Elementare Lösung einer mehrere unbekannte Funktionen enthaltenden Funktionalgleichung

Von Z. DARÓCZY (Debrecen)

Es ist eine interessante Erscheinung in der Theorie der Funktionalgleichungen, daß sich aus einer einzigen Gleichung oft mehrere unbekannte Funktionen bestimmen lassen. Durch Verallgemeinerung der Cauchyschen Grundgleichung ergibt sich eine der einfachsten solchen Gleichungen, die Gleichung

$$f(x+y)=g(x)+h(y),$$

welche drei unbekannte Funktionen enthält ([1]).

Diese Gleichung stellt wiederum einen Spezialfall der Funktionalgleichung

$$f(x+y)=\sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(y)$$

dar, welche durch C. STEPHANOS [7] und ST. FENYŐ [4] mittels Zurückführung auf eine Differentialgleichung untersucht worden ist. Unter Voraussetzung von Differenzierbarkeitsbedingungen hat sich D. S. MITRINOVITCH [5] mit der Funktionalgleichung

$$f(x)+g(y)=h(x)k(y)$$

beschäftigt, deren Lösung durch J. ACZÉL in [2] auf elementarem Wege angegeben wurde.

Die Lösung von Funktionalgleichungen läßt sich in verschiedenen Fällen auf die Cauchyschen Gleichungen zurückführen. Geschieht diese Zurückführung mittels elementarer Operationen, so können wir die allgemeinesten Lösungen erhalten, da für diese Gleichungen die allgemeinesten Lösungen bekannt sind, und es genügt um allgemeine Lösungen von einfacher Gestalt zu gewinnen, z. B. nur die Meßbarkeit der Funktionen vorauszusetzen.

In der vorliegenden Arbeit lösen wir die Funktionalgleichung

$$f(x+y)=g(x)+h(y)+k(x)l(y) \tag{1}$$

auf dem oben erwähnten elementaren Wege.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Professor J. ACZÉL, dem ich die Problemstellung und wertvolle Hilfe bei der Lösung desselben verdanke, aufrichtigen Dank sagen.

§ 1. Die Lösung einer einfacheren Gleichung

Zuerst beschäftigen wir uns mit einem Spezialfall der Gleichung (1), und zwar mit der Funktionalgleichung

$$F(x+y)=F(x)+F(y)+\alpha L(x)L(y). \tag{2}$$

Unsere Ergebnisse enthalten diejenigen von R. D. BOSWELL [3] und I. STAMATE [6].

Satz 1. *Sämtliche Lösungen der Funktionalgleichung* (2) *haben eine der folgenden Gestalten*

$$\begin{cases} L(x)=\text{beliebig} & \alpha=0 \\ F(x)=\psi_0(x) \end{cases} \tag{3}$$

oder

$$\begin{cases} L(x)=\psi_1(x) & \alpha\neq 0 \\ F(x)=\psi_2(x)+\dfrac{\alpha}{2}\psi_1(x)^2 \end{cases} \tag{4}$$

oder

$$\begin{cases} L(x)=\beta[1-\varphi(x)] & \alpha\neq 0 \\ F(x)=\psi_3(x)-\alpha\beta^2[1-\varphi(x)] \end{cases} \tag{5}$$

wobei β ein konstanter Wert ist, und die Funktionen ψ_i $(i=0,1,2,3)$ der Funktionalgleichung

$$\psi(x+y)=\psi(x)+\psi(y) \tag{6}$$

und die Funktion φ der Gleichung

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y) \tag{7}$$

genügen.

BEWEIS. Ist in (2) $\alpha=0$, so folgt offenbar (3). Ist hingegen $\alpha\neq 0$ und $L(x)\equiv 0$, so erfüllt $F(x)=\psi_2(x)$ die Gleichung (6), also gilt (4) mit $\psi_1(x)\equiv 0$. Ist nun $L(x)\not\equiv 0$, so gibt es einen solchen Wert $x=\xi$, für welchen $L(\xi)\neq 0$ gilt. Indem wir nun in (2) $y=\xi$ setzen, erhalten wir

$$L(x)=\frac{F(x+\xi)-F(x)-F(\xi)}{\alpha L(\xi)}.$$

Mit der Bezeichnung $L(\xi)=b$ ergibt sich jetzt unter widerholter Verwendung von (2) bzw. wegen der Symmetrie der linken Seite

$$L(x+y)=\frac{F(x+y+\xi)-F(x+y)-F(\xi)}{\alpha b}=$$

$$(8)\qquad =\frac{F(x+\xi)+F(y)+\alpha L(x+\xi)L(y)-F(x)-F(y)-\alpha L(x)L(y)-F(\xi)}{\alpha b}=$$

$$=L(x)+\frac{L(y)[L(x+\xi)-L(x)]}{b}=L(y)+\frac{L(x)[L(y+\xi)-L(y)]}{b}.$$

Hieraus folgt wegen $L(x)\neq 0$

$$\frac{1-\dfrac{L(x+\xi)-L(x)}{b}}{L(x)}=\frac{1-\dfrac{L(y+\xi)-L(y)}{b}}{L(y)}=c,$$

wobei c einen konstanten Wert bezeichnet. Daraus folgt

$$L(x+\xi)=L(x)(1-bc)+b.$$

Indem wir dies in (8) wieder einsetzen, erhalten wir für $L(x)$ die Funktionalgleichung

$$(9)\qquad L(x+y)=L(x)+L(y)-cL(x)L(y).$$

Im weiteren unterscheiden wir zwei Fälle.

Zuerst sei $c=0$. Dann folgt aus (9)

$$L(x)=\psi_1(x),$$

wobei ψ_1 der Gleichung (6) genügt. Wir definieren die Funktion ψ_2 wie folgt:

$$\psi_2(x)=F(x)-\frac{\alpha}{2}\psi_1(x)^2.$$

Wie man auf Grund von (2) leicht einsieht, genügt ψ_2 der Gleichung (6), woraus sich das Lösungssystem (4) ergibt.

Ist $c\neq 0$, so erhält man aus (9) durch direktes Rechnen, das die Funktion

$$\varphi(x)=-cL(x)+1$$

der Gleichung (7) genügt. Hieraus folgt

$$L(x)=\beta[1-\varphi(x)]. \qquad \left(\beta=\frac{1}{c}\neq 0\right)$$

Es sei

$$\psi_3(x)=F(x)+\alpha\beta^2[1-\varphi(x)].$$

Wie man leicht zeigt, genügt dann ψ_3 der Gleichung (6), woraus sich das Lösungssystem (5) ergibt. Durch Wiedereinsetzen erbringt man den Nachweis, daß die Lösungssysteme (4) und (5) die Gleichung (2) in der Tat befriedigen. Damit haben wir unseren Satz vollkommen bewiesen.

Bekanntlich sind die meßbaren Lösungen von (6) von der Gestalt

$$\psi(x) = \alpha x$$

und die meßbaren Lösungen von (7) von der Gestalt

$$\varphi(x) = e^{\gamma x} \quad \text{oder} \quad 0,$$

wobei α und γ reelle Konstanten sind. Daraus, sowie aus unserem Satz 1 ergibt sich der folgende

Satz 2. *Sämtliche meßbare Lösungen der Funktionalgleichung* (2) *entstehen in der folgenden Form:*

$$\left\{\begin{array}{ll} L(x) = \textit{beliebig} & \alpha = 0 \\ F(x) = \alpha_0 x & \end{array}\right. \tag{10}$$

oder

$$\left\{\begin{array}{ll} L(x) = \alpha_1 x & \alpha \neq 0 \\ F(x) = \alpha_2 x + \dfrac{\alpha}{2}\alpha_1^2 x^2 & \end{array}\right. \tag{11}$$

oder

$$\left\{\begin{array}{ll} L(x) = \beta(1 - e^{\gamma x}) & \alpha \neq 0 \\ F(x) = \alpha_3 x - \alpha\beta^2(1 - e^{\gamma x}) & \end{array}\right. \tag{12}$$

oder

$$\left\{\begin{array}{ll} L(x) = \beta & \alpha \neq 0 \\ F(x) = \alpha_3 x - \alpha\beta^2, & \end{array}\right. \tag{13}$$

wobei $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ ist, und die α_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ beliebige reelle Konstanten sind.

§ 2. Die allgemeine Lösung der Gleichung (1)

Nunmehr führen wir die Lösung der Gleichung (1) auf diejenige der Gleichung (2) zurück. Die Zurückführung geschieht mit einer sehr einfachen und dabei lehrreichen Methode, die wir im wesentlichen bereits bei der Lösung von Satz 1 verwendet haben.

Satz 3. *Ist die Funktion $l(x)$ nicht konstant, so entstehen sämtliche Lösungen der Funktionalgleichung* (1) *in der folgenden Gestalt*

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) = F(x) + a_1 \\ g(x) = F(x) - b\alpha L(x) + a_2 \\ h(x) = F(x) + a_3 L(x) + a_1 - a_2 + b a_3 \\ k(x) = \alpha L(x) - a_3 \\ l(x) = L(x) + b \end{array}\right. \tag{14}$$

wobei α, b, a_i $(i=1,2,3)$ beliebige Konstanten sind, die Funktionen $F(x)$ und $L(x)$ der Funktionalgleichung (2) *genügen und $L(x)$ nicht konstant ist.*

Beweis. Da die linke Seite der Gleichung (1) in x und in y symmetrisch ist, muß auch die rechte Seite symmetrisch sein, d. h. es gilt die Gleichung

$$g(x)+h(y)+k(x)l(y)=g(y)+h(x)+k(y)l(x).$$

Führen wir jetzt die Bezeichnung $H(x)=g(x)-h(x)$ ein, so ergibt sich

$$H(x)-H(y)=l(x)k(y)-k(x)l(y). \tag{15}$$

Indem wir jetzt für y den Wert 0 einsetzen und $H(0)=a, l(0)=b, k(0)=c$ setzen, ergibt sich

$$H(x)-a=cl(x)-bk(x). \tag{16}$$

Da $l(x)$ nicht konstant ist, gibt es einen Wert ξ, für welchen $l(\xi)\neq l(0)=b$ gilt. Indem wir jetzt in (15) für y den Wert ξ einsetzen und ausserdem $H(\xi)=\bar{a}$, $l(\xi)=\bar{b}\neq b$ und $k(\xi)=\bar{c}$ setzen, ergibt sich

$$H(x)-\bar{a}=\bar{c}l(x)-\bar{b}k(x). \tag{17}$$

Wir bilden jetzt die Differenz der Gleichungen (16) und (17):

$$\bar{a}-a=l(x)(c-\bar{c})+k(x)(\bar{b}-b).$$

Hieraus folgt wegen $b-\bar{b}\neq 0$.

$$k(x)=\frac{c-\bar{c}}{b-\bar{b}}l(x)+\frac{a-\bar{a}}{b-\bar{b}}=\alpha l(x)+A. \tag{18}$$

Indem wir (18) wieder in (1) einsetzen, erhalten wir

$$f(x+y)=g(x)+h(y)+[\alpha l(x)+A]l(y).$$

Es sei

$$m(x)=h(x)+Al(x). \tag{19}$$

Indem wir von der Symmetrie der linken Seite der Gleichung

$$f(x+y)=g(x)+m(y)+\alpha l(x)l(y).$$

Gebrauch machen, erhalten wir

$$g(x)+m(y)=g(y)+m(x).$$

Hieraus folgt nun durch die Substitution $y=0$

$$g(x)=m(x)+d. \qquad (d=g(0)-m(0)) \tag{20}$$

Führen wir die Bezeichnung

$$G(x)=g(x)-\frac{d}{2} \tag{21}$$

ein, so nimmt unsere Gleichung die Gestalt

$$f(x+y)=G(x)+G(y)+\alpha l(x)l(y)$$

an. Falls wir jetzt für y den Wert Null setzen und $G(0)=\bar{d}$ schreiben, so ergibt sich

$$f(x)=G(x)+\bar{d}+\alpha b l(x).$$

Hieraus folgt

$$G(x)=f(x)-\alpha b l(x)-\bar{d}. \tag{22}$$

Indem wir (22) in unsere Gleichung wieder einsetzen, ergibt sich

$$f(x+y)=f(x)-\alpha b l(x)-\bar{d}+f(y)-\alpha b l(y)-\bar{d}+\alpha l(x)l(y)=$$
$$=f(x)+f(y)+\alpha[l(x)-b]\,[l(y)-b]-\alpha b^2-2\bar{d}.$$

Führen wir jetzt die Bezeichnungen

$$L(x)=l(x)-b \tag{23}$$

und

$$F(x)=f(x)-\alpha b^2-2\bar{d} \tag{24}$$

ein, so nimmt unsere Gleichung die Gestalt

$$F(x+y)=F(x)+F(y)+\alpha L(x)L(y)$$

an, d. h. F und L genügen der Gleichung (2). Nunmehr bestimmen wir die Gestalt der unbekannten Funktionen der Gleichung (1) mit Hilfe der Funktionen F und L. Aus (24) folgt

$$f(x)=F(x)+\alpha b^2+2\bar{d}=F(x)+a_1.$$

Aus (23) folgt

$$l(x)=L(x)+b.$$

Aus (18)

$$k(x)=\alpha[L(x)+b]+A=\alpha L(x)-a_3.$$

Aus (22)

$$G(x)=F(x)+a_1-\alpha b[L(x)+b]-\bar{d}$$

und aus (21)

$$g(x)=G(x)+\frac{d}{2}.$$

Ein Vergleich dieser beiden Ausdrücke ergibt

$$g(x)=F(x)-\alpha b L(x)+a_2$$

und aus einem Vergleich zwischen (19) und (20) folgt

$$g(x)=m(x)+d=h(x)+A l(x)+d.$$

Hieraus ergibt sich

$$h(x)=F(x)-\alpha b L(x)+a_2-A[L(x)+b]-d=F(x)+a_3L(x)+C.$$

Den Wert der Konstanten C erhalten wir, indem wir die soeben bestimmten Ausdrücke für f, g, h, k und l in (1) wieder einsetzen, und zwar ergibt sich dann

$$C=a_1-a_2+ba_3.$$

Dabei wird auch ersichtlich, daß die Funktionen der Gestalt (14) der Gleichung (1) genügen, womit wir den Satz bewiesen haben.

Im Falle $f(x)\equiv 0$ ist $F(x)$ konstant. Ist also $l(x)$ nicht konstant, so ist $\alpha=0$, $F(x)\equiv 0$, und so erhalten wir aus (3) und aus (14) die allgemeine Lösung bei nichtkonstantem $l(x)$ der Gleichung von MITRINOVITCH

$$0=g(x)+h(y)+k(x)l(y)$$

und zwar ist diese Lösung

$$g(x)=a_2,\quad h(x)=a_3 l(x)-a_2,\quad k(x)=-a_3,\quad l(x)=\text{beliebig}.$$

Hier ist $k(x)$ konstant $l(x)$ nichtkonstant. Ist $l(x)$ konstant, so erhalten wir noch eine Lösung, welche sich aus der soeben angeführten durch Vertauschung von $k(x)$ und von $l(x)$ sowie von $g(x)$ und von $h(x)$ ergibt. Weitere Lösungen gibt es nicht.

Nunmehr können wir auf Grund von Satz 2 und von Satz 3 den folgenden Satz aussprechen:

Satz 4. *Ist die Funktion $l(x)$ nicht konstant, so entstehen sämtliche meßbare Lösungen der Funktionalgleichung* (1) *in der folgenden Gestalt:*

$$\text{(25)}\qquad \begin{cases} f(x)=\alpha_0 x+a_1 \\ g(x)=\alpha_0 x+a_2 \\ h(x)=\alpha_0 x+a_3 l(x)+a_1-a_2 & \alpha=0 \\ k(x)=-a_3 \\ l(x)=\textit{beliebig (nicht konstant)} \end{cases}$$

oder

$$\text{(26)}\qquad \begin{cases} f(x)=\dfrac{\alpha}{2}\alpha_1^2x^2+\alpha_2 x+a_1 \\ g(x)=\dfrac{\alpha}{2}\alpha_1^2x^2+(\alpha_2-b\alpha\alpha_1)x+a_2 \\ h(x)=\dfrac{\alpha}{2}\alpha_1^2x^2+(\alpha_2+a_3\alpha_1)x+a_1-a_2+ba_3 \\ k(x)=\alpha\alpha_1 x-a_3 \\ l(x)=\alpha_1 x+b \end{cases}$$

oder

$$(27)\qquad \begin{cases} f(x) = -\alpha\beta^2(1-e^{\gamma x}) + \alpha_3 x + a_1 \\ g(x) = -(\alpha\beta^2 + b\alpha\beta)(1-e^{\gamma x}) + \alpha_3 x + a_2 \\ h(x) = -(\alpha\beta^2 - a_3\beta)(1-e^{\gamma x}) + \alpha_3 x + a_1 - a_2 + b a_3 \\ k(x) = \alpha\beta(1-e^{\gamma x}) - a_3 \\ l(x) = \beta(1-e^{\gamma x}) + b, \end{cases}$$

wobei $b, \alpha \neq 0,\ \alpha_1 \neq 0,\ \beta \neq 0,\ \gamma \neq 0,\ a_i\ \ (i = 1, 2, 3)$ *beliebige konstante Werte sind.*

$$\begin{cases} f(x) = \psi(x) + \beta + \gamma \\ g(x) = \psi(x) - A k(x) + \gamma \\ h(x) = \psi(x) + \beta \\ k(x) = \text{beliebig} \end{cases}$$

BEWEIS. Die Richtigkeit des Satzes folgt unmittelba der Formeln (14) mit (10), (11) bzw. (12).

Jetzt bleibt nur noch der Fall übrig, wo in (1) die Funktion $l(x)$ konstant ist. Es sei $l(x) = A$, dann hat unsere Gleichung die Gestalt

$$(28)\qquad f(x+y) = g(x) + h(y) + A k(x).$$

Führen wir die Bezeichnung $m(x) = g(x) + A k(x)$ ein, so ergibt sich

$$f(x+y) = m(x) + h(y).$$

Die allgemeinen Lösungen dieser Gleichung haben die Gestalt

$$\begin{cases} f(x) = \psi(x) + \beta + \gamma \\ m(x) = \psi(x) + \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \psi(x) + \beta + \gamma \\ m(x) = \psi(x) + \gamma \\ h(x) = \psi(x) + \beta \end{cases}$$

wobei die Funktion ψ nügt ([1]). Auf Grund des gezeigten können wir den rechen:

Satz 5. *Sämtliche Lösungen der Funktionalgleichung* (28) *entstehen in der Gestalt*

$$(29)\qquad \begin{cases} f(x) = \psi(x) + \beta + \gamma \\ g(x) = \psi(x) - A k(x) + \gamma \\ h(x) = \psi(x) + \beta \\ k(x) = \text{beliebig} \end{cases}$$

wobei β *und* γ *beliebige Konstanten sind, und die Funktion* ψ *der Gleichung* (6) *genügt.*

Die meßbaren Lösungen von (28) ergeben sich aus (29) sofort, indem man $\psi(x) = \alpha x$ setzt.

Literatur

[1] J. Aczél, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, *Basel und Stuttgart,* 1960.

[2] J. Aczél, Miszellen über Funktionalgleichungen I., *Math. Nachr.* **19** (1958), 87—89.

[3] R. D. Boswell, On two functional equations, *Amer. Math. Monthly* **66** (1959), 716.

[4] St. Fenyő, Über eine Lösungsmethode gewisser Funktionalgleichungen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **7** (1956), 383—396.

[5] D. S. Mitrinovitch, Sur un procédé fournissant des équations fonctionnelles dont les solutions continues et différentiables peuvent être déterminées, *Publ. Elektrotehn. Fak. Univ. Beograd,* **5** (1956), 1—8.

[6] I. Stamate, Asupra ecuației funcționale $f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y)$, *Lucrari Inst. Polit. Cluj* **1** (1959), 111—118.

[7] C. Stephanos, Sur une catégorie d'équations fonctionnelles. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **18** (1904), 360—362.

(Eingegangen am 1. August 1960; in veränderter Form am 1. September 1960.)