Über die konform-kovariante Ableitung der Vektoren

Von ARTHUR MOÓR (Szeged)

1. Einleitung. In einem Riemannschen Raum mit dem metrischen Fundamentaltensor $g_{ik}(x)$ wird eine Transformation der Metrik von der Form

$$\tilde{g}_{ik} = e^{2\sigma} g_{ik}, \qquad \sigma = \sigma(x^1, x^2, \ldots, x^n) \tag{1. 1}$$

eine konforme Transformation genannt.[1]) Genügt ein Tensor T nach einer konformen Transformation (1. 1) der Transformationsformel

$$\tilde{T} = e^{h\sigma} T,$$

so nennt man T einen relativ-konformen Tensor vom Gewicht: h (vgl. [1]).

Im folgenden wollen wir die konform-kovariante Ableitung der Vektoren mit Hilfe der Theorie der geometrischen Objekte, bzw. der Funktionalgleichungen bestimmen. Unter einer kovarianten Ableitung der Vektoren verstehen wir eine Ableitung die den folgenden Forderungen genügt (vgl. [2]):

A) *Die kovariante Ableitung eines kontra- bzw. eines kovarianten Vektors soll ein gemischter bzw. rein kovarianter Tensor zweiter Stufe sein;*

B) *Die kovariante Ableitung des kontravarianten Vektors v^i bzw. des kovarianten Vektors w_i soll von v^i, $\partial_k v^i$ bzw. w_i, $\partial_k w_i$ und außerdem vom Hilfsobjekt g_{ij} und seinen Derivierten $\partial_k g_{ij}$ abhängig sein, wo g_{ij} einen in i, j symmetrischen Tensor darstellt;*

C) *Die kovariante Ableitung des kontra- bzw. kovarianten Vektors v^i bzw. w_i soll eine in den Veränderlichen $v^i, \partial_k v^i, \partial_k g_{ij}$ bzw. $w_i, \partial_k w_i, \partial_h g_{ij}$ stetige Funktion sein. In den Veränderlichen g_{ij} fordern wir dagegen die Stetigkeit nur bei solchen Wertsystemen g_{ij} für die*

$$\operatorname{Det}(g_{ij}) \neq 0$$

besteht.

Für eine konform-invariante Ableitung stellen wir außerdem noch die zusätzliche Forderung:

---

1) Im folgenden werden wir die konformen Transformierten immer durch die Wellenlinie: „~" bezeichnen.

F) *Die kovariante Ableitung eines relativ-konformen kontra-, bzw. kovarianten Vektors vom Gewicht h ist ein gemischter bzw. rein kovarianter Tensor zweiter Stufe, der auch relativ-konform vom Gewicht h ist.*

Die Form der konform-invarianten Ableitung werden wir dadurch bestimmen, daß wir den Zusammenhang der Komponenten der vorkommenden Größen in verschiedenen Koordinatensystemen angeben. Die verschiedenen Koordinatensysteme sind miteinander durch zulässige Koordinatentransformationen verknüpft. Wir wollen jetzt und im folgenden unter einer zulässigen Koordinatentransformation eine solche Transformation

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^n) \tag{1.2}$$

der Koordinaten verstehen, deren Funktionen mindestens zweimal stetig differenzierbar sind, und von Null verschiedene Jacobische Determinante bestimmen.

Konform-kovariante Ableitung und konform-invariante Übertragungsparameter bezüglich solcher Koordinatentransformationen, deren Jacobische Determinanten konstant sind, haben J. M. THOMAS und T. Y. THOMAS bestimmt (vgl. [4], [5], [6]).

2. Konform-invariante Übertragungsparameter. Da aus den g_{ik} außer den Christoffelschen Symbolen keine weitere Übertragungsparameter gebildet werden können [2], so müssen wir neben g_{ik} noch eine weitere Hilfsgröße voraussetzen und zwar ein Vektorfeld $a_k(x)$. Dieses Vektorfeld wird aber *kein* relativ-konformes Vektorfeld sein. Wir setzen voraus, daß die Transformation $a_k \to \tilde{a}_k$ die folgende Gestalt hat:

$$\tilde{a}_k = \Phi_k(a_b, \sigma_c), \qquad \sigma_c \overset{\text{def}}{=} \partial_c \sigma, \tag{2.1}$$

und außerdem daß *die Gleichungen*

$$\Phi_k(a_b, \sigma_c) = 0 \tag{2.2}$$

bezüglich σ_k *auflösbar sind.*

Satz 1. *Die allgemeinsten konform-invarianten Übertragungsparameter* $\Lambda_i{}^j{}_k$ *die aus* $\Gamma_i{}^j{}_k$ *und* a_k *gebildet werden können, haben die Form*

$$\Lambda_i{}^j{}_k = \Gamma_i{}^j{}_k + \mathfrak{G}^{jt}_{ik} b_t, \tag{2.3}$$

$$\Gamma_i{}^j{}_k \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} g^{rj}(\partial_k g_{ir} + \partial_i g_{kr} - \partial_r g_{ik}),$$

wo

$$\mathfrak{G}^{jt}_{ik} \overset{\text{def}}{=} \delta^j_i \delta^t_k + \delta^j_k \delta^t_i - g_{ik} g^{jt} \qquad (\delta^j_i : \text{Kronecker-}\delta) \tag{2.3a}$$

und

$$b_k = \varrho(x) a_k \tag{2.3b}$$

ist. $\mathfrak{G}_{i\,k}^{j\,t}$ *ist gegenüber den Transformationen* (1. 1) *invariant,* $\varrho(x)$ *ist ein skalarer Faktor, dagegen unterliegt* a_k *bzw.* b_k *der Transformation*

$$\tilde{a}_k = a_k - \frac{1}{\varrho}\sigma_k \quad bzw. \quad \tilde{b}_k = b_k - \sigma_k. \tag{2. 4}$$

BEWEIS. Nach der Annahme des Satzes sind die $\Lambda_i{}^j{}_k$ Funktionen von $\Gamma_i{}^j{}_k$ und a_k, d. h.:

$$\Lambda_i{}^j{}_k = F^{*}_i{}^j{}_k(\Gamma_a{}^b{}_c, a_b).$$

Außerdem müssen die $\Lambda_i{}^j{}_k$ in Bezug auf eine zulässige Koordinatentransformation (1. 2) denselben Transformationsformeln, wie die $\Gamma_i{}^j{}_k$ genügen, da die $\Lambda_i{}^j{}_k$ bezüglich (1. 2) affine Übertragungsparameter sind.

Nach einer konformen Transformation (1. 1) det Metrik wird die Transformierte von $\Lambda_i{}^j{}_k$ die Form:

$$\tilde{\Lambda}_i{}^j{}_k = F^{*}_i{}^j{}_k(\tilde{\Gamma}_a{}^b{}_c, \tilde{a}_b) \tag{2. 5}$$

haben, da die $\tilde{\Lambda}_i{}^j{}_k$ offenbar dadurch entstehen, daß man in die Funktionen $F^{*}_i{}^j{}_k$ statt $\Gamma_i{}^j{}_k$ und a_k die Veränderlichen $\tilde{\Gamma}_a{}^b{}_c$ und $\tilde{a}_b$ substitutiert. Beachten wir jetzt, daß auf Grund der Definitionsformel

$$\Gamma_i{}^j{}_k \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} g^{jr}(\partial_k g_{ir} + \partial_i g_{kr} - \partial_r g_{ik})$$

für $\tilde{\Gamma}_i{}^j{}_k$ die Relation

$$\tilde{\Gamma}_i{}^j{}_k = \Gamma_i{}^j{}_k + \mathfrak{G}_{i\,k}^{j\,t}\sigma_t, \qquad \sigma_t \overset{\text{def}}{=} \partial_t \sigma \tag{2. 6}$$

besteht, weiter, daß $\Lambda_i{}^j{}_k$ konform-invariant d. h.

$$\tilde{\Lambda}_i{}^j{}_k = \Lambda_i{}^j{}_k \tag{2. 7}$$

sein soll, so bekommt man aus (2. 5) und (2. 1) für die Funktionen $F^{*}_i{}^j{}_k$ das Funktionalgleichungssystem:

$$F^{*}_i{}^j{}_k(\Gamma_a{}^b{}_c + \mathfrak{G}_{a\,c}^{b\,s}\sigma_s,\ \Phi_b(a_r, \sigma_t)) = F^{*}_i{}^j{}_k(\Gamma_a{}^b{}_c, a_b), \tag{2. 8}$$

das für jeden Wert von σ_s bestehen muß. In einem Punkte $\underset{(0)}{x^i}$ können nämlich die Werte $\sigma_s(\underset{(0)}{x^i})$ beliebig vorgeschrieben werden.

Wir haben vorausgesetzt, daß die Gleichung (2. 2) in σ_k lösbar ist:

$$\sigma_k = \psi_k(a_j),$$

σ_k ist also eine Komitante des Vektors a_k. Sie ist folglich auf Grund des Satzes 1 von [3] von der Form

$$\sigma_k = \varrho(x) a_k, \tag{2. 9}$$

wo $\varrho(x)$ ein Skalarfeld ist.

Wird (2. 9) in (2. 8) eingesetzt, so bekommen wir:

$$\Lambda_i{}^j{}_k \equiv \overset{*}{F}_i{}^j{}_k(\Gamma_a{}^b{}_c, a_b) = F_i{}^j{}_k(\Gamma_a{}^b{}_c + \varrho\, \mathfrak{G}_a{}^{bt}_c\, a_t), \tag{2. 10}$$

wo die Funktionen $F_i{}^j{}_k$

$$F_i{}^j{}_k(X_a{}^b{}_c) \overset{\text{def}}{=} \overset{*}{F}_i{}^j{}_k(X_a{}^b{}_c, 0)$$

bedeuten.

Führen wir nun die Bezeichung

$$\Pi_i{}^j{}_k \overset{\text{def}}{=} \Gamma_i{}^j{}_k + \varrho\, \mathfrak{G}_i{}^{jt}_k\, a_t \tag{2. 11}$$

ein, so drückt (2. 10) aus, daß $\Lambda_i{}^j{}_k$ ein allein aus $\Pi_a{}^b{}_c$ bestimmter symmetrischer Übertragungsparameter ist. Wir zeigen jetzt, daß aus $\Pi_i{}^j{}_k$ außer den $\Pi_i{}^j{}_k$ selbst, keine weitere symmetrische Übertragungsparameter gebildet werden können, daß also $F_i{}^j{}_k(X_a{}^b{}_c) = X_i{}^j{}_k$ ist.

Von den Formeln (2. 10) und (2. 11) bekommt man nach einer zulässigen Koordinatentransformation die Gleichungen

$$F_i{}^j{}_k(A^r_a \bar{A}^b_s A^t_c \Pi_r{}^s{}_t + A^r_{ac} \bar{A}^b_r) = F_r{}^s{}_t(\Pi_a{}^b{}_c) A^r_i \bar{A}^j_s A^t_k + A^r_{ik} \bar{A}^j_r, \tag{2. 12}$$

wo

$$A^r_a \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^a}, \quad \bar{A}^b_s \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^s}, \quad A^r_{ik} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^i\, \partial \bar{x}^k}$$

gesetzt wird, da die $\Pi_a{}^b{}_c$ und die $F_i{}^j{}_k$ nach unserer Annahme Übertragungsparameter sind. In einem beliebigen Punkte $\underset{(0)}{x^i}$ können die A^r_a und die A^r_{ik} beliebig gewählt werden. Setzen wir also in der Gleichung (2. 12)

$$A^r_a = \delta^r_a, \quad A^r_{ab} = -\Pi_a{}^r{}_b,$$

was wegen der Symmetrie von A^r_{ab} und $\Pi_a{}^r{}_b$ in den Indizes a, b erlaubt ist, so wird wegen

$$A^t_a \bar{A}^b_t = \delta^b_a$$

auch $\bar{A}^b_r = \delta^b_r$ bestehen, und aus (2. 12) wird:

$$F_i{}^j{}_k(\Pi_a{}^b{}_c) = F_i{}^j{}_k(0) + \Pi_i{}^j{}_k.$$

Da $F_i{}^j{}_k$ und $\Pi_i{}^j{}_k$ dieselbe Transformationsformel haben — beide sind nämlich Übertragungsparameter — müssen die Konstanten $F_i{}^j{}_k(0)$ einen Tensor bilden. Dies ist aber nur im Falle $F_i{}^j{}_k(0) = 0$ möglich. Widrigenfalls müßte nämlich nach einer zulässigen Koordinatentransformation

$$F_i{}^j{}_k(0) = F_r{}^s{}_t(0) A^r_i \bar{A}^j_s A^t_k$$

bestehen, woraus nach der Substitution $A^r_i = x\,\delta^r_i$ die gewünschte Relation $F_i{}^j{}_k(0) \equiv 0$ schon leicht gefolgert werden könnte.

Es ist also

$$F_{i\ k}^{\ j}(\Pi_{a\ c}^{\ b}) = \Pi_{i\ k}^{\ j}$$

und somit erhält man aus (2.10) und (2.11)

$$\Lambda_{i\ k}^{\ j} = \Gamma_{i\ k}^{\ j} + \varrho\, \mathfrak{G}_{i\,k}^{j\,t} a_t. \tag{2.13}$$

Wir sind jetzt schon imstande, die explizite Transformationsformel (2. 1) zu bestimmen. Nach (2. 1), (2. 6) und (2. 13) bekommt man — da $\mathfrak{G}_{i\,k}^{j\,t}$ gegenüber konformer Transformation invariant ist — aus (2. 7) die Relation:

$$\mathfrak{G}_{i\,k}^{j\,t}(\sigma_t + \varrho\, \Phi_t - \varrho\, a_t) = 0.$$

Eine Verjüngung auf i, j gibt nach (2. 3a):

$$\Phi_k = a_k - \frac{1}{\varrho}\sigma_k. \tag{2.14}$$

Aus (2. 1) und (2. 14) bekommt man somit nach der Bezeichnung

$$b_k \overset{\text{def}}{=} \varrho\, a_k$$

eben die Transformationsformel (2. 4); die Formel (2. 13) geht somit in die Formel (2. 3) über. Das beweist unseren Satz.

Die durch (2 3) angegebenen konforminvarianten Übertragungsparameter benützte R. S. CLARK für die Bestimmung einer konform-kovarianten Ableitung in allgemeinen metrischen Räumen. In diesen Räumen war die Konstruktion eines Vektors b_k (vgl. [1]; unser b_k bezeichnete R. S. CLARK mit α_k) von den Grundelementen des Raumes möglich.

In den Riemannschen Räumen verschwindet aber der CLARKsche Vektor α_k und deswegen haben wir die Existenz eines von g_{ij} unabhängigen Vektorfeldes a_k voraussetzen müssen.

Wir können in einem Riemann—Raum das Objekt

$$\alpha_k = -\frac{1}{n}\partial_k \log\sqrt{g}, \qquad g \overset{\text{def}}{=} \det(g_{ij}) \tag{2.15}$$

als eine Komitante des Grundtensors g_{ij} ableiten. α_k ist aber im allgemeinen kein Vektor, sondern ein Objekt zweiter Klasse mit der Transformationsformel

$$\overline{\alpha}_k = A_k^r \alpha_r - \frac{1}{n}\partial_{\bar{k}} \log \Delta, \qquad \Delta \overset{\text{def}}{=} \det(A_k^i). \tag{2.16}$$

Die durch

$$\Omega_{i\ k}^{\ j} \overset{\text{def}}{=} \Gamma_{i\ k}^{\ j} + \mathfrak{G}_{i\,k}^{j\,t}\alpha_t \tag{2.17}$$

bestimmten Parameter (die sogenannten Parameter von T. Y. THOMAS) sind zwar konform-invariant, ihre Transformationsformel lautet aber

$$\begin{aligned}\overline{\Omega}_i{}^j{}_k = \Omega_r{}^s{}_t\, A_i^r\, \overline{A}_s^j\, A_k^t + A_{ik}^r\, \overline{A}_r^j - \\ - \frac{1}{n}(\delta_i^j\, \partial_{\bar{k}} \log \Delta + \delta_k^j\, \partial_{\bar{i}} \log \Delta - \overline{g}_{ik}\, \overline{g}^{jq}\, \partial_q \log \Delta),\end{aligned} \tag{2.18}$$

ist also verschieden von der Transformationsformel der Parameter einer linearen Übertragung. Man sieht leicht, daß für die Untergruppe der Koordinatentransformationen

$$\Delta = Konst.$$

die Transformationsformel (2. 18) in die der linearen Übertragung übergeht, und nur in diesem Spezialfalle ist es erlaubt das Feld a_k nicht extra angeben, sondern es ist automatisch aus den g_{ij} ableitbar.

BEMERKUNG. Existiert im Riemannschen Raume außer dem metrischen Grundtensor g_{ik} noch ein von der konformen Transformation (1. 1) unabhängiges Vektorfeld $Y^i(x)$ als Grundgröße des Raumes, so wird nach (1. 1) $\tilde{Y} = e^{\sigma} Y$, wenn

$$Y \overset{\text{def}}{=} \sqrt{g_{ik} Y^i Y^k}$$

die Länge des Vektors Y^i ist. Offenbar besteht dann für den Vektor

$$b_k \overset{\text{def}}{=} -\partial_k \log Y$$

die konforme Transformationsformel (2. 4).

3. Die konform-kovariante Ableitung. In der Arbeit [2] haben wir gezeigt, daß die Forderungen A)—C) die kovariante Ableitung derart bestimmen daß die Ableitungen $\partial_k g_{ij}$ nur in den Christoffelschen Symbolen vorkommen. Nun stellen wir die folgende Bedingung:

G) *Die konform-kovariante Ableitung $\delta_k v^i$ ist von den g_{ik} nur durch die $\Gamma_i{}^j{}_k$ abhängig, und außer den $\Gamma_i{}^j{}_k$ kommt in der Formel von $\delta_k v^i$ noch eine Hilfsgröße b_k mit dem Transformationsgesetz* (2. 4) *vor.*

Vor der Untersuchung der Formel der allgemeinen konform-kovarianten Ableitung werden wir die Abhängigkeit von $\delta_k v^i$ von der Hilfsgröße b_k bestimmen. Es besteht das folgende

Lemma. *Die allgemeine konform-kovariante Ableitung $\delta_k v^i$ des relativkonformen Vektors v^i vom Gewicht h ist von den $\Gamma_i{}^j{}_k$ immer durch die durch* (2. 3) *bestimmten $\Lambda_i{}^j{}_k$ abhängig.*

BEWEIS. Die allgemeine konform-kovariante Ableitung $\delta_k v^i$ eines relativkonformen Vektors v^i ist eine Funktion von $\Gamma_a{}^b{}_c$ und b_a, d. h.:

$$\delta_k v^i = p^i_k(v^a, \partial_b v^a, \Gamma_a{}^b{}_c, b_a).$$

Nach einer konformen Transformation (1. 1) der Metrik bekommt man

$$\delta_k \tilde{v}^i = p^i_{\ k}(e^{h\sigma} v^a, e^{h\sigma}(\partial_b v^a + h\sigma_b v^a), \Gamma_{a\ c}^{\ b} + \mathfrak{G}^{bt}_{ac}\sigma_t, b_a - \sigma_a).$$

Beachten wir die in der Einleitung gestellte Forderung F), so erhalten wir

$$\delta_k \tilde{v}^i = e^{h\sigma} \delta_k v^i. \tag{3. 1}$$

Aus den beiden letzten Formeln bekommt man für die Funktionen $p^i_{\ k}$ das Funktionalgleichungssystem

$$e^{h\sigma} p^i_{\ k}(v^a, \partial_b v^a \Gamma_{a\ c}^{\ b}, b_a) =$$
$$= p^i_{\ k}(e^{h\sigma} v^a, e^{h\sigma}(\partial_b v^a + h\sigma_b v^a), \Gamma_{a\ c}^{\ b} + \mathfrak{G}^{bt}_{ac}\sigma_t, b_a - \sigma_a),$$

welches für alle σ_b, σ bestehen muß. Für die Werte

$$\sigma = 0, \quad \sigma_a = b_a$$

wird

$$\delta_k v^i \equiv p^i_{\ k}(v^a, \partial_b v^a, \Gamma_{a\ c}^{\ b}, b_a) = p^i_{\ k}(v^a, \partial_b v^a + h b_b v^a, \Lambda_{a\ c}^{\ b}, 0), \tag{3. 1a}$$

wo $\Lambda_{a\ c}^{\ b}$ durch (2. 3) bestimmt ist. Die letzte Formel beweist eben die Behauptung unseres Lemmas.

Nun sind wir schon imstande zu beweisen, daß die allgemeine konform-kovariante Ableitung die Funktion einer sogenannten fundamentalen konform-kovarianten Ableitung ist. Es besteht der folgende

Satz 2. *Die allgemeine, in den Veränderlichen stetige konform-kovariante Ableitung $\delta_k v^i$ des relativ-konformen Vektors v^i vom Gewicht h ist eine von erster Dimension positiv-homogene Funktion einer sog. fundamentalen konform-kovarianten Ableitung $\delta^*_k v^i$:*

$$\delta^*_k v^i = \partial_k v^i + \Lambda_{t\ k}^{\ i} v^t + h b_k v^i. \tag{3. 2}$$

b_k ist ein Vektor mit dem konformen Transformationsgesetz (2. 4).

Beweis. Die konform-kovariante Ableitung $\delta_k v^i$ ist nach der Forderung F) (vgl. die Einleitung) ein gemischter Tensor. Nach einer zulässigen Koordinatentransformation bekommt man das folgende Transformationsgesetz:

$$\overline{\delta_k v^i} = A^r_k \overline{A}^i_s \delta_r v^s. \tag{3. 3}$$

Die konform-kovariante Ableitung $\delta_k v^i$ ist nach dem Lemma eine Funktion von v^a, $\partial_b v^a$, $\Lambda_{a\ c}^{\ b}$ und b_a, d. h.:

$$\delta_k v^i = t^i_{\ k}(v^a, \partial_b v^a, \Lambda_{a\ c}^{\ b}, b_a). \tag{3. 4}$$

Man erhält das transformierte $\delta_k v^i$ wenn man in die Funktionen $t^i_{\ k}$ statt v^a, $\partial_b v^a$, $\Lambda_{a\ c}^{\ b}$ und b_a die transformierten Größen: $\overline{v}^a$, $\partial_{\overline{b}} \overline{v}^a$ $\overline{\Lambda}_{a\ c}^{\ b}$ und $\overline{b}_a$ einsetzt, d. h.:

$$\overline{\delta_k v^i} = t^i_{\ k}(\overline{v}^a, \partial_{\overline{b}} \overline{v}^a, \overline{\Lambda}_{a\ c}^{\ b}, \overline{b}_a).$$

Beachten wir jetzt (3. 3), (3. 4) und die entsprechenden Transformationsformeln von $\bar{v}^a$, $\partial_{\bar{b}}\bar{v}^a$, $\bar{\Lambda}_a{}^b{}_c$, $\bar{b}_a$, so ergibt sich für die Funktionen t^i_k das Funktionalgleichungssystem

$$\begin{aligned} &A^r_k \bar{A}^i_s t^s_r(v^a, \partial_b v^a, \Lambda_a{}^b{}_c, b_a) = \\ (3.5)\qquad &= t^i_k(\bar{A}^a_r v^r, \bar{A}^a_r A^s_b \partial_s v^r - A^t_{br}\bar{A}^a_t \bar{A}^r_s v^s, A^r_a \bar{A}^b_s A^t_c \Lambda_r{}^s{}_t + A^r_{ac}\bar{A}^b_r, A^s_a b_s). \end{aligned}$$

Für die Werte

$$A^r_a = \delta^r_a, \quad A^b_{ac} = -\Lambda_a{}^b{}_c$$

die in einem Punkte $\underset{(0)}{x^i}$ möglich sind, wird aus (3. 5) wegen $\bar{A}^a_s = \delta^a_s$:

$$t^i_k(v^a, \partial_b v^a, \Lambda_a{}^b{}_c, b_a) = t^i_k(v^a, d_b v^a, 0, b_a), \tag{3. 6}$$

mit

$$d_b v^a \overset{\text{def}}{=} \partial_b v^a + \Lambda_t{}^a{}_b v^t. \tag{3. 7}$$

Die Formel (3. 6) bestimmt die Abhängigkeit der allgemeinen konformkovarianten Ableitung von den Übertragungsparametern $\Lambda_i{}^j{}_k$. Die Formel (3. 7) bestimmt auch eine kovariante Ableitung von v^i, doch genügt diese kovariante Ableitung der Forderung F) nicht. Nach einer Transformation (1. 1) wird:

$$d_b \tilde{v}^a = e^{h\sigma}(d_b v^a + h\sigma_b v^a). \tag{3. 8}$$

Führen wir jetzt die Bezeichnung:

$$T^i_k(v^a, d_b v^a, b_a) \overset{\text{def}}{=} t^i_k(v^a, d_b v^a, 0, b_a)$$

ein, so wird nach (3. 4) und (3. 6):

$$\delta_k v^i = T^i_k(v^a, d_b v^a, b_a)$$

bestehen. Nach einer konformen Transformation (1. 1) der Metrik bekommt man aus (3. 1) im Hinblick auf (3. 8)

$$T^i_k(e^{h\sigma} v^a, e^{h\sigma}(d_b v^a + h\sigma_b v^a), b_a - \sigma_a) = e^{h\sigma} T^i_k(v^a, d_b v^a, b_a) \tag{3. 9}$$

(Vgl. (3. 1a)). Nach der Substitution $\sigma = 0$, $\sigma_a = b_a$ gilt

$$\delta_k v^i \equiv T^i_k(v^a, d_b v^a, b_a) = T^i_k(v^a, \delta^*_b v^a, 0).$$

$\delta_k v^i$ kann also nur von v^a und $\delta^*_b v^a$ abhängig sein, d. h. es ist

$$\delta_k v^i = f^i_k(v^a, \delta^*_b v^a). \tag{3. 10}$$

Wir müssen noch zeigen, daß die Funktionen f^i_k von den v^a unabhängig, und in den $\delta^*_b v^a$ positiv homogen von erster Ordnung sind.

Beachten wir den Tensorcharakter von $\delta_k v^i$, so bekommt man nach einer zulässigen Koordinatentransformation für die Funktionen f^i_k das Funktionalgleichungssystem:

$$\overline{A}_r^i A_k^s f^r{}_s(v^a, \delta_b^* v^a) = f^i{}_k(\overline{A}_r^a v^r, A_b^r \overline{A}_s^a \delta_r^* v^s). \tag{3.11}$$

Nach der Substitution $A_a^r = \varrho \delta_a^r$ wird $\overline{A}_s^a = \varrho^{-1} \delta_s^a$, und aus (3.11) wird:

$$f^i{}_k(v^a, \delta_b^* v^a) = f^i{}_k(\varrho v^a, \delta_b^* v^a).$$

Beachtet man die Stetigkeit von $f^i{}_k$ in v^a, so bekommt man nach $\varrho \to 0$, daß $f^i{}_k$ nur von den $\delta_b^* v^a$ abhängig ist. Es ist also

$$\delta_k v^i = \varphi^i{}_k(\delta_b^* v^a). \tag{3.12}$$

Nach einer konformen Transformation (1.1) wird wegen (3.1) nach der Substitution $x = e^{h\sigma} > 0$:

$$\varphi^i{}_k(x \delta_b^* v^a) = x \varphi^i{}_k(\delta_b^* v^a), \tag{3.13}$$

und das drückt nach (3.12) die positiv-Homogenität von erster Ordnung der kovarianten Ableitung aus.

Damit haben wir den Satz 2 vollständig bewiesen.

Die allgemeine konform-kovariante Ableitung $\delta_k v^i$ wird also immer mit Hilfe der fundamentalen konform-kovarianten Ableitung $\delta_k^* v^i$ konstruiert. Die positiv-Homogenität von erster Ordnung (3.13) ist zwar eine Beschränkung, doch kann noch $\delta_k v^i$ mannigfache Formen haben. Wir zeigen das durch einige Beispiele:

$$\delta_k v^i = \sqrt{\delta_r^* v^t \delta_t^* v^r}\, \delta_k^i, \quad \delta_k v^i = \frac{\delta_r^* v^t \delta_t^* v^r}{\delta_s^* v^s} \delta_k^i,$$

$$\delta_k v^i = \frac{\sqrt[3]{\delta_r^* v^t \delta_t^* v^s \delta_s^* v^r}}{\sqrt{\delta_r^* v^t \delta_t^* v^r}} \delta_k^* v^i.$$

Der kovariante Fall kann bis zu der Formel (3.10) entsprechenden Formel:

$$\delta_k w_i = f_{ik}(w_a, \delta_b^* w_a) \tag{3.14}$$

in vollständig analoger Weise behandelt werden. Es ist aber im kovarianten Fall

$$\delta_b^* w_a \overset{\text{def}}{=} \partial_b w_a - \Lambda_a{}^t{}_b w_t + h b_b w_a. \tag{3.15}$$

Beachten wir jetzt, daß $\delta_k w_i$ ein rein kovarianter Tensor sein muß, so erhalten wir nach einer zulässigen Koordinatentransformation das dem Gleichungssystem (3.11) entsprechende Funktionalgleichungssystem:

$$A_i^r A_k^s f_{rs}(w_a, \delta_b^* w_a) = f_{ik}(A_a^r w_r, A_a^r A_b^s \delta_s^* w_r). \tag{3.16}$$

Nach der Substitution

$$A_a^r = \varrho \delta_a^r$$

wird aus (3. 16)

$$f_{ik}(\varrho w_a, \varrho^2 \delta_b^* w_a) = \varrho^2 f_{ik}(w_a, \delta_b^* w_a). \tag{3.17}$$

Die Formel (3. 1) gibt für (3. 14)

$$f_{ik}(\varrho w_a, \varrho \delta_b^* w_a) = \varrho f_{ik}(w_a, \delta_b^* w_a), \tag{3.18}$$

wo $e^{h\sigma} = \varrho > 0$ gesetzt wurde. Die Gleichung (3. 18) drückt aus, daß die Funktionen f_{ik} in den Veränderlichen positiv-homogen von erster Ordnung sind. Aus (3. 17) wird aber dann nach einer Division mit ϱ^2:

$$f_{ik}\left(\frac{1}{\varrho} w_a, \delta_b^* w_a\right) = f_{ik}(w_a, \delta_b^* w_a).$$

Wenn jetzt $\frac{1}{\varrho} \to 0$, so beweist unsere letzte Relation, daß f_{ik} von den w_a unabhängig ist. Es ist somit

$$\delta_k w_i = \varphi_{ik}(\delta_b^* w_a),$$

wo

$$\varphi_{ik}(\delta_b^* w_a) \overset{\text{det}}{=} f_{ik}(0, \delta_b^* w_a)$$

ist. (3. 18) drückt dann die positiv-Homogenität von erster Ordnung der konform-kovarianten Ableitung in den $\delta_b^* w_a$ aus.

Diese Resultate fassen wir im folgenden Satz zusammen:

Satz 3. *Der Satz 2 ist auch für die relativ-konformen kovarianten Vektoren gültig, die fundamentale konform-kovariante Ableitung ist aber statt* (3. 2) *durch die Formel* (3. 15) *festgelegt.*

Beispiel: ψ^{bc} soll diejenigen in b, c symmetrischen Funktionen bedeuten, für die

$$\delta_{(a}^* w_{b)} \psi^{bc}(\delta_{(k}^* w_{l)}) = \delta_a^c \tag{3.19}$$

gilt. Offenbar sind die Funktionen ψ^{bc} homogen von (—1)-ter Ordnung. Lösen wir nämlich das Gleichungssystem (3. 19) auf ψ^{bc}, so wird

$$\psi^{bc} = \frac{\Delta^{bc}}{\det(\delta_{(i}^* w_{j)})},$$

wo Δ^{bc} die zum Element $\delta_{(b}^* w_{c)}$ gehörige Unterdeterminante in $\det(\delta_{(i}^* w_{j)})$ bedeutet, woraus die Homogenität von ψ^{bc} folgt. Es ist nun

$$\delta_k w_i = \delta_k^* w_r \psi^{rs} \delta_s^* w_i$$

eine konform-kovariante Ableitung.

Literatur

[1] R. S. CLARK, The conformal geometry of a general differential metric space, *Proc. London Math. Soc.* (2) **53** (1951), 294—309.

[2] A. MOÓR, Über die aus g_{ik} bestimmte kovariante Ableitung, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **11** (1960), 175—186.

[3] A. MOÓR, Über Tensoren, die aus angegebenen geometrischen Objekten gebildet sind, *Publ. Math. Debrecen* **6** (1959), 15—25.

[4] J. M. THOMAS, Conformal correspondence of Riemann spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **11** (1925), 257—259.

[5] J. M. THOMAS, Conformal invariants, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **12** (1926), 389—393.

[6] T. Y. THOMAS, On conformal geometry, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **12** (1926), 352—359.

(Eingegangen am 25. April 1960; in veränderter Form am 1. August 1960.)