Die Darbouxschen Formeln der Eichfläche eines Minkowskischen Raumes

Von I. SÁNDOR (Budapest)

Die Darbouxschen Formeln bestehen aus den Ableitungsformeln des n-Beins einer Flächenkurve. Nach D. LAUGWITZ [1] ist die Flächentheorie der zentroaffinen Geometrie mit der Differentialgeometrie der Eichfläche einer Minkowskischen Geometrie äquivalent, falls die Fläche in Bezug auf den Ursprung eines cartesischen Koordinatensystems sternförmig ist und die Fläche mit einer transversalen oskulierenden Metrik versehen ist [2].

Da die Eichfläche eines Minkowskischen Raumes eine ähnliche Rolle spielt, wie die Sphäre in einem euklidischen Raum, kann man erwarten, daß eine Reihe von Sätzen, die sich auf sphärische Kurven beziehen, ihre Gültigkeit in unserem allgemeineren Falle behalten. Diese Behauptung scheint, falls man die Resultate bezüglich der Krümmungsverhältnisse der Eichfläche in Betracht zieht [2], in gewissem Maße gerechtfertigt zu sein.

Aus unseren Untersuchungen folgt, daß die Kurven der Eichfläche dieselben charakteristischen Eigenschaften besitzen, die im Falle sphärischer Kurven schon bekannt sind. Sie haben konstante Normalkrümmung und verschwindende geodätische Torsion.

Wir betrachten in einem n-dimensionalen Raum eine Fläche, die in Bezug auf den Ursprung eines cartesischen Koordinatensystems $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ sternförmig ist. Die Fläche kann man entweder durch die Gleichung

$$L(x^1, x^2, \dots, x^n) = 1, \tag{1}$$

oder mit Hilfe der Parameter $u^1, u^2, \dots, u^{n-1}$ in der Form

$$x^i = x^i(u^\alpha) \qquad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, n-1, n \\ \alpha = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \tag{2}$$

angeben. Bekanntlich muß $L(x)$ in den x^i von erster Dimension positiv homogen sein. Nach (2) bekommen wir die Identität

$$L\big(x^i(u^\alpha)\big) \equiv 1. \tag{3}$$

Wir führen die Größen

$$g_{ik} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2(x)}{\partial x^i \partial x^k} \tag{4}$$

ein. Mit Hilfe dieser Größen definieren wir eine Riemannsche Metrik in dem Raum:

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k. \tag{5}$$

Die induzierte Metrik der Fläche (3) wird

$$ds^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta, \tag{6}$$

mit

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial u^\beta}.$$

Nun können wir die Darbouxschen Formeln herleiten. Einer Flächenkurve kann man zwei n-Beine zuordnen, falls man die Kurve einmal als Raumkurve, und einmal als Flächenkurve betrachtet. Wir bezeichnen mit $\underset{(r)}{t^i}$ $(i, r = 1, \ldots, n)$ die Vektoren des räumlichen n-Beins und mit $\underset{(s)}{k^i}$ $(i, s = 1, \ldots, n)$ die Vektoren des n-Beins auf der Fläche. Es bestehen die Relationen

$$\underset{(s)}{k^i} = c_{sr} \underset{(r)}{t^i}. \tag{7}$$

Nach Voraussetzung ist $\underset{(1)}{k^i} = \underset{(1)}{t^i}$ daher ist $c_{1r} = \delta_{1r}$. Aus (7) folgt, daß

$$c_{sr} = g_{ij} \underset{(r)}{t^i} \underset{(s)}{k^j} = \cos(\underset{(r)}{t}, \underset{(s)}{k}) \tag{8}$$

ist. Die Matrix mit den Elementen c_{sr} ist orthogonal, da

$$g_{im} \underset{(s)}{k^i} \underset{(l)}{k^m} = g_{im} c_{sp} \underset{(p)}{t^i} c_{lr} \underset{(r)}{t^m} = c_{sp} c_{lr} g_{im} \underset{(p)}{t^i} \underset{(r)}{t^m},$$

also

$$\delta_{sl} \delta_{rp} = c_{sp} c_{lr} = c_{sr} c_{lr}$$

besteht. Bildet man in (7) die absolute Ableitung, so erhält man

$$\frac{D \underset{(s)}{k^i}}{ds} = c_{sr} \frac{D \underset{(r)}{t^i}}{ds} + \underset{(r)}{t^i} \frac{dc_{sr}}{ds}. \tag{9}$$

Unter Benützung der Frenetschen Formeln und des Ausdruckes $\underset{(r)}{t^i} = c_{sr} \underset{(s)}{k^i}$, kann man die Gleichung (9) in der Form

$$\frac{D \underset{(s)}{k^i}}{ds} = \left\{ \varkappa_{r-1} c_{s,r} c_{p,r-1} + \varkappa_r c_{s,r} c_{p,r+1} + c_{p,r} \frac{dc_{r,s}}{ds} \right\} \underset{(p)}{k^i} \tag{10}$$

schreiben. Die Vektoren $\underset{(s)}{k^i}$ sind Flächenvektoren, daher haben sie eine Darstellung mit den Flächenkomponenten

$$\underset{(s)}{k^i} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\varrho} \underset{(s)}{k^\varrho}. \tag{11}$$

Wir verwenden für die invariante Ableitung eines Flächenvektors die aus der Riemannschen Geometrie bekannte Formel

$$\frac{D \underset{(\sigma)}{k^i}}{ds} = \frac{\delta \underset{(\sigma)}{k^\varrho}}{ds} \frac{\partial x^i}{\partial u^\varrho} + N_\sigma \underset{(n)}{k^i} \tag{12}$$

wobei N_σ die durch

$$N_\sigma = b_{\alpha\beta} \underset{(1)}{k^\alpha} \underset{(\sigma)}{k^\beta}$$

definierten Normalkrümmungen der Fläche bedeuten; δ ist der invariante Operator bezüglich der Metrik $\gamma_{\alpha\beta}$; ferner sind die Größen

$$b_{\alpha\beta} = -\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{D n^i}{\partial u^\beta} = \frac{D^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} n^i$$

die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform der Fläche. Für sie bestehen die Relationen

$$b_{\alpha\beta} = -\gamma_{\alpha\beta}, \tag{13}$$

die man aus der Gleichung

$$\frac{D n_i^\varrho}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial n_i^\varrho}{\partial u^\alpha}$$

und aus $L^2(x^i(u^\alpha)) \equiv 1$ durch zweimalige Ableitung leicht herleiten kann. Auf Grund der Frenetschen Formeln und der Relationen

$$\gamma_{\alpha\beta} \underset{(1)}{k^\alpha} \underset{(\sigma)}{k^\beta} = \delta_{1\sigma}$$

bekommen wir aus (12) den Ausdruck

(14)

$$\frac{D \underset{(\sigma)}{k^i}}{ds} = \left[-\tau_{\sigma-1} \underset{(\sigma-1)}{k^\varrho} + \tau_\sigma \underset{(\sigma+1)}{k^\varrho} \right] \frac{\partial x^i}{\partial u^\varrho} - \gamma_{\alpha\beta} \underset{(1)}{k^\alpha} \underset{(\sigma)}{k^\beta} \underset{(n)}{k^i} = -\tau_{\sigma-1} \underset{(\sigma-1)}{k^i} + \tau_\sigma \underset{(\sigma+1)}{k^i} - \gamma_{\alpha\beta} \underset{(1)}{k^\alpha} \underset{(\sigma)}{k^\beta} \underset{(n)}{k^i}.$$

Daraus folgt, daß

$$N_\sigma = -\gamma_{\alpha\beta} \underset{(1)}{k^\alpha} \underset{(\sigma)}{k^\beta}$$

ist, also hat die erste Normalkrümmung den Wert -1, die anderen den Wert 0.

Den Ausdruck für $\frac{D\underset{(n)}{k^i}}{ds}$ erhält man folgendermaßen. Da $\underset{(n)}{k^i}$ der Normalvektor der Fläche ist, so gilt nach den Weingartenschen Formeln

$$\frac{D\underset{(n)}{k^i}}{ds} = -\, b^{\varrho}_{\alpha} \underset{(1)}{k^{\alpha}} \frac{\partial x^i}{\partial u^{\varrho}}.$$

Wir benützen die Darstellung der $\frac{\partial x^i}{\partial u^{\varrho}}$ mittels der $\underset{(\nu)}{k^{\varrho}}$:

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^{\varrho}} = p_{\nu\varrho} \underset{(\nu)}{k^{\sigma}} \frac{\partial x^i}{\partial u^{\sigma}}.$$

Multiplizieren wir mit $g_{ik} \frac{\partial x^k}{\partial u^{\mu}}$:

$$\gamma_{\varrho\mu} = \gamma_{\sigma\mu} p_{\nu\varrho} \underset{(\nu)}{k^{\sigma}}.$$

Daraus folgt

$$p_{\nu\varrho} = \gamma_{\varrho\mu} \underset{(\nu)}{k^{\mu}},$$

d. h.

$$\frac{D\underset{(n)}{k^i}}{ds} = \delta^{\varrho}_{\alpha} \gamma_{\varrho\mu} \underset{(1)}{k^{\alpha}} \underset{(\nu)}{k^{\mu}} = \underset{(1)}{k^i}.$$

Dann haben wir die folgende Formelgruppe:

$$(15)\qquad \begin{aligned}
\frac{D\underset{(1)}{k^i}}{ds} &= * + \tau_1 \underset{(2)}{k^i} + * - \underset{(n)}{k^i} \\
\frac{D\underset{(2)}{k^i}}{ds} &= -\tau_1 \underset{(1)}{k^i} + * + \tau_2 \underset{(3)}{k^i} + * \\
&\;\;\vdots \\
\frac{D\underset{(n-1)}{k^i}}{ds} &= \qquad * - \tau_{n-2} \underset{(n-2)}{k^i} + * \\
\frac{D\underset{(n)}{k^i}}{ds} &= \underset{(1)}{k^i} + * .
\end{aligned}$$

Der Vergleich von (10) und (15) ergibt die Gleichungen

$$(16)\qquad \begin{aligned}
\tau_1 &= \varkappa_1 c_{22} \\
\tau_{\nu} &= \varkappa_{i-1} \{ c_{\nu,\, i-1} c_{\nu+1,\, i} - c_{\nu,\, i} c_{\nu+1,\, i-1} \},
\end{aligned}$$

($\nu = 2, 3, \ldots, n-2,\ i = 3, 4, \ldots, n-1$, nicht summieren über ν!)

$$N_1 = \varkappa_1 c_{n2} = -1, \qquad \varkappa_1 = -\frac{1}{c_{n2}}, \tag{17}$$

$$\tau_1 = -\frac{c_{22}}{c_{n2}}, \tag{18}$$

$$N_\sigma = \varkappa_i \{c_{\sigma,i} c_{n,i+1} - c_{\sigma,i+1} c_{n,i}\} + c_{ni} \frac{dc_{\sigma i}}{ds} = 0 \tag{19}$$

($\sigma, i = 2, 3, \ldots, n-1$, nicht summieren über σ!). Aus (19) folgt

$$\varkappa_i = c_{ni} \frac{dc_{\sigma i}}{ds} \Big/ \{c_{\sigma,i+1} c_{ni} - c_{\sigma,i} c_{n,i+1}\}. \tag{20}$$

Die Zahlen auf der rechten Seite von (16) sind die Cosinus der Winkel zwischen den Ebenen $(\underset{(\nu)}{k}\ \underset{(\nu-1)}{k})$ und $(\underset{(i)}{t}\ \underset{(i+1)}{t})$. Ähnlicherweise sind die Größen auf der rechten Seite von (19) die Cosinus der Winkel zwischen $(\underset{(\sigma)}{k}\ \underset{(n)}{k})$ und $(\underset{(i)}{t}\ \underset{(i+1)}{t})$ [3] (insb. S. 801).

Bemerkungen: 1. In der euklidischen Geometrie ist die Formel bezüglich $\underset{(n)}{k^i}$ nichts anders, als die Rodrigues'sche Formel. Die letzte Gleichung im (15) zeigt, daß das für sphärische Kurven gewonnene Resultat bei uns für jede Kurve der Eichfläche gültig ist.

2. Ist $u^\alpha = u^\alpha(s)$ eine geodätische Kurve, dann ist definitionsgemäß

$$\frac{\delta \underset{(1)}{k^\alpha}}{ds} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{D \underset{(1)}{k^i}}{ds} = \varkappa_1 \underset{(2)}{t^i} = -\underset{(n)}{k^i}.$$

Daraus folgt, daß der Normalvektor der Fläche und der Hauptnormalvektor in einer Gerade liegen. Folglich sind die Größen c_{2i} Konstanten. Also sind in (19) (wegen $N_\sigma = 0$ und $\frac{dc_{2i}}{ds} = 0$) $\varkappa_i = 0 \quad (i = 2, 3, \ldots, n-1)$ und $\tau_\nu = 0$ ($\nu = 2, 3, \ldots, n-2$).

Jetzt fassen wir unsere Resultate zusammen.

a. Die erste räumliche Krümmung der Kurve ist $\varkappa_1 = -\dfrac{1}{c_{n2}}$.

b. Die anderen räumlichen Krümmungen der Kurve können nach Formel (20) bestimmt werden.

c. Die geodätische Krümmung der Kurve ist

$$\tau_1 = -\frac{c_{22}}{c_{n2}}.$$

d. Die Normalkrümmungen der Kurve sind Konstanten.

e. Die sich auf die sphärische Kurven beziehende RODRIGUES'sche Formel gilt in unserem Falle für jede Kurve.

f. Ist die Kurve eine Geodätische, dann ist $\varkappa_i = 0$ $(i = 2, \ldots, n-1)$ und $\tau_\nu = 0$ $(\nu = 2, \ldots, n-2)$.

Literatur

[1] D. LAUGWITZ, Eine Beziehung zwischen affiner und Minkowskischer Differentialgeometrie, *Publ. Math. Debrecen* **5** (1958), 72—76.

[2] O. VARGA, Die Krümmung der Eichfläche des Minkowskischen Raumes und die geometrische Deutung des einen Krümmungstensors des Finslerschen Raumes, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **20** (1955), 41—51.

[3] B. SEGRE, 7. Mehrdimensionale Räume (C. Algebraische Geometrie), *Encykl. d. math. Wiss.* III. 2. Teil, 2. Hälfte. A., Leipzig, 1921—1928.

(Eingegangen am 12. Oktober 1960.)