Über den inneren und induzierten Zusammenhang für Hyperflächen in Finslerschen Räumen

Herrn Prof. S. Gołąb zum 60. Geburstag gewidmet

Von O. VARGA (Budapest)

E. Cartan wies darauf hin, daß man in der Hyperflächentheorie in Finslerräumen — falls man dieselben als Linienelementmannigfaltigkeiten auffasst — diese, auf zwei verschiedene Weisen euklidisch zusammenhängend machen kann[1]). E. Cartan hat auch einige Sätze angegeben die sich hauptsächlich auf solche Invarianten von Flächenkurven beziehen, die für beide Zusammenhänge ungeändert bleiben.

In vorliegender Abhandlung bestimmen wir alle Hyperflächen für die, die beiden Zusammenhänge identisch sind. Wie Satz 2 zeigt gibt es nur zwei verschiedene Typen von Flächen dieser Art. Die einen sind die Totalgeodätischen, während die anderen durch ein besonderes Verhalten des A_{ijk} Tensors ausgezeichnet sind. Ein befriedigendes Bild über den Unterschied dieser beiden Flächenklassen bekommt man aber erst falls man zu jeder Stellung des Raumes die Existenz einer berührender Fläche der einen oder anderen Klasse fordert.

Es zeigt sich dann (Satz 3), daß die unbeschränkte Existenz von totalgeodätischen Flächen mit dem Finslerraum verträglich sind, während die unbeschränkte Existenz von Flächen der zweiten Klasse die Reduktion des Raumes auf einen Riemannschen nach sich zieht.

Im n-dimensionalen Finslerschen Raum F_n mit der Grundfunktion $L(x, dx)$ und dem zugehörigen Bogenelement

(1) $$ds = L(x, dx)$$

betrachten wir eine durch die Parameterdarstellung

(2) $$x^i = x^i(u^1, \dots, u^{n-1}) \qquad (i = 1, \dots, n)$$

bestimmte Hyperfläche.

[1]) Siehe E. Cartan, Les espaces de Finsler, (Actualités scientifiques et industrielles 79) *Paris,* 1934, 1—42, insbes. S. 24—26.

Nach E. CARTAN kann diese Hyperfläche auf zwei verschiedene Arten zu einer euklidisch zusammenhängenden Linienelementmannigfaltigkeit gemacht werden. Der erste, nach E. CARTAN als *induziert* bezeichnete *Zusammenhang* ist folgendermaßen definiert:

1) Der metrische Tensor der Hyperfläche ist die Projektion des räumlichen metrischen Tensors auf die Hyperfläche.

2) Das invariante Differential eines Hyperflächenvektors ist die Projektion des — im F_n erklärten — invarianten Differentials dieses Vektors auf die Hyperfläche.

Der zweite sogenannte *innere Zusammenhang* der Hyperfläche ist der aus der Grundfunktion

$$L(u, du) = L\left(x(u), \frac{\partial x(u)}{\partial u^\alpha} du^\alpha\right) \qquad (\alpha = 1, \ldots, n-1) \tag{3}$$

zu bildende E. CARTANsche Zusammenhang dieser Hyperfläche. Derselbe stempelt die Hyperfläche zu einer F_{n-1}. Sowohl der induzierte als der innere Zusammenhang besitzen denselben Maßtensor,[2]) was aus

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}(u, \dot{u}) &= g_{ik}\left(x(u), \frac{\partial x(u)}{\partial u^\sigma} \dot{u}^\sigma\right) x^i_\alpha x^k_\beta = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 L^2\left(x(u), \frac{\partial x}{\partial u^\sigma} \dot{u}^\sigma\right)}{\partial \dot{x}^i \, \partial \dot{x}^k} x^i_\alpha x^k_\beta = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 L^2(u, \dot{u})}{\partial \dot{u}^\alpha \, \partial \dot{u}^\beta}; \quad x^i_\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x^i}{\partial u^\sigma}. \end{aligned} \tag{3'}$$

trivialerweise folgt.

Die Übertragungsparameter des inneren Zusammenhanges sind durch

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta\gamma} &= L \cdot C_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \cdot L \frac{\partial \gamma^{\alpha\beta}}{\partial \dot{u}^\gamma} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot L\left(x(u), \frac{\partial x}{\partial u^\sigma} \dot{u}^\sigma\right) \cdot \frac{\partial g_{ik}\left(x(u), \frac{\partial x}{\partial u^\sigma} \dot{u}^\sigma\right)}{\partial \dot{x}^r} x^i_\alpha x^k_\beta x^r_\gamma = \\ &= L \cdot C_{ikr} x^i_\alpha x^k_\beta x^r_\gamma \end{aligned} \tag{4}$$

[2]) Siehe E. CARTAN a. a. O. S. 24—26, wo die hier benutzten Gleichungen (3′) und (4) schon vorkommen.

und

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} \right) + \tag{5}$$
$$+ C_{\alpha\gamma\mu} G^\mu_\beta - C_{\beta\gamma\mu} G^\mu_\alpha$$

bestimmt. Dabei sind die G^μ_α bekanntlich folgendermaßen bestimmt.

Werden die aus den EULER—LAGRANGEschen Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{1}{2} L^2\right) - \frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial u'^\alpha}\left(\frac{1}{2} L^2\right) = O \tag{6}$$

durch Auflösung nach den, hinsichtlich des Bogenparameters s gebildeten zweiten Ableitungen u''^α gewonnenen Relationen, in der Form

$$\frac{d^2 u^\alpha}{ds^2} = -2 G^\alpha$$

geschrieben, so ist

$$G^\mu_\alpha = \frac{\partial G^\mu(u, \dot{u})}{\partial \dot{u}^\alpha}. \tag{7}$$

Neben den Übertragungsparametern $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ werden auch die durch

$$\Gamma^*_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - C_{\alpha\beta\mu} G^\mu_\gamma \tag{8}$$

erklärten symmetrischen Parameter verwendet.

Um die Übertragungsparameter des induzierten Zusammenhanges zu erhalten, benötigen wir die Ableitungsgleichungen der Tangentenvektoren x^i_α der Hyperfläche sowie seines von jeweiligen Linienelement abhängigen Normaleinheitsvektors n^i.

Dazu gehen wir vom Ansatz

$$\begin{aligned} D x^i_\alpha &= \omega^\sigma_\alpha x^i_\sigma + \Theta_\alpha n^i \\ D n^i &= -\Theta^\sigma x^i_\sigma \end{aligned} \tag{9}$$

aus, wobei die ω^σ_α und Θ_α Pfaffsche Formen in den du^α und $d\dot{u}^\alpha$ sind. Da n^i senkrecht zu x^i_α ist, gilt natürlich

$$\Theta^\sigma = \gamma^{\sigma\alpha} \Theta_\alpha. \tag{10}$$

Ist ξ^α ein Hyperflächenvektor im Linienelement $(u, \dot{u})$, so ist sein invariantes Differential in der induzierten Übertragung gemäß der obigen Festsetzung gleich der Projektion des invarianten Differentials $D\xi^i$ des Vektors

$$\xi^i = x^i_\alpha \xi^\alpha \tag{11}$$

im Linienelement

$$x^i = x^i(u) \qquad (12)$$
$$\dot{x}^i = x^i_\alpha(u)\,\dot{u}^\alpha$$

auf die Hyperfläche. Beachten wir, daß der Operator D angewandt auf $\dot{u}^\alpha$ sich wie ein gewöhnliches Differential verhält, so kommt demnach

$$D\xi^i = (d\xi^\sigma + \omega^\sigma_\alpha \xi^\alpha)\, x^i_\sigma + \Theta_\alpha \xi^\alpha n^i. \qquad (13)$$

Die Projektion von $D\xi^i$ auf die Hyperfläche ergibt daher als invariantes Differential $\overset{(2)}{D}\xi^\sigma$ der induzierten Übertragung

$$\overset{(2)}{D}\xi^\sigma = d\xi^\sigma + \omega^\sigma_\alpha \xi^\alpha. \qquad (14)$$

Somit sind die Übertragungsparameter der induzierten Übertragung durch die Pfaffschen Formen ω^σ_α bestimmt. Wir weisen nun nach, daß dieser Zusammenhang metrisch ist d. h. daß

$$\overset{(2)}{D}\gamma_{\alpha\beta} = 0 \qquad (15)$$

gilt. Zum Beweis ist der Operator D auf (3′) anzuwenden und wie oben zu beachten, daß dieser Operator auf Hyperflächengrößen angewandt, sich wie ein gewöhnliches Differential verhält. Auf Grund dieser Bemerkung, so wie den Ableitungsgleichungen (9), folgt unmittelbar die mit (15) äquivalente Relation

$$d\gamma_{\alpha\beta} = g_{ik}\,\omega^\sigma_\alpha x^i_\sigma x^k_\beta + g_{ik}\,x^i_\alpha \omega^\sigma_\beta x^k_\sigma = \omega^\sigma_\alpha \gamma_{\sigma\beta} + \omega^\sigma_\beta \gamma_{\sigma\alpha}, \qquad (16)$$

die unsere Behauptung beinhaltet.

Wir gehen jetzt dazu über, den Zusammenhang zwischen der induzierten und inneren Übertragung festzustellen. Dazu müssen wir zunächst die in den Ableitungsgleichungen auftretenden Pfaffschen Formen, durch die räumlichen Übertragungsparameter und solche Größen ausdrücken, die sich durch Differentiation der $x^i(u)$ von (2) ergeben. Führen wir die Ausdrücke

$$\omega^\sigma_\alpha = K^\sigma_{\alpha\beta}\,du^\beta + Q^\sigma_{\alpha\beta}\,d\dot{u}^\beta \qquad (17)$$
$$\Theta_\alpha = \overset{(1)}{\Theta}_{\alpha\beta}\,du^\beta + \frac{1}{L}\cdot \overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta}\,d\dot{u}^\beta$$

in (9) ein und vergleichen die Koeffizienten von du^β und $d\dot{u}^\beta$ mit den entsprechenden Koeffizienten von

$$Dx^i_\alpha = (x^i_{\alpha\beta} + \Gamma^{\,i}_{jk}\,x^j_\alpha x^k_\beta + C^i_{jk}\,x^j_\alpha x^k_{\mu\beta}\,\dot{u}^\mu)\,du^\beta + \qquad (18)$$
$$+ C^i_{jk}\,x^j_\alpha x^k_\beta\,d\dot{u}^\beta; \quad x^k_{\mu\beta} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial u^\mu\,\partial u^\beta}.$$

Beachten wir die Gleichungen (3) und (4), so erhalten wir

$$(19)\qquad \begin{aligned}\gamma_{\sigma\varrho} K^{\sigma}_{\alpha\beta} &= g_{ir}(x^i_{\alpha\beta} + \Gamma^i_{jk} x^j_\alpha x^k_\beta + C^i_{jk} x^j_\alpha x^k_{\mu\beta} \dot{u}^\mu) x^r_\varrho \\ \overset{(1)}{\Theta}_{\alpha\beta} &= (x^i_{\alpha\beta} + \Gamma^i_{jk} x^j_\alpha x^k_\beta + C^i_{jk} x^j_\alpha x^k_{\mu\beta} \dot{u}^\mu) n_i \\ Q^{\sigma}_{\alpha\beta} &= C^{\sigma}_{\alpha\beta} \\ \overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta} &= L \cdot C^i_{jk} x^j_\alpha x^k_\beta n_i = A^i_{jk} x^j_\alpha x^k_\beta n_i .\end{aligned}$$

Die Größen $\overset{(1)}{\Theta}_{\alpha\beta}$ stellen somit keinen Tensor dar, hingegen gilt dies von $\overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta}$. Dieser Tensor ist symmetrisch und es gilt

$$(20)\qquad \overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha = O \qquad (\overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta} = \overset{(2)}{\Theta}_{\beta\alpha}).$$

Wir vermerken noch, daß für die Krümmungsform

$$(21)\qquad O_\beta \overset{\text{def}}{=} \overset{(1)}{\Theta}_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha = (x^i_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha + G^i_k x^k_\beta) n^i ,$$

und die Normalkrümmung N

$$(22)\qquad N \overset{\text{def}}{=} \overset{(1)}{\Theta}_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = (x^i_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + 2 G^i) n_i$$

gilt. Weiter erhalten wir aus der Formelgruppe (19) falls

$$(23)\qquad K^{\sigma}_\beta \overset{\text{def}}{=} K^{\sigma}_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha$$

und

$$(24)\qquad K^\sigma \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \cdot K^{\sigma}_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta$$

gesetzt wird,

$$(25)\qquad \gamma_{\sigma\varrho} K^{\sigma}_\beta = g_{ir}(x^i_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha + G^i_k x^k_\beta) x^r_\varrho ,$$

und

$$(26)\qquad \gamma_{\sigma\varrho} K^\sigma = g_{ir}\left(\frac{1}{2}\, x^i_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + G^i\right) x^r_\varrho .$$

Somit sind $\omega^{\sigma}_\alpha l^\alpha$ und $\Theta_\alpha l^\alpha$ Pfaffsche Formen allein in den du^α und es gilt

$$(27)\qquad D l^i = \left(d l^\sigma + \frac{1}{L} K^{\sigma}_\beta du^\beta\right) x^i_\sigma + (\Theta_\alpha l^\alpha) n^i = \overset{(2)}{D} l^\sigma x^i_\sigma + \frac{1}{L} O_\beta du^\beta n^i .$$

Wir beweisen, daß für die Parameter der induzierten und inneren Übertragung

$$(28)\qquad G^\sigma = K^\sigma$$

gilt. Zum Beweis hat man

$$(29)\qquad 2 G_\alpha \overset{\text{def}}{=} 2 \gamma_{\alpha\beta} G^\beta = \frac{\partial\left(\frac{1}{2} L^2\right)}{\partial \dot{u}^\alpha \partial \dot{u}^\mu}\, \dot{u}^\mu - \frac{\partial\left(\frac{1}{2} L^2\right)}{\partial u^\alpha}$$

mit Hilfe von (3), durch die Ableitungen von L hinsichtlich x^i und $\dot{x}^i$ auszudrücken. Dies führt zu

$$(30)\qquad 2G_\alpha = g_{ir} x^i_{\mu\sigma} \dot{u}^\mu \dot{u}^\sigma x^r_\alpha + \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{2}L^2\right)}{\partial \dot{x}^r \partial x^k} \dot{x}^k - \frac{\partial\left(\frac{1}{2}L^2\right)}{\partial x^r} \right) x^r_\alpha .$$

Wegen der Definition von G^i kommt somit:

$$(31)\qquad 2\gamma_{\alpha\beta} G^\beta = 2G_\alpha = g_{ik}(x^i_{\mu\sigma}\dot{u}^\mu \dot{u}^\sigma + 2G^i) x^k_\alpha .$$

Diese Gleichung zusammen mit (26) enthält die Behauptung (28).

Führen wir das zu dem n-Bein x^i_α, n^i adjungierte n-Bein x^α_i, n_i ein, so gilt für dasselbe

$$(32)\qquad \begin{aligned} x^i_\alpha x^\beta_i &= \delta^\beta_\alpha, \quad n^i x^\beta_i = 0 \\ x^i_\alpha x^\alpha_k &= \delta^i_k - n^i n_k . \end{aligned}$$

Für x^β_i gilt die Darstellung

$$(33)\qquad x^\beta_i = g_{ik} \gamma^{\beta\alpha} x^k_\alpha .$$

Überschieben wir die Gleichung (31) mit $\gamma^{\varkappa\alpha}$, so erhalten wir

$$(34)\qquad 2G^\varkappa = (x^i_{\mu\sigma} \dot{u}^\mu \dot{u}^\sigma + 2G^i) x^\varkappa_i .$$

Wir wollen jetzt den Zusammenhang zwischen den Objekten G^β_ϱ und K^β_ϱ herstellen. Dazu überschieben wir zunächst (34) mit $C_{\alpha\beta\varkappa}$ und beachten die Relationen (32), sowie die Definitionsgleichungen (22) und (19) von N bzw. $\overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta}$. Dies gibt

$$(35)\qquad 2C_{\alpha\beta\varrho} G^\beta = 2C_{iks} G^i x^k_\alpha x^s_\varrho - \frac{1}{L} \overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\varrho} N + C_{iks} x^i_{\mu\sigma} \dot{u}^\mu \dot{u}^\sigma x^k_\alpha x^s_\varrho .$$

Differentiation von (31) hinsichtlich $\dot{u}^\gamma$, gibt bei Beachtung von (35) und (25) die gewünschten Relationen

$$(36)\qquad \gamma_{\alpha\beta} G^\beta_\varrho = \gamma_{\alpha\beta} K^\beta_\varrho + \frac{1}{L} \overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\varrho} \cdot N,$$

die man auch in der Form

$$(37)\qquad G^\beta_\varrho = K^\beta_\varrho + \frac{1}{L} \overset{(2)}{\Theta}{}^\beta_\varrho \cdot N$$

darstellen kann. Aus den Ableitungsgleichungen (17) und der Formelgruppe (19) folgt die Gleichung

$$(38)\qquad x^i_{\varrho\mu} \dot{u}^\mu = K^\sigma_\varrho x^i_\sigma - G^i_s x^s_\varrho + O_\varrho n^i .$$

Eliminieren wir aus dieser Gleichung K_ϱ^σ vermöge (37), so kommt

$$x^i_{\varrho\mu}\,\dot u^\mu = G^\sigma_\varrho x^i_\sigma - G^i_s x^s_\varrho - \frac{N}{L}\overset{(2)}{\Theta}{}^\sigma_\varrho x^i_\sigma + O_\varrho n^i. \tag{39}$$

Wir können nun den Zusammenhang zwischen den Parametern $\Gamma_{\alpha\varrho\beta}$ und $K_{\alpha\varrho\beta}$ des inneren bzw. äußeren Zusammenhanges angeben. Dazu berechnen wir bei festgehaltenem $\dot u^\alpha$ die gewöhnlichen Christoffelschen Symbole erster Art $[\alpha\varrho\beta]$ der $\gamma_{\alpha\beta}$. Unter Benützung der Gleichungen (3) ergibt eine einfache Rechnung

$$\begin{aligned}[\alpha\varrho\beta] = {} & g_{ik}\,x^k_{\alpha\beta}x^i_\varrho + [irk]\,x^i_\alpha x^r_\varrho x^k_\beta + \\ & + C_{ikr}x^k_\alpha x^r_{\mu\beta}\,\dot u^\mu x^i_\varrho + C_{ikr}x^i_\beta x^k_\varrho x^r_{\mu\alpha}\,\dot u^\mu - C_{ikr}x^i_\alpha x^k_\beta x^r_{\mu\varrho}\,\dot u^\mu.\end{aligned} \tag{40}$$

$+ C_{ikr}x_\alpha x_{\mu\beta}\,u\, x_\varrho + C_{ikr}x_\beta x_\varrho x_{\mu\alpha}\,u - C_{ikr}x_\alpha x_\beta x_{\mu\varrho}\,\dot u^\mu.$

Führen wir in dieser Gleichung für $x^\sigma_{\mu\beta}\dot u^\mu$ die Ausdrücke aus (39) ein, so ergibt sich schließlich

$$\Gamma_{\alpha\varrho\beta} = K_{\alpha\varrho\beta} + \frac{N}{L}\left(C_{\alpha\beta\sigma}\overset{(2)}{\Theta}{}^\sigma_\varrho - C_{\beta\varrho\sigma}\overset{(2)}{\Theta}{}^\sigma_\alpha\right) + \frac{1}{L}\left(O_\alpha\overset{(2)}{\Theta}_{\beta\varrho} - O_\varrho\overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta}\right). \tag{41}$$

Aus den Relationen (37) folgt als notwendige Bedingung für die Übereinstimmung des induzierten und inneren Zusammenhanges, daß entweder die Normalkrümmung N oder der Tensor $\overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta}$ verschwinden muß. Aus (41) folgt bisher nur, daß das Verschwinden von $\overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta}$ auch eine hinreichende Bedingung ist. Wir beweisen nun folgendes

Lemma. *Verschwindet die Normalkrümmung N einer Hyperfläche dann verschwindet auch ihre Normalkrümmungsform O_α.*

Daß aus dem Verschwinden der Normalkrümmungsform die der Normalkrümmung folgt, ist eine triviale Folgerung aus den Definitionen (21) und (22) dieser Größen.

Beweis. Betrachten wir statt der Parameterdarstellung (2) der Hyperfläche eine implizite Darstellung

$$\Phi(x^1, \ldots, x^n) = 0 \tag{43}$$

derselben, so folgt aus der Identität

$$\Phi(x(u)) \equiv 0 \tag{43}$$

durch Differentiation

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\,x^i_\alpha = 0 \tag{44}$$

Demnach ist

$$\Phi_i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial\Phi}{\partial x^i} \tag{45}$$

Normalvektor für ein beliebiges Linienelement der Hyperfläche. Der Einheitsnormalvektor für ein Linienelement l^i der Hyperfläche ist somit

$$n_i = \frac{1}{\sqrt{g^{rk}\Phi_r\Phi_k}} \cdot \Phi_i = \frac{1}{C} \cdot \Phi_i. \tag{46}$$

Für die Größen

$$\bar{\Theta}_{\alpha\beta} = C \cdot \overset{(1)}{\Theta}_{\alpha\beta} = C \cdot (x^i_{\alpha\beta} + \Gamma^i_{jk} x^j_\alpha \dot{x}^k_\beta + C^i_{jk} x^j_\alpha x^k_{\mu\beta} \dot{u}^\mu)\Phi_i \tag{47}$$

gilt wegen der Voraussetzung des Lemmas

$$\bar{\Theta}_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta \equiv 0 \tag{48}$$

und demnach auch

$$\frac{\partial\,\bar{\Theta}_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta}{\partial\,\dot{u}^\gamma} = 0. \tag{49}$$

Aus dieser Gleichung folgt wegen (47)

$$(x^i_{\alpha\gamma}\dot{u}^\alpha + G^i_j x^j_\gamma)\Phi_i \equiv 0. \tag{50}$$

Demnach ist wegen (47) und (21) auch

$$O_\gamma = 0 \tag{51}$$

w. z. b. w.

Aus unserem Lemma folgt somit:

Diejenigen Flächen, für die die induzierte und innere Übertragung übereinstimmen, sind entweder diejenigen, für die der Tensor $\overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta}$, oder die Normalkrümmungsform O_α verschwindet.

Wir wollen jetzt eine geometrische Deutung derjenigen Flächen geben für die die Normalkrümmungsform verschwindet. Dazu bringen wir die rechte Seite der Ableitungsgleichung (9) auf eine invariante Form in der die Pfaffschen Formen ω^σ_α und O_α nicht als Formen in du^α und $d\dot{u}^\alpha$ sondern als Formen in du^α und $\overset{(1)}{D}l^\alpha$ dargestellt werden, wobei

$$\overset{(1)}{D}l^\alpha = dl^\alpha + \frac{1}{L} G^\alpha_\beta du^\beta \tag{52}$$

ist. Nach dieser Umschreibung erhalten wir

$$Dx^i_\alpha = (K^{*\sigma}_{\alpha\beta} du^\beta + A^\sigma_{\alpha\beta}\overset{(1)}{D}l^\beta)x^i_\sigma + (\overset{(1)}{\Theta}{}^*_{\alpha\beta} du^\beta + \overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta}\overset{(1)}{D}l^\beta). \tag{53}$$

Dabei ist

$$K^{*\sigma}_{\alpha\beta} = K^\sigma_{\alpha\beta} - C^\sigma_{\alpha\mu} G^\mu_\beta, \tag{54}$$

$$\overset{(1)}{\Theta}{}^*_{\alpha\beta} = \overset{(1)}{\Theta}_{\alpha\beta} - \frac{1}{L}\overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\mu} G^\mu_\beta. \tag{55}$$

Es gilt wegen (54) und (55)

$$K^{*\sigma}_{\beta} \overset{\text{def}}{=} K^{*\sigma}_{\alpha\beta}\dot{u}^{\alpha} = K^{\sigma}_{\beta},$$
$$\overset{(1)}{\Theta}{}^{*}_{\alpha\beta}\dot{u}^{\alpha} = \overset{(1)}{\Theta}_{\alpha\beta}\dot{u}^{\alpha} = O_{\beta}. \tag{56}$$

Die $\overset{(1)}{\Theta}{}^{*}_{\alpha\beta}$ stellen einen Tensor dar. Für das invariante Differential des Hyperflächenvektors ξ^{α} mit den räumlichen Komponenten ξ^{i} gilt jetzt

$$D\xi^{i} = \overset{(2)}{D}\xi^{\sigma}x^{i}_{\sigma} + (\overset{(1)}{\Theta}{}^{*}_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}du^{\beta} + \overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}\overset{(1)}{D}l^{\beta})n^{i},$$
$$\overset{(2)}{D}\xi^{\sigma} = d\xi^{\sigma} + K^{*\sigma}_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}du^{\beta} + A^{\sigma}_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}\overset{(1)}{D}l^{\beta} \tag{57}$$

Wählen wir eine auf ihre Bogenlänge s als Parameter bezogene Kurve

$$u^{\alpha} = u^{\alpha}(s) \tag{58}$$

und als Stützelement ihre Tangentenvektoren

$$\dot{u}^{\alpha} = \frac{du^{\alpha}}{ds}, \tag{59}$$

so folgt

$$\frac{D^2x^i}{ds^2} = \frac{\overset{(2)}{D}{}^2u^{\sigma}}{ds^2}x^{i}_{\sigma} + N\cdot n^{i}. \tag{60}$$

Verschwindet N so ist wegen (28)

$$\frac{\overset{(2)}{D}{}^2u^{\sigma}}{ds^2} = \frac{\overset{(1)}{D}{}^2u^{\sigma}}{ds^2}. \tag{61}$$

Aus (60) und (61) folgt, daß eine geodätische Linie der Hyperfläche dann und nur dann auch eine räumliche geodätische Linie ist und umgekehrt falls

$$N \equiv 0. \tag{62}$$

Daraus und wegen Lemma 1 folgt

Satz 1. *Eine Hyperfläche ist dann und nur dann totalgeodätisch, falls ihre Normalkrümmungsform identisch verschwindet.*

Das Verschwinden von $\overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta}$ hat folgende Bedeutung. Ist t^{i} ein beliebiger Hyperflächenvektor und n^{i} der im gleichen Linienelement erklärte Normaleinheitsvektor, dann ist

$$A_{ijk}t^{j}n^{k} = \alpha n^{i}. \tag{63}$$

Aus dem Lemma, den Gleichungen (41) und den unmittelbar danach ausgeführten, sowie aus Satz 1 folgt

Satz 2. *Diejenigen Hyperflächen, für die die innere und induzierte Metrik übereinstimmen, sind entweder totalgeodätische Flächen, oder solche Flächen, für die der Tensor* $\overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta}$ *identisch verschwindet.*

Den Unterschied dieser zwei Flächentypen können wir dann übersehen, falls wir fragen, wann es zu jeder $(n-1)$-Stellung mindestens eine Fläche des einen oder des anderen Typus gibt.

Soll es zu jeder Flächenstellung eine Fläche mit verschwindendem $\overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta}$ Tensor geben dann muß der Tensor A_{ijk} verschwinden. Um dies einzusehen hat man nur bei festem Linienelement $(n-1)$ zu einander orthogonale $(n-1)$ Stellungen zu wählen und die Gleichung (63) zu beachten. Der Raum ist sonach ein Riemannscher.

Der Fall, daß es unbeschränkt totalgeodätische Flächen gibt, zieht, wie an anderer Stelle bewiesen wurde[3]) nach sich, daß der Raum ein Finslerscher von konstanter Krümmung ist. Daraus folgt

Satz 3. *Soll in einem Finslerschen Raum der kein Riemannscher sei, zu jeder* $(n-1)$*-Stellung eine Hyperfläche existieren für die die innere und induzierte Metrik übereinstimmen dann müssen die Hyperflächen totalgeodätisch sein.*

Zusatz bei der Korrektur. Als diese Arbeit im Druck war, bemerkte ich, daß auf S. 211—214. des Buches *The Differential Geometry of Finsler Spaces* von H. RUND eine Relation zwischen den Übertragungsparametern des inneren und induzierten Zusammenhanges angegeben ist. Die Formel unterscheidet sich von der von uns gefundenen. Diesem Umstand ist es wohl zuzuschreiben, daß die in meiner Arbeit sich an diese Formel anschließenden Ergebnisse in dem zitierten Buch nicht zu finden sind.

(Eingegangen am 5. Dezember 1960.)

[3]) Siehe O. VARGA, Über eine Charakterisierung der Finslerschen Räume konstanter Krümmung, *Monatsh. Math.* 65.