+1}) + \cdots + n(\mathbf{a}_n\mathbf{b}_{-n} + \mathbf{a}_{-n}\mathbf{b}_n) +$$
$$+ (n+1)\sum_{k=n+1}^{\infty}(\mathbf{a}_k\mathbf{b}_{-k} + \mathbf{a}_{-k}\mathbf{b}_k)|.$$

Wählen wir nun n so, daß sie der Bedingung $n > N(\varepsilon)$ genügt und groß genug ist, so kann das erste Glied auf der rechten Seite unserer Ungleichung kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}\mathbf{E}_1$ gemacht werden, und das zweite Glied ist nach (41) wiederum kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}\mathbf{E}_1$. So ist tatsächlich

$$\frac{1}{n+1}|\mathbf{S}\mathbf{T}_n(\mathbf{f}\mathbf{g}) - \mathbf{S}\mathbf{T}_n(\mathbf{f})\mathbf{T}_n(\mathbf{g})| < \varepsilon\mathbf{E}_1, \qquad n > N(\varepsilon).$$

§ 4. Über die Spur im gewöhnlichen Sinne der verallgemeinerten Toeplitzschen Matrizes

1. Bezeichnen wir die Spur im gewöhnlichen Sinne mit Sp, so ist auf Grund von (26)

(42) $$\operatorname{Sp}\mathbf{M}_n(\mathbf{f}) = \operatorname{Sp}\mathbf{S}\mathbf{M}_n(\mathbf{f}).$$

Verwenden wir dies im Zusammenhang mit Satz 13, so erhalten wir den folgenden

Satz 15. *Ist* $\mathbf{f}(x)$ *eine meßbare, beschränkte Hermitesche Funktionenmatrix auf der Menge* Ω, *und ist*

$$m = \inf \mathbf{z}\mathbf{f}(x)\mathbf{z}^*, \quad M = \sup \mathbf{z}\mathbf{f}(x)\mathbf{z}^*, \quad x \in \Omega, \quad \mathbf{z}\mathbf{z}^* = 1,$$

so fallen die Eigenwerte von $\mathbf{M}_n(\mathbf{f})$ *zwischen* m *und* M. *Ist noch* $F(\lambda)$ *eine im Intervall* $[m, M]$ *definierte stetige Funktion, und gilt für jede gleichfalls messbare, beschränkte, mit* $\mathbf{f}(x)$ *vertauschbare Hermitesche Funktionenmatrix* $\mathbf{g}(x)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\operatorname{Sp}\mathbf{M}_n(\mathbf{f}\mathbf{g}) - \operatorname{Sp}\mathbf{M}_n(\mathbf{f})\mathbf{M}_n(\mathbf{g})] = 0,$$

so ist

(43) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\operatorname{Sp}\mathbf{M}_n(F(\mathbf{f})) - \operatorname{Sp}F(\mathbf{M}_n(\mathbf{f}))] = 0.$$

Dies ist wiederum offenbar eine Verallgemeinerung des Satzes von SZEGŐ, bzw. des in der Einleitung erwähnten Satzes des Verfassers.

Werden die Eigenwerte von $\mathbf{M}_n(\mathbf{f})$ durch $\lambda_k^{(n)}$ $(k=1,\ldots,np)$, die Eigenwerte von $\mathbf{f}(x)$ hingegen mit $\lambda_1(x),\ldots,\lambda_p(x)$ bezeichnet, so tritt an Stelle von (43) auf Grund von (35) bzw. (36) die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{np}F(\lambda_k^{(n)})-\mathrm{Sp}\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{\varphi}_k(x)F(\mathbf{f}(x))\boldsymbol{\varphi}_k^*(x)\,dx\right]=0,$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{np}F(\lambda_k^{(n)})=\int_{\Omega}[F(\lambda_1(x))+\cdots+F(\lambda_p(x))]\,dx$$

und falls wir die Funktionen $\lambda_1(x),\ldots,\lambda_p(x)$ meßbar wählen, so tritt an Stelle der letzten Formel

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{np}F(\lambda_k^{(n)})=\sum_{l=1}^{p}\int_{\Omega}F(\lambda_l(x))\,dx.$$

Wenden wir aber die Gleichheit (42) im Zusammenhang mit Satz 14. an, so erhalten wir den in der Einleitung formulierten Satz des Verfasse rs, falls die stetigen Funktionenmatrizes durch messbare und beschränkte Funktionenmatrizes ersetzt werden.

Satz 16. *Ist $\mathbf{f}(x)$ eine im Intervall $[-\pi,\pi]$ definierte beschränkte messbare Hermitesche Funktionenmatrix, so fallen sämtliche Eigenwerte der Matrix $\mathbf{T}_n(\mathbf{f})$ zwischen m und M, insofern*

$$m=\inf\mathbf{z}\mathbf{f}(x)\mathbf{z}^*,\quad M=\sup\mathbf{z}\mathbf{f}(x)\mathbf{z}^*,\quad x\in-[\pi,\pi],\quad \mathbf{z}\mathbf{z}^*=1$$

ist. Ist ferner $F(\lambda)$ eine im Intervall $[m,M]$ definierte stetige Funktion und sind $\lambda_k^{(n)}$ $(k=1,\ldots,(n+1)p)$ die Eigenwerte von $\mathbf{T}_n(\mathbf{f})$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{(n+1)p}F(\lambda_k^{(n)})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[F(\lambda_1(x))+\cdots+F(\lambda_p(x))]\,dx. \tag{44}$$

Wählen wir die Funktionen $\lambda_1(x),\ldots,\lambda_p(x)$ auch noch meßbar, so ist

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{(n+1)p}F(\lambda_k^{(n)})=\sum_{l=1}^{p}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(\lambda_l(x))\,dx.$$

Vom Satz 16. ausgehend erhalten wir den

Satz 17. *Es sei* $\mathbf{f}(x)$ *eine den Bedingungen von Satz 16 genügende Funktionenmatrix, und* $\alpha<\beta$ *seien reelle Konstanten. Ist*

$$\operatorname{mes}\{x:\alpha<\lambda_k(x)<\beta\ (k=1,\ldots,p)\}>0,$$

so fällt bei genügend grossem Index n mindestens einer der Eigenwerte von $\mathbf{T}_n(\mathbf{f})$ *in das Intervall* $[\alpha,\beta]$.

Diesen Satz hat für den Fall $p=1$ G. Szegő bewiesen. Sein Beweis läßt sich auch auf diesem allgemeineren Fall wörtlich übertragen ([6], 216—217).

Aus diesem Satz ergibt sich das

Korollar 1. *Ist* $\lambda_\alpha^{(n)}$ *bzw.* $\lambda_\omega^{(n)}$ *der kleinste bzw. der grösste Eigenwert der Matrix* $\mathbf{T}_n(\mathbf{f})$, *und sind die Eigenwerte von* $\mathbf{f}(x)$ *in nicht abnehmender Reihenfolge geordnet* $\lambda_1(x),\ldots,\lambda_p(x)$ *und gilt*

$$\inf\lambda_k(x)=m_k,\quad \sup\lambda_k(x)=M_k,\quad x\in[-\pi,\pi],\quad (k=1,\ldots,p),$$

so ist

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_\alpha^{(n)}=m_1,\quad \lim_{n\to\infty}\lambda_\omega^{(n)}=M_p.$$

Gleichfalls aus Satz 17 ergibt sich das

Korollar 2. *Ist* $\mathbf{f}(x)$ *eine im Intervall* $[-\pi,\pi]$ *stetige Funktionenmatrix, deren in nichtabnehmende Reihenfolge geordneten Eigenwerte in diesem Falle ebenfalls stetig sind, so füllen die Eigenwerte der Matrizes* $\mathbf{T}_n(\mathbf{f})$ $(n=0,1,\ldots)$ *die Intervalle* $[m_k, M_k]$ *überall dicht aus.*

Es sei im Satz 16 $m>0$, dann ist $F(\lambda)=\log\lambda$ eine im Intervall $[m,M]$ stetige Funktion Bezeichnen wir die Determinante der Matrix $\mathbf{T}_n(\mathbf{f})$ mit $D_n(\mathbf{f})$, so gilt auf Grund von (44) der

Satz 18. *Ist* $\mathbf{f}(x)$ *eine im Intervall* $[-\pi,\pi]$ *beschränkte, meßbare, den Bedingungen*

$$\mathbf{z}f(x)\mathbf{z}^*\geqq m>0,\quad x\in[-\pi,\pi],\quad zz^*=1$$

genügende positiv definite Hermitesche Funktionenmatrix, so ist

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{D_n(\mathbf{f})}=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\operatorname{Det}\mathbf{f}(x)\,dx\right\}.$$

Wir bemerken, daß ebenso wie bei Szegő im Falle $p=1$, auch in unserem allgemeineren Falle Satz 16 aus Satz 18 folgt.

Gehen wir nämlich von den Bedingungen des Satzes 16 aus. Ist α eine der Ungleichung $0<\alpha<\dfrac{1}{\sigma}$ genügende Zahl, wobei $\dfrac{\sigma}{p}=\max(|m|,|M|)$ und $g(x)=\mathbf{E}+\alpha\mathbf{f}(x)$ ist, so ist $\mathbf{g}(x)$ eine im Intervall $[-\pi,\pi]$ beschränkte, meßbare, positiv definite Funktionenmatrix, deren Wertevorrat eine positive Zahl zur unteren Grenze hat. Somit gilt nach Satz 18 der Ausdruck

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{(n+1)p}\log\left(1+\alpha\lambda_k^{(n)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\log\left(1+\alpha\lambda_1(x)\right)+\cdots+\log\left(1+\alpha\lambda_p(x)\right)\right]dx.$$

Der weitere Verlauf des Beweises stimmt wörtlich mit dem von G. SZEGŐ für den Fall $p=1$ gegebenen Beweis überein ([6] § 1).

Literatur

[1] U. GRENANDER, A contribution to the theory of Toeplitz matrices. *Trans. Amer. Math. Soc.* **79** (1955), 124–140.

[2] U. GRENANDER–G. SZEGŐ, Toeplitz forms and their applications. *Berkeley and Los Angeles,* 1958.

[3] B. GYIRES, Eigenwerte verallgemeinerter Toeplitzscher Matrizen. *Publ. Math., Debrecen* **4** (1956), 171–179.

[4] B. GYIRES, Valós függvénymatrixokhoz tartozó Toeplitz-féle determinánsokról. *Acta Univ. Debreceniessis* **V** (1958), 165–202.

[5] G. SZEGŐ, Ein Grenzwertsatz über die Toeplitzschen Determinanten einer reellen positiven Funktion. *Math. Ann.* **76** (1915), 490–503.

[6] G. SZEGŐ, A Toeplitz-féle formákról. *Math. Termtud. Értesitő* **35** (1917), 185–222.

[7] G. SZEGŐ, Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen. *Math. Z.* **6** (1920), 167–202, **9** (1921), 167–190.

(Eingegangen am 20. Dezember 1959.)