

## Frenetsche Formeln für Kurven in affinzusammenhängenden Räumen\*)

Von L. TAMÁSSY (Debrecen)

### Einführung

Die Analoga im gewissen Sinne der wohlbekannten Frenetschen Formeln der  $n$ -dimensionalen Riemannschen Räume rühren im Falle von affinzusammenhängenden Räumen von V. HLAVATY [2] her.<sup>1)</sup> Sie drücken die Derivierten der Vektoren eines begleitenden  $n$ -Beins mit Hilfe des  $n$ -Beins selbst aus, und die auftretenden Koeffizientenfunktionen (Krümmungen) bilden ein vollständiges Invariantensystem der Kurve. Falls aber der affinzusammenhängende Raum gleichzeitig ein Riemannscher ist, dann fallen die von V. HLAVATY angegebenen Formeln nicht mit den erstmals von W. BLASCHKE angegebenen (gewöhnlichen) Frenetschen Formeln eines Riemannschen Raumes zusammen.<sup>2)</sup>

In dieser Arbeit werden wir für Kurven in affinzusammenhängenden Räumen Krümmungswerte, begleitenden  $n$ -Bein, und diese verknüpfende Formeln derart angeben, daß sich diese im Falle eines Riemannschen Raumes auf die dort wohlbekannten Krümmungen, Normalen und Frenetschen Formeln der Kurve reduzieren, falls der Affinbogen durch die Bogenlänge ersetzt wird. Unser Verfahren nützt im wesentlichen die Tatsache aus, daß in einem euklidischen Raum die erste Krümmung sich auch als der Grenzwert des Quotienten der Bogenlänge des sphärischen Bildes der Tangente und der Bogenlänge der Kurve definieren läßt, d. h. in einer solchen Form, in welcher außer der Bogenlänge kein metrischer Begriff benutzt wird, so daß sich diese Definition auch auf affinzusammenhängende Räume übertragen läßt.

Im § 1 geben wir die Definition der Vektoren des begleitenden  $n$ -Beins und der Krümmungen, und wir zeigen, daß sie im Falle eines Riemannschen

---

\*) Vorgetragen am II. Ungarischen Mathematischen Kongreß in Budapest in August 1960.

<sup>1)</sup> Siehe V. HLAVATY [2] S. 21, oder SCHOUTEN [4] S. 234.

<sup>2)</sup> Siehe SCHOUTEN [4] S. 234. letzter Absatz, und SCHOUTEN—STRIJK [5] § 4.

Raumes in die bekannten Normalen und Krümmungswerte übergehen. Im § 2 bestimmen wir die Zusammenhänge zwischen den Krümmungen und den Vektoren des begleitenden  $n$ -Beins (Frenetsche Formeln.). Diese stimmen formal mit Ausnahme der letzten Reihe mit den Frenetschen Formeln des Riemannschen Raumes überein. Endlich wird im § 3 eine Methode für die Berechnung von Krümmungen entwickelt, und einige einfachere Krümmungen werden mit Hilfe derselben ermittelt.

Wir führen unsere Untersuchungen der Einfachheit halber in einem äquiaffinzusammenhängenden Raum, und wir weisen nur am Ende unserer Arbeit darauf hin, inwieweit und in welcher Form unsere ergebnisse auch in affinzusammenhängenden Räumen gültig sind.

### § 1. Die Krümmungen

Es sei ein äquiaffinzusammenhängender Raum  $L_n^e$  gegeben, d. h. ein affinzusammenhängender Raum ohne Torsion, in welchem ein  $n$ -Vektor ausgezeichnet ist, dessen kovariante Ableitung überall verschwindet.<sup>3)</sup> Es sei weiter unsere Kurve<sup>4)</sup>

$$x^v = x^v(p) \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

auf den affinen Parameter  $p$  bezogen.<sup>5)</sup>

Zuerst definieren wir die Krümmungen, und die Normalvektoren. Wir verschieben den Tangentenvektor

$$\frac{dx^v}{dp} = t^v$$

(für die Bezeichnung dieses Vektors werden wir auch das  $t^v$  brauchen) parallel längs der Kurve in den Punkt mit Parameterwert  $p_0$ . Die durch die Parallelverschiebung so erhaltenen Vektoren  $\bar{t}^v(p)$  bestimmen eine Kurve im Tangentialraum von  $x^v(p_0)$ . Dann bilden wir den Affinbogen  $L_1(p)$  der Kurve  $\bar{t}^v(p)$  von  $p_0$  beginnend.<sup>6)</sup> Die erste Krümmung definieren wir als den Grenzwert des Quotienten von  $L_1(p)$  und  $p - p_0$  im Falle  $p \rightarrow p_0$ :

$$\kappa(p_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{L_1(p)}{p - p_0}.$$

<sup>3)</sup> Siehe z. B. Н о р д е н [3] S. 154.

<sup>4)</sup> Griechische Indizes durchlaufen immer die Werte  $1, 2, \dots, n$  während lateinische Indizes davon abweichende Werte bezeichnen. Die Erfüllung derjenigen Differenzierbarkeitsbedingungen die zur Existenz des affinen Parameters, sowie zur Existenz anderer aus der Kurve abgeleiteter Begriffe notwendig sind, nehmen wir weiterhin an.

<sup>5)</sup> Siehe V. HLAVATY [2] S. 20; oder SCHOUTEN—STRIJK [5] § 4.

<sup>6)</sup> Siehe W. BLASCHKE [1] S. 72, oder SCHOUTEN—STRIJK [5] § 4.

Die Kurve soll eine allgemeine Kurve heißen, wenn keine ihrer Krümmungen verschwindet. Dies, und die lineare Unabhängigkeit der Vektoren  $t^v, \frac{Dt^v}{dp}, \dots, \frac{D^{n-1}t^v}{dp^{n-1}}$  werden wir im folgenden voraussetzen. Hierauf definieren wir den ersten Normalvektor:

$$t_2^v(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\kappa_1(p)} \frac{Dt^v(p)}{dp}.$$

Daraus folgt

$$(1) \quad \frac{Dt^v}{dp} = \kappa_1 t_2^v.$$

Wir bezeichnen jetzt den Vektor, dessen Komponenten in einem längs der Kurve genommenen Fermischen Koordinatensystem  $(x')$  die Werte  $\int_{p_0}^p \kappa_1 t_2^v dp$  haben mit  $y_1^v(p)$ , und wir verschieben die Vektoren  $t_2^v(p) + y_1^v(p)$  parallel in den Punkt von Parameterwert  $p_0$ . So erhalten wir:  $\bar{t}_2^v(p) + \bar{y}_1^v(p)$ . Der Affinbogen dieser Kurve im Tangentialraum von  $x^v(p_0)$  ist  $L_2(p)$ . Die Definition der zweiten Krümmung ist:

$$\kappa_2(p_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{L_2(p)}{p - p_0}.$$

Die Definition des zweiten Normalvektors ist

$$t_3^v(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\kappa_2(p)} \left[ \frac{Dt_2^v}{dp} + \kappa_1(p) t_2^v(p) \right],$$

und so ist

$$(2) \quad \frac{Dt_2^v}{dp} = -\kappa_1 t_1^v + \kappa_2 t_3^v.$$

Ähnlich definieren wir die Krümmungen  $\kappa_3(p), \dots, \kappa_{n-2}(p)$ , und die Normalvektoren  $t_4^v(p), \dots, t_{n-1}^v(p)$ . Bezeichnen wir endlich den Vektor, dessen Komponenten in einem längs der Kurve genommenen Fermischen Koordinatensystem  $(x')$  die Werte  $\int_{p_0}^p \kappa_{n-2} t_{n-2}^v dp$  haben mit  $y_{n-2}^v(p)$ . Sodann verschieben wir die Vektoren  $t_{n-1}^v(p) + y_{n-2}^v(p)$  parallel in den Punkt von Parameterwert  $p_0$ . Die parallelverschobenen Vektoren  $\bar{t}_{n-1}^v(p) + \bar{y}_{n-2}^v(p)$  bilden so im Tangentialraum von

$x^v(p_0)$  eine Kurve, deren Affinbogen mit  $L_{n-1}(p)$  bezeichnet sei. Die Definition der  $(n-1)$ -ten Krümmung und des  $(n-1)$ -ten Normalvektors lauten:

$$\begin{aligned} \kappa_{n-1}(p_0) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{L_{n-1}(p)}{p - p_0} \\ t_n^v(p) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\kappa_{n-1}(p)} \left[ \frac{D t_{n-1}^v}{dp} + \kappa_{n-2}(p) t_{n-2}^v(p) \right]. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(3) \quad \frac{D t_n^v}{dp} = -\kappa_{n-2} t_{n-2}^v + \kappa_{n-1} t_n^v.$$

Wir zeigen, daß die gegebenen Definitionen vom Koordinatensystem unabhängig sind. Erstens sind die  $y_i^{v''}(p)$  ( $i=1, 2, \dots, n-2$ ) unabhängig davon, welches, längs der Kurve genommenes Fermisches Koordinatensystem wir für ihre Definition angewendet haben. Betrachten wir nämlich im Fermischen Koordinatensystem  $(x')$  den längs der Kurve parallel verschobenen Vektorfeld  $v_{(\sigma)}^{v''}(p) \equiv \delta_{\sigma'}^{v''}$ . Die Komponenten dieser Vektoren sind in einem anderen Fermischen Koordinatensystem  $(x'')$   $v_{(\sigma)}^{v'''}(p)$ . Sie sind durch die Transformationsgesetze  $v_{(\sigma)}^{v''} A_{v'''}^{\sigma'} = \delta_{\sigma'}^{v''} A_{v'''}^{\sigma'} = A_{\sigma'}^{v'''} = v_{(\sigma)}^{v''}$  verknüpft. Weil aber  $v_{(\sigma)}$  ein längs der Kurve parallel verschobenes Vektorfeld ist, so sind  $v_{(\sigma)}^{v''}$  von  $p$  unabhängig, und daher müssen die Komponenten von  $A$  auch Konstanten sein. Dann hängen aber die Komponenten von  $y$  durch die Transformation

$$y_i^{v'''} = \int_{p_0}^p \kappa_{i i}^{v'''} dp = A_{v'''}^{\sigma'} \int_{p_0}^p \kappa_{i i}^{v''} dp = A_{v'''}^{\sigma'} y_i^{v''}$$

zusammen, und die Wertsystem  $y_i^{v''}, y_i^{v'''}$  definieren denselben Vektor. Daher sind aber die  $t_{j+1}^v(p)$  ( $j=1, 2, \dots, n-1$ ) von dem in  $L_n^e$  gewählten Koordinatensystem wirklich unabhängig, weil die bei ihrer Definitionen gebrauchten Begriffe, und zwar die Vektoren  $y$ , das Parallelverschieben, die absolute Derivation, und wegen der Äquiaffinität des Raumes der affine Parameter, bzw. auch der Affinbogen alle Koordinateninvariant sind.

Wir weisen noch darauf hin, daß die Vektoren  $t_{\sigma}$  linear unabhängig sind. Die Unabhängigkeit von  $t, \frac{Dt}{dp}, \dots, \frac{D^{n-1}t}{dp^{n-1}}$  haben wir angenommen.

Daraus und aus (1) ist es ersichtlich, daß die Vektoren  $t_1$  und  $t_2$  linear unabhängig sind, und denselben Unterraum aufspannen, wie  $t$  und  $\frac{Dt}{dp}$ . Nach (1) und (2) ist  $\frac{D^2t}{dp^2} = \frac{D}{dp}(\kappa t) = At + Bt + Ct$ . Wäre  $t$  von  $t_1$  und  $t_2$  nicht linear unabhängig, so müßte  $\frac{D^2t}{dp^2}$  im Unterraum von  $t$  und  $\frac{Dt}{dp}$  liegen, was unserer Annahme widerspricht; usw.

Jetzt zeigen wir, daß falls der  $L_n^e$  gleichzeitig ein Riemannscher  $V_n$  ist, so geben die Krümmungen die im  $V_n$  genommenen Krümmungen der Kurve, falls der affine Parameter durch die Bogenlänge ersetzt wird. Zur gleichen Zeit werden die  $t^{j+1}$  die Normalen der Kurve — was unsere Benennung für diese Vektoren rechtfertigt.

Wir werden unsere Behauptung in einem Fermischen Koordinatensystem beweisen. Da aber die von uns definierten Krümmungen und Normalen vom Koordinatensystem unabhängige Begriffe sind, so wird auch unser Ergebnis vom Koordinatensystem unabhängig gelten. In einem  $V_n$  (was auch eine  $L_n^e$  ist) gelten die Frenetschen Formeln für ein Fermisches Koordinatensystem in folgender Form

$$\begin{aligned}
 \frac{dx^v}{ds} &= t^{*v} \\
 \frac{dt^{*v}}{ds} &= \kappa_1^* t^{*v} \\
 \frac{dt^{*v}}{ds} &= -\kappa_1^* t^{*v} + \kappa_2^* t^{*v} \\
 &\vdots \\
 \frac{dt^{*v}}{ds} &= -\kappa_{n-2}^* t^{*v} + \kappa_{n-1}^* t^{*v} \\
 \frac{dt^{*v}}{ds} &= -\kappa_{n-1}^* t^{*v},
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

wo  $\kappa_1^*, \kappa_2^*, \dots, \kappa_{n-1}^*$  die im  $V_n$  genommenen Krümmungen,  $t_2^{*v}, t_3^{*v}, \dots, t_n^{*v}$  die im  $V_n$  genommenen Normalen der Kurve sind, und  $s$  die Bogenlänge bedeutet. Der durch die Parallelverschiebung der Tangentenvektor  $t^{*v}$  entstandene  $\bar{t}^{*v}$  ist

wegen des Fermischen Koordinatensystems offensichtlich mit  $t^{*v}$  identisch. Daher ist die Bogenlänge der im Tangentialraum von  $x^v(s_0)$  erhaltenen Kurve

$$L_1^*(s) = \int_{s_0}^s \left| \frac{dt^*}{ds} \right| ds = \int_{s_0}^s \kappa_1^* ds,$$

da  $t_2^*$  ein Einheitsvektor ist; und daraus folgt

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{L_1^*(s)}{s - s_0} = \kappa_1^*(s_0).$$

Also gibt uns dieses Verfahren, welches wir unserer Definition gemäß durchgeführt haben, in dem  $V_n$  wirklich die erste Krümmung. — Wegen des Fermischen Koordinatensystems bleiben bei der Parallelverschiebung auch die

Komponenten der Vektoren  $t_2^{*v} + \int_{s_0}^s \kappa_1^* t_1^{*v} ds$  unverändert. Daher gilt für die Bogenlänge der so entstandene Kurve

$$L_2^*(s) = \int_{s_0}^s \left| \frac{d}{ds} \left( t_2^{*v} + \int_{s_0}^s \kappa_1^* t_1^{*v} ds \right) \right| ds = \int_{s_0}^s \left| -\kappa_1^* t_1^{*v} + \kappa_2^* t_3^{*v} + \kappa_1^* t_1^{*v} \right| ds = \int_{s_0}^s \kappa_2^* ds.$$

Also ist

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{L_2^*(s)}{s - s_0} = \kappa_2^*(s_0).$$

Daher gibt auch das nach unserer Definition zur zweiten Krümmung führende Verfahren tatsächlich der Wert  $\kappa_2^*$ . Unsere Behauptung für  $\kappa_2^*, \kappa_3^*, \dots, \kappa_{n-1}^*$  ist ähnlich einzusehen. Demnach sieht man auf Grund eines sukzessiven Vergleichs der Definitionen der  $t$  und der Reihe von (4) sofort, dass diese Vektoren jetzt mit den  $t_\sigma^*$  zusammenfallen. Unsere Ergebnisse faßt der folgende Satz zusammen:

**Satz 1.** Die oben gegebenen Definitionen der Tangente  $t$  der Krümmungen  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{n-1}$  und der Normalen  $t_2, t_3, \dots, t_n$  einer in einem  $L_n^c$  liegende Kurve sind von Koordinatensystem unabhängig, und wenn unser Raum ein Riemannscher Raum ist, so liefern diese Definitionen die dort wohlbekanntes Krümmungen und Normalen der Kurve, falls der affine Parameter durch die Bogenlänge ersetzt wird.

§ 2. Die Frenetschen Formeln

Satz 2. Die Größen  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{n-1}$  und  $t_1', t_2', \dots, t_n'$  sind durch die Formeln

$$\begin{aligned}
 \frac{Dt_1'}{dp} &= \kappa_1 t_2' \\
 \frac{Dt_2'}{dp} &= -\kappa_1 t_1' + \kappa_2 t_3' \\
 &\vdots \\
 \frac{Dt_{n-1}'}{dp} &= -\kappa_{n-2} t_{n-2}' + \kappa_{n-1} t_n' \\
 \frac{Dt_n'}{dp} &= F^n(t, \kappa, \Gamma)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

verbunden, wo  $F^n$  unabhängig von den Derivierten der Veränderlichen ist, und in einem Riemannschen Raum sich auf  $-\kappa_{n-1} t_{n-1}'$  reduziert, falls der Affinbogen  $p$  durch die metrische Bogenlänge ersetzt wird.

Nach (1.1)—(1.3) ist jede Formel von (1) mit Ausnahme der letzteren eine unmittelbare Folge der Definitionen der Krümmungen und der Normalvektoren. So müssen wir nur diese letzte Formel beweisen.

Da die  $t_\sigma$  — wie wir darauf im ersten Paragraph schon hingewiesen haben — linear unabhängig sind, ist der Vektor  $\frac{Dt_\sigma'}{dp}$  in der Form

$$\frac{Dt_\sigma'}{dp} = c_\sigma^\sigma t_\sigma'
 \tag{2}$$

darstellbar. Wir werden zeigen, daß in den  $c_\sigma^\sigma$  die  $\frac{dt_\sigma'}{dp}$  nur linear vorkommen,

so dass (2) für die  $\frac{dt_\sigma'}{dp}$  ein lineares Gleichungssystem bildet.

Durch die linear unabhängigen  $t_\sigma$  wird in jedem Punkt der Kurve ein symmetrischer Maßtensor  $g_{\mu\nu}(p)$  eindeutig bestimmt, bezüglich welcher die  $t_\sigma$

paarweise orthogonale Einheitsvektoren sind:

$$(3) \quad g_{\mu\nu} t_{\varrho}^{\mu} t^{\nu} = \delta_{\varrho}^{\sigma} \quad (g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}).$$

Multiplizieren wir jetzt (2) mit  $g_{\mu\nu} t_{\varrho}^{\mu}$ , so erhalten wir wegen (3)

$$(4) \quad g_{\mu\nu} t_{\varrho}^{\mu} \frac{Dt^{\nu}}{dp} = \overset{\varrho}{c}.$$

Wir können die linke Seite von (4) mit Hilfe der absoluten Derivierten von (3) umformen:

$$(5) \quad \overset{\varrho}{c} = -t_{\varrho}^{\nu} \left( g_{\nu\mu} \frac{Dt^{\mu}}{dp} + \frac{Dg_{\nu\mu}}{dp} t_{\varrho}^{\mu} \right).$$

Hierbei können wir  $\frac{Dt^{\mu}}{dp}$  mit Ausnahme des Falles  $\varrho = n$  aus (1) einsetzen.

Infolgedessen verschwindet im Falle  $\varrho = 1, 2, \dots, n-2$  dieses Glied mit Rücksicht auf (3), im Falle  $\varrho = n-1$  reduziert es sich auf  $-\chi_{n-1}$ , während

wir im Falle  $\varrho = n$  mit Rücksicht auf (2)  $-\overset{n}{c}$  erhalten.

Drücken wir jetzt  $\frac{Dg_{\nu\mu}}{dp}$  mit Hilfe von  $t_{\sigma j}$  und  $\Gamma$  aus. Nach (3) ist  $g_{\mu\nu}$  eine Funktion der  $t_{\sigma}$

$$g_{\nu\mu} = f_{\nu\mu}(t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Daher ist

$$\frac{dg_{\nu\mu}}{dp} = \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial t_{\sigma}^{\tau}} \frac{dt^{\tau}}{dp},$$

und

$$\begin{aligned} \frac{Dg_{\nu\mu}}{dp} &= \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial t_{\varrho}^{\tau}} \frac{dt^{\tau}}{dp} + \left\{ \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial t_{\varrho}^{\tau}} (\chi_{12} t^{\tau} - \Gamma_{\varrho\sigma}^{\tau} t^{\varrho} t^{\sigma}) + \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial t_{\varrho}^{\tau}} (-\chi_{11} t^{\tau} + \chi_{23} t^{\tau} - \Gamma_{\varrho\sigma}^{\tau} t^{\varrho} t^{\sigma}) + \right. \\ &+ \dots + \left. \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial t_{\varrho}^{\tau}} (-\chi_{n-2, n-2} t^{\tau} + \chi_{n-1, n} t^{\tau} - \Gamma_{\varrho\sigma}^{\tau} t^{\varrho} t^{\sigma}) - \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} g_{\lambda\mu} t^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} g_{\nu\lambda} t^{\sigma} \right\} \equiv \\ &\equiv \frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial t_{\varrho}^{\tau}} \frac{dt^{\tau}}{dp} + h_{\nu\mu}(t, \chi, \Gamma), \end{aligned}$$

wo der in geschweiften Klammern stehende Ausdruck mit  $h_{\nu\mu}$  bezeichnet



wurde. Demnach folgt aus (5)

$$c^j = -\frac{dt^j}{dp} \left[ t^v \frac{\partial f_{v\mu}}{\partial t^j} t^\mu \right] + [-t^v h_{v\mu} t^\mu - \varkappa \delta_{n-1}^j] \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

(6)

$$c^n = -\frac{dt^n}{dp} \left[ \frac{1}{2} t^v \frac{\partial f_{v\mu}}{\partial t^n} t^\mu \right] + \left[ -\frac{1}{2} t^v h_{v\mu} t^\mu \right].$$

Die in ersten Klammer stehenden Ausdrücke hängen nur von  $t$  ab, während die in der zweiten Klammer stehenden Ausdrücke die Funktionen von  $t, \varkappa$  und  $\Gamma$  sind. Diese mit  $\overset{o}{k}_\tau(t)$ , bzw. mit  $\overset{o}{l}(t, \varkappa, \Gamma)$  bezeichnend gilt

$$\overset{o}{c} = -\frac{dt^\tau}{dp} \overset{o}{k}_\tau(t) + \overset{o}{l}(t, \varkappa, \Gamma).$$

Wir setzen diese Werte in (2) ein. Daher erhalten wir

$$(7) \quad \frac{Dt^v}{dp} = \frac{dt^v}{dp} + \Gamma_{\tau\sigma}^v t^\tau t^\sigma = \frac{dt^\tau}{dp} K_\tau(t) + L(t, \varkappa, \Gamma),$$

wenn wir den Ausdruck an der rechten Seite nach  $\frac{dt^\tau}{dp}$  ordnen. (7) ist für

die  $\frac{dt^\tau}{dp}$  ein lineares inhomogenes Gleichungssystem mit  $n$  Gleichungen, und

$n$  Unbekannten. Indem wir zu den Lösungen  $\frac{dt^\tau}{dp}$  die  $\Gamma_{\tau\sigma}^v t^\tau t^\sigma$  addieren, erhalten wir Funktionen von bestimmter Form, die nur von  $t, \varkappa$  und  $\Gamma$  abhängen

$$\frac{Dt^v}{dp} = F^v(t, \varkappa, \Gamma). \quad \text{§)$$

7) (7) ist sicher lösbar, weil (7) durch die existierenden  $\frac{dt^\tau}{dp}$  befriedigt wird.

§) Ausführlicher:

$$\frac{dt^\alpha}{dp} = \frac{|N_\tau^v|}{|N_\tau^{(\alpha)}|}$$

wo  $N_\tau^v \equiv K_\tau^v - \delta_\tau^v$  und  $|N_\tau^{(\alpha)}|$  aus  $|N_\tau^v|$  durch Einsetzen von  $\Gamma_{\tau\sigma}^v t^\tau t^\sigma - L$  in die  $\alpha$ -te Spalte entsteht.

Die  $\kappa$  bedeuten in einem  $V_n$  nach Satz 1 die gewöhnlichen Krümmungen, und die  $t$  die gewöhnlichen Normalvektoren der Kurve. Für diese Größen besteht (1) — wie bekannt — in der Form  $F'' = -\kappa \underset{n-1}{t''}$ . Dies ist auch aus unserem Beweis leicht ersichtlich, weil dann für die durch (3) bestimmten  $g_{\mu\nu}$  die Relation  $\frac{Dg_{\mu\nu}}{ds} = 0$  besteht. So gilt in (6)  $\underset{1}{c} = \underset{2}{c} = \dots = \underset{n-2}{c} = \underset{n}{c} = 0$ ;  
 $\underset{n-1}{c} = -\underset{n-1}{\kappa}$ .

Die oben bestimmten Krümmungen bilden ein Invariantensystem der Kurve. Es gilt nämlich der folgende

**Satz 3.** Eine Kurve wird durch ihre Krümmungen, die als Funktionen des affinen Parameters ausgedrückt sind, durch die Komponenten eines ihrer Punkte  $x^v(p_0)$  und durch die Komponenten der Tangenten- und Normalvektoren in diesem Punkt:  $\underset{1}{t}''(p_0), \underset{2}{t}''(p_0), \dots, \underset{n}{t}''(p_0)$  eindeutig bestimmt.

Nämlich bildet das mit  $\frac{dx^v}{dp} = \underset{1}{t}''$  ergänztes Gleichungssystem (1) für die Unbekannten  $x^v, \underset{1}{t}'', \dots, \underset{n}{t}''$  ein Differentialgleichungssystem von erster Ordnung, welches für die Anfangswerte  $x^v(p_0), \underset{1}{t}''(p_0), \underset{2}{t}''(p_0), \dots, \underset{n}{t}''(p_0)$  eine eindeutige Lösung besitzt. Dieses Differentialgleichungssystem wird aber auch durch die Kurve, und ihre Normalen befriedigt. Daher erzeugen die in den Lösungen auftretenden Funktionen  $x^v(p)$  eben diese Kurve. — Daher ist die Kenntnis der Kurve durch die Kenntnis der im Satz vorkommenden Größen ersetzbar.

### § 3. Die Bestimmung der Krümmungswerte

Die Krümmungen sind im § 1 mit Hilfe der Affinbogen gewisser, durch Parallelverschiebung erzeugten Kurven definiert worden. So müssen wir erstens die Komponenten dieser parallelverschobenen Vektoren, und darnach ihre Affinbogen berechnen.

Wir bezeichnen mit  $T^v(p)$  die Komponenten jenes Vektors, der aus  $\underset{1}{t}''(p_1)$  durch Parallelverschiebung längs der Kurve nach dem Kurvenpunkt mit Parameterwert  $p$  hervorgeht. (Also ändert sich der Anfangspunkt des Vektors  $T$ , während die auch durch Parallelverschiebung definierten Vektoren  $\bar{t}$  aus dem festen Punkt mit Parameterwert  $p_0$  ausgehen.) Der Einfachheit halber sei  $p_0 = 0$ . So ist z. B.

$$(1) \quad T^v(p_1) = \underset{1}{t}''(p_1) \quad \text{und} \quad T^v(0) = \bar{\underset{1}{t}}''(p_1).$$

Durch Reihenentwicklung erhalten wir

$$T^r(0) = T^r(p_1) - p_1 \frac{dT^r}{dp}(p_1) + \frac{p_1^2}{2} \frac{d^2 T^r}{dp^2}(p_1) - \dots$$

Da der  $T$  durch eine Parallelverschiebung entsteht, gilt

$$(2) \quad \frac{dT^r}{dp}(p) = -\Gamma_{\mu \varrho}^r(p) T^{\varrho}(p) t^{\mu}(p).$$

Wir Bezeichnen mit  $B_{(1)}^r(p)$ ,  $B_{(2)}^r(p)$ , ... die Funktionen, die wir aus  $T^r$  durch sukzessive Derivationen erhalten, wenn wir nach der Derivation auch die Gleichung (2) berücksichtigen, und die  $T^r$  durch  $t^r$  ersetzen. So ist

$$\begin{aligned} B_{(1)}^r(p) &= -\Gamma_{\mu \varrho}^r(p) t^{\varrho}(p) t^{\mu}(p) \\ B_{(2)}^r(p) &= -\partial_{\sigma} \Gamma_{\mu \varrho}^r t^{\sigma} t^{\varrho} t^{\mu} + \Gamma_{\mu \varrho}^r \Gamma_{\sigma \tau}^{\varrho} t^{\tau} t^{\sigma} t^{\mu} - \Gamma_{\mu \varrho}^r t^{\varrho} \frac{dt^{\mu}}{dp} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Auf Grund von (1) ist offensichtlich

$$(3) \quad B_{(r)}^r(p_1) = \frac{d^r T^r}{dp^r}(p_1) \quad (r = 1, 2, \dots).$$

So ist nach (1) und (3)

$$T^r(0) = t^r(p_1) - p_1 B_{(1)}^r(p_1) + \frac{p_1^2}{2} B_{(2)}^r(p_1) - \dots$$

Wir können aber die Glieder der rechten Seite in Form von Reihen auch mit Hilfe der in  $p=0$  genommenen Derivierten erhalten.

$$(4) \quad \begin{aligned} T^r(0) &= \left[ t^r(0) + p_1 \frac{dt^r}{dp}(0) + \frac{p_1^2}{2} \frac{d^2 t^r}{dp^2}(0) + \dots \right] - \\ &- p_1 \left[ B_{(1)}^r(0) + p_1 \frac{dB_{(1)}^r}{dp}(0) + \dots \right] + \frac{p_1^2}{2} \left[ B_{(2)}^r(0) + p_1 \frac{dB_{(2)}^r}{dp}(0) + \dots \right] - \dots \end{aligned}$$

Wollen wir das Parallelverschobene eines beliebigen  $t^r(p)$  im Punkt  $O$  von parameterwert 0 erhalten, so müssen wir  $p_1$  in (4) durch  $p$  ersetzen. Wir ordnen gleichzeitig (4) nach den Potenzen von  $p_1$ , bzw. von  $p$ :

$$\begin{aligned} T^r(0) &= t^r(0) + p \left[ \frac{dt^r}{dp}(0) - B_{(1)}^r(0) \right] + p^2 \left[ \frac{1}{2} \frac{d^2 t^r}{dp^2}(0) - \frac{dB_{(1)}^r}{dp}(0) + \frac{1}{2} B_{(2)}^r(0) \right] + \\ &+ p^3 \left[ \frac{1}{3!} \frac{d^3 t^r}{dp^3}(0) - \frac{1}{2!} \frac{d^2 B_{(1)}^r}{dp^2}(0) + \frac{1}{2!} \frac{dB_{(2)}^r}{dp}(0) - \frac{1}{3!} B_{(3)}^r(0) \right] + \dots \end{aligned}$$

Endlich ist die im Tangentialraum von  $O$  entstandene Kurve, die aus der Parallelverschiebung der Vektoren  $t^r(p)$  hervorgeht

$$(5) \quad \bar{t}^r(p) = t^r(0) + pC_1^r + p^2C_2^r + p^3C_3^r + \dots,$$

wenn die Ausdrücke in den eckigen Klammern in der vorangehenden Formelnreihe der Reihe nach mit  $C_1^r, C_2^r, C_3^r, \dots$  bezeichnet werden.

Der Affinbogen dieser Kurve ist <sup>9)</sup>

$$L_1(p) = \int_0^p \left[ \frac{1}{\bar{n}} \text{Det} \left( \frac{d\bar{t}^r}{dp}, \frac{d^2\bar{t}^r}{dp^2}, \dots, \frac{d^n\bar{t}^r}{dp^n} \right) \right]^{\frac{2}{n(n+1)}} dp,$$

wo  $\bar{n}$  die einzige Komponente der kovarianten konstanten Skalardichte ist, die den Raum zu einem äquiaffinzusammenhängenden Raum macht. Mit Rücksicht auf (5) erhalten wir

$$\begin{aligned} L_1(p) &= \int_0^p \left[ \text{Det} (C_1^r + 2pC_2^r + \dots, 2C_2^r + 6pC_3^r + \dots, \dots \right. \\ &\quad \left. \dots, n!C_n^r + (n+1)!pC_{n+1}^r + \dots) \frac{1}{\bar{n}} \right]^{\frac{2}{n(n+1)}} dp, \\ &= \int_0^p \left[ (D_0 + pD_1 + p^2D_2 + \dots) \frac{1}{\bar{n}} \right]^{\frac{2}{n(n+1)}} dp, \end{aligned}$$

wo  $D_0 = \text{Det} (C_1^r, 2!C_2^r, \dots, n!C_n^r)$  und  $D_1, D_2, \dots$  die Koeffizienten des nach den Potenzen von  $p$  geordneten Ausdrucks bedeuten. Das Ergebnis des Wur-

zelziehens ist eine solche Potenzreihe, deren konstantes Glied gleich  $\left( \frac{D_0}{\bar{n}} \right)^{\frac{2}{n(n+1)}}$  ist. Daher ist

$$z(0) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{L_1(p)}{p} = \left( \frac{D_0}{\bar{n}} \right)^{\frac{2}{n(n+1)}}.$$

Dies liefert uns, mit Rücksicht auf das Vorangehende einen expliziten Ausdruck in den  $t$  und  $\Gamma$ , und in ihren Derivierten. Die anderen Krümmungen sind ähnlich zu berechnen, wenn die  $t^r$  durch die  $t^r + y^r, \dots$ , usw. ersetzt werden.

Unser Ergebnis lautet in einem äquiaffinen Raum, wo sämtliche  $\Gamma$  und  $B$  verschwinden

(<sup>r</sup>)

$$z(p) = \left( \frac{dt^r}{dp}, \dots, \frac{d^n t^r}{dp^n} \right)^{\frac{2}{n(n+1)}},$$

<sup>9)</sup> Siehe SCHOUTEN [4] S. 233.

wenn wir ein Koordinatensystem benützen, wo  $\tilde{n} = 1$  ist. Dies gibt im Falle  $n = 2$  den Krümmungswert von Blaschke, während im Falle  $n = 3$  dies nicht mehr gilt. Im letzteren Falle ist die zweite Krümmung

$$\kappa_2(p) = \left( \frac{d}{dp} \left( \frac{dt^v}{D} + \int_0^p Dt^v dp \right), \frac{d^2}{dp^2} \left( \frac{dt^v}{D} + \int_0^p Dt^v dp \right), \frac{d^3}{dp^3} \left( \frac{dt^v}{D} + \int_0^p Dt^v dp \right) \right)^{1/6}$$

wo  $D$  den Wert  $\left( \frac{dt^v}{dp}, \frac{d^2 t^v}{dp^2}, \frac{d^3 t^v}{dp^3} \right)_1^{1/6} = \kappa_1(p)$  hat. In  $L_2^e$  ist

$$\kappa_1(p) = \left( \frac{dt^v}{dp} + \Gamma_{\mu\varrho}^v t^\varrho t^\mu, \frac{d^2 t^v}{dp^2} + \partial_\sigma \Gamma_{\mu\varrho}^v t^\sigma t^\varrho t^\mu + 3\Gamma_{\mu\varrho}^v \frac{dt^\varrho}{dp} t^\mu + \Gamma_{\mu\varrho}^v \Gamma_{\sigma\tau}^\varrho t^\sigma t^\tau t^\mu \right)^{1/3}.$$

Endlich bemerken wir, daß wir die Tatsache, daß unser Raum äquifinanzusammenhängend, und nicht nur affinzusammenhängend ist, nur zweimal benützt haben. Wir haben in Zusammenhang mit der Existenz des Fermischen Koordinatensystems ausgenutzt, daß unser Raum ohne Torsion ist; und bei den Definitionen der Krümmungen und der Normalen haben wir die eindeutige Bestimmtheit der affinen Parameter ausgenutzt, was man durch die Existenz einer im Raum apriori gegebenen Skalardichte sichern kann, (wodurch der  $L_n$  sich in einem  $L_n^e$  verwandelt). Existiert eine solche Skalardichte nicht, (d. h. ist unser Raum ein allgemeiner affinzusammenhängender Raum ohne Torsion), so ist der affine Parameter nur bis auf eine Konstante bestimmt. Die Krümmungen und Normalen multiplizieren sich daher bei einer solchen Parameterveränderung mit gewissen Potenzen dieser Konstanten, ähnlich wie dies bei den von HLAVATY eingeführten Krümmungen der Fall ist.<sup>10)</sup> In solchem Sinne gelten unsere Ergebnisse auch in torsionsfreien affinzusammenhängenden Räumen.

### Literatur

- [1] W. BLASCHKE, Vorlesungen über Differentialgeometrie. II. Berlin, 1923.
- [2] V. HLAVATY, Les courbes de la variété générale à  $n$  dimension. *Mém. Sci. Math.* 63 (1934).
- [3] А. П. Н о р д е н, Пространства аффинной связности, Москва, 1950.
- [4] J. A. SCHOUTEN, Ricci-calculus, Berlin, 1954.
- [5] J. A. SCHOUTEN—D. J. STRUIK, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie. II, Groningen, 1938.

(Eingegangen am 28. Juni 1960.)

<sup>10</sup> Siehe SCHOUTEN [4] S. 234.