Über die bahntreuen Abbildungen affinzusammenhängender Räume

Von A. RAPCSÁK (Debrecen)

1. Gegeben sei ein affinzusammenhängender Bahnraum[1]) P_n und das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -2G^i(x, \dot{x}) \tag{1}$$

der Bahnen.[2]) In (1) soll $G^i(x, v)$ in v^i positiv homogen zweiten Grades sein.

Bekanntlich[3]) ist eine Transformation G, welche einen Bahnraum $\overline{P}_n$ in einen Bahnraum P_n überführt, dann und nur dann bahntreu, falls

$$\overline{G}^i(x, v) = G^i(x, v) + p(x, v)v^i \tag{2}$$

gilt, wobei $p(x, v)$ eine in v^i positiv homogene skalare Funktion ersten Grades ist.

2. Wir beweisen den folgenden Satz:

Satz 1. *Damit sich ein affinzusammenhängender Bahnraum $\overline{P}_n$ auf einem Bahnraum P_n bahntreu abbilden lasse, ist das Erfüllstein der folgenden Identitäten notwendig und hinreichend:*

$$\overline{W}^i_{jkl} = W^i_{jkl}, \tag{3_1}$$

$$\begin{aligned} \overline{W}^i_{hjk\,\overline{|}\,i} - W^i_{hjk\,|\,i} = {} & \frac{n-2}{n+1} W^r_{hjk}(\overline{G}^i_{ir} - G^i_{ir}) \\ & - \frac{1}{n+1} W^r_{hjs} v^s (\overline{G}^m_{mkr} - G^m_{mkr}) - \\ & - \frac{1}{n+1} W^r_{sjk} v^s (\overline{G}^m_{mhr} - G^m_{mhr}) - \\ & - \frac{1}{n+1} W^r_{hsk} v^s (\overline{G}^m_{mjr} - G^m_{mjr}) \end{aligned} \tag{3_2}$$

---

[1]) Es sei $n \geqq 3$.

[2]) Alle in dieser Arbeit auftretenden Funktionen seien in ihren Variablen zumindest dreimal stetig differentierbar.

[3]) S. z. B. BERWALD [1].

$$(3_3)\qquad \bar{D}^i_{hjk} = D^i_{hjk}$$

$$(3_4)\qquad \bar{D}^i_{hjk\uparrow i} - D^i_{hjk\mid i} = \frac{n-1}{n+1} D^r_{hjk}(\bar{G}^i_{ir} - G^i_{ir}).$$

In den Identitäten (3) sind die Größen $\bar{T}^i_j$ Größen des Raumes $\bar{P}_n$,

$$G^i_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial G^i}{\partial v^j}, \quad G^i_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial G^i_j}{\partial v^k}, \ldots,$$

$$T^i_{j\mid k} = \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} - \frac{\partial T^i_j}{\partial v^r} G^r_k - T^i_r G^r_{jk} + T^r_j G^i_{rk},$$

$$\bar{T}^i_{j\uparrow k} = \frac{\partial \bar{T}^i_j}{\partial x^k} - \frac{\partial \bar{T}^i_j}{\partial v^r} \bar{G}^r_k - \bar{T}^i_r \bar{G}^r_{jk} + \bar{T}^r_j \bar{G}^i_{rk},$$

$$(4)\qquad W^i_{hjk} = K^i_{hjk} + \frac{1}{n+1}\delta^i_h(K_{jk} - K_{kj}) +$$

$$+ \frac{1}{n^2-1}\delta^i_j(nK_{hk} - K_{kh}) - \frac{1}{n^2-1}\delta^i_k(nK_{hj} + K_{jh}) +$$

$$+ \frac{1}{n+1}\frac{\partial(K_{jk} - K_{kj})}{\partial v^h} v^i + \frac{1}{n^2-1}\delta^i_j \frac{\partial K_{km}}{\partial v^h} v^m - \frac{1}{n^2-1}\delta^i_k \frac{\partial K_{jm}}{\partial v^h} v^m,$$

$$(5)\qquad D^i_{hjk} = \frac{\partial^3}{\partial v^h \partial v^j \partial v^k}\left(G^i - \frac{1}{n+1} G^r_r\right),$$

$$(6)\qquad K^i_{hjk} = \frac{\partial G^i_{hj}}{\partial x^k} - \frac{\partial G^i_{hk}}{\partial x^j} - G^i_{hjr} G^r_k + G^i_{hkr} G^r_j + G^i_{kr} G^r_{hj} - G^i_{jr} G^r_{hk}.$$

$$(7)\qquad K_{hj} = K_{h\ jr}^{\ r}.$$

In (4) bedeutet W^i_{hjk} den verallgemeinerten Weylschen Tensor [4]), in (5) D^i_{hjk} den Douglasschen Tensor [4]), und in (6) K^i_{hjk} den Berwaldschen Krümmungstensor. [5])

Beweis. Die Notwendigkeit der im Satz ausgesprochenen Bedingung ergibt sich auf Grund von (2) durch eine Rechnung, falls noch

$$\frac{\partial p}{\partial v^s} \stackrel{\text{def}}{=} p_j = \frac{1}{n+1}(\bar{G}^r_{rj} - G^r_{rj})$$

gesetzt wird. Nehmen wir umgekehrt an, daß die Identitäten (3) erfüllt sind. Zwecks Vereinfachung des Beweisganges führen wir K. Yano [6]) folgend ein

[4]) S. J. Douglas [2] (δ^i_j: das Kroneckersche Symbol).

[5]) S. z. B. L. Berwald [1].

[6]) S. z. B. K. Yano [6], 194—199.

solches neues Koeffizientensystem für den Zusammenhang ein, aus dessen Transformationsformel das den Ausdruck

$$p_{ij} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial p_j}{\partial v^i}$$

enthaltendes Glied fehlt.

Es sei nämlich

$$G^{*i}_{jk} \overset{\text{def}}{=} G^i_{jk} - \frac{1}{n+1} G^s_{sjk} v^i. \tag{8}$$

Offenbar ist G^{*i}_{jk} eine positive homogene Funktion 0-ten Grades in v^i, deren Koordinatentransformationsformel mit der Transformationsformel von G^i_{jk} übereinstimmt, so dass man mit G^{*i}_{jk} den Krümmungstensor (6) (in Zeichen: K^{*i}_{jkl}, K^*_{hj}) und die kovariante Ableitung (in Zeichen: T^i_{j*k}) bilden kann.

Aus (6) und (8) folgt:

$$K^{*h}_{ijk} = K^h_{ijk} + \frac{1}{n+1} (G^s_{sjk|i} - G^s_{sji|k}) v^h. \tag{9}$$

Auf Grund von (2) und von (8) können wir also unseren Satz folgendermaßen formulieren: $\overline{P}_n$ läßt sich dann und nur dann auf P_n abbilden, falls es einen kontravarianten Vektor $p_j = \dfrac{\partial P}{\partial v^j}$ gibt, für welchen

$$\overline{G}^{*i}_{jk} = G^{*i}_{jk} + p_j \delta^i_k + p_k \delta^i_j \tag{10$_1$}$$

gilt. Wir bestimmen zuerst die kovariante Ableitung bzw. diejenige hinsichtlich v^k von p_j.

Aus (10_1) erhalten wir:

$$\frac{\partial p_j}{\partial v^k} = \frac{1}{n+1} [\overline{G}^s_{sjk} - G^s_{sjk}]. \tag{10$_2$}$$

Anderseits ergibt sich auf Grund von (9), (6) und (2):

$$\overline{K}^{*h}_{ijk} - K^{*h}_{ijk} = p_{j*k} \delta^h - p_{j*i} \delta^h_k + (p_{i*k} - p_{k*i}) \delta^h_j - \left(\frac{\partial G^{*h}_{ij}}{\partial v^k} - \frac{\partial G^{*h}_{kj}}{\partial v^i} \right) p_s v^s. \tag{12}$$

Indem wir die Indizes h und k kontrahieren, erhalten wir:

$$\overline{K}^*_{ij} - K^*_{ij} = n p_{j*i} + p_{i*j} + \frac{n-1}{n+1} G^r_{rij} p_s v^s. \tag{13}$$

Indem wir jetzt (13) durch n multiplizieren, die Indizes i und j vertauschen und sodann den erhaltenen Ausdruck zu (13) addieren, erhalten wir:

$$p_{i*j} = -\frac{1}{n^2-1} [(n \overline{K}^*_{ji} + \overline{K}^*_{ij}) - (n K^*_{ji} + K^*_{ij})] + \frac{1}{n+1} G^s_{sij} v^r p_r. \tag{10$_3$}$$

Die Gleichungssysteme (10_1), (10_2) und (10_3) bestimmen offenbar ein Thomas—Veblensches gemischtes System.[7]) Zwekcs Untersuchung der Integrierbarkeit des Systems bilden wir die Integrierbarkeitsbedingungen von (10_2) und (10_3). Dazu benutzen wir die Gleichungen (10_2) und (10_3) sowie die folgenden Vertauschungsformeln:

$$T^k_{l*n*m} - T^k_{l*m*n} = K^k_{nmr} T^r_l - K^r_{nml} T^k_r - K^r_{nms} v^s \frac{\partial T^k_l}{\partial v^r}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial T^k_{l*m}}{\partial v^n} - \frac{\partial T^k_l}{\partial v^n} * m = H^k_{nmr} T^r_l - H^r_{nml} T^k_r - H^r_{nms} v^s \frac{\partial T^k_l}{\partial v^r} \tag{14}$$

wobei

$$H^i_{jkl} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial G^{*i}_{kl}}{\partial v^j}$$

gilt. Auf Grund der Gleichungen (10_2), (10_3), (13), (14), (4) und (5) erhalten wir:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{n^2-1}(n\overline{K}^*_{kj} + \overline{K}^*_{jk})_{\bar{*}l} + \frac{1}{n^2-1}(nK^*_{kj} + K^*_{jk})_{*l} + \\ &+\frac{1}{n^2-1}(n\overline{K}^*_{lj} + \overline{K}^*_{jl})_{\bar{*}l} - \frac{1}{n^2-1}(nK^*_{lj} + K^*_{jl})_{*k} + \\ &+\frac{1}{n+1}(\overline{K}^{*r}_{slk} v^s \overline{G}^m_{mrj} - K^{*r}_{slk} G_{mrj}) + \\ &+ W^r_{klj} p_r = 0, \end{aligned} \tag{15$_1$}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n^2-1}\left(n\frac{\partial \overline{K}^*_{kj}}{\partial v^l} + \frac{\partial \overline{K}^*_{jk}}{\partial v^l}\right) + \frac{1}{n^2-1}\left(n\frac{\partial K^*_{kj}}{\partial v^l} + \frac{\partial K^*_{jk}}{\partial v^l}\right) - \\ &-\frac{1}{n+1}\overline{G}^r_{rlj\bar{*}k} + \frac{1}{n+1}G^r_{rlj*k} + \frac{1}{n+1}\frac{\partial \overline{G}^{*r}_{ks}}{\partial v^s} v^s \overline{G}^m_{mrj} - \\ &-\frac{1}{n+1}\frac{\partial G^{*r}_{kj}}{\partial v^l} v^s G^m_{mrj} + D^r_{kjl} p_r = 0. \end{aligned} \tag{15$_2$}$$

(In (15) und (16) bezeichnet $T^i_{j\bar{*}k}$ die Kovariante Ableitung nach $\overline{G}^{*i}_{jk}$!)

Leiten wir jetzt (10_1) zuerst auf kovariante Weise und dann hinsichtlich v^i ab, und machen wir von (10_2) und (10_3) Gebrauch, so erhalten wir:

$$\overline{W}^i_{jkl} = W^i_{jkl} \tag{16$_1$}$$

$$\overline{D}^i_{jkl} = D^i_{jkl}. \tag{16$_2$}$$

---

[7]) Thomas—Veblen [4].

(16_1) und (16_2) sind Folgen von (3_1) und (3_2). Wir zeigen noch, daß (15_1) und (15_2) Folgen von (3_1), (3_2), (3_3) und (3_4) sind.

Bekanntlich gilt für den Krümmungstensor (6) die folgende Bianchische Identität.[8]

$$K^h_{ijk|l}+K^h_{ilj|k}+K^h_{ikl|j}+K^m_{sjk}v^s G^h_{mil}+K^m_{slj}v^s G^h_{mik}+K^m_{skl}v^s G^h_{mij}=0. \tag{17}$$

Durch kovariante Derivation von (4) erhalten wir auf Grund von (5), (9) und (8):

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2-1}(nK^*_{kj}-K^*_{jk})_{*l}+\frac{1}{n^2-1}(nK^*_{lj}+K^*_{jl})_{*k}+\\ +K^{*r}_{slk}v^s G^m_{mrj}=\frac{1}{n-2}[-W^r_{klj*r}-W^r_{skm}v^s\cdot D^m_{ljr}+W^r_{slm}v^s D^m_{kjr}].\end{aligned} \tag{18}$$

Durch kovariante Derivation von (5) ergibt sich wegen (8) und (9):

$$\begin{aligned}-\frac{1}{n^2-1}\left(n\frac{\partial K^*_{kj}}{\partial v^l}+\frac{\partial K^*_{jk}}{\partial v^l}\right)-\frac{1}{n+1}G^r_{rlj*k}+\\ +\frac{1}{n+1}\frac{\partial G^{*r}_{ks}}{\partial v^l}v^s G^m_{mrj}=-\frac{1}{n-1}D^r_{klj*r}.\end{aligned} \tag{19}$$

Wie aus den Identitäten (18) und (19) ersichtlich, folgen (15_1) und (15_2) aus den Gleichungssystemen (3_1), (3_2), (3_3) und (3_4). Damit haben wir unseren Satz vollständig bewiesen.

Aus dem Satz 1. folgt der

Satz 2. *Im Falle bahntreuer Abbildungen bilden die Größen* W^i_{jkl}, D^i_{jkl} *und ihre Ableitung nach* v^i, *sowie ihre mit den Größen*

$$\Pi^i_{jk}=G^i_{jk}-\frac{1}{n+1}(G^h_{hk}\delta^i_j+G^h_{hj}\delta^i_k+G^h_{hjk}v^i)$$

gebildeten kovarianten Ableitungen ein vollständiges Invariantensystem.[9])

---

[8]) L. Berwald [1].

[9]) (3_2) und (3_4) können auch so geschrieben werden:

$$\overline{W}^r_{hjk\bar{;}r}=W^r_{hjk;r},\quad \bar{D}^r_{hjk\bar{;}r}=D^r_{hjk;r},$$

hier bedeutet $\bar{;}$ die kovariante Derivation nach $\overline{\Pi}^i_{jk}$, und ; diejenige nach Π^i_{jk}. Wie man leicht einsieht sind diese kovarianten Derivationen im allgemeinen keine Tensoren mehr.

Literatur

[1] L. BERWALD, Über Finslersche und Cartansche Geometrie IV., *Ann. of Math.* **48** (1947), 753—781.

2] J. DOUGLAS, The general geometry of paths, *Ann. of Math.* **29** (1928), 143—168.

[3] M. S. KNEBELMAN, Collineations and motions in generalized spaces, *Amer. J. Math.* **51** (1929), 527—564.

[4] J. M. THOMAS and O. VEBLEN, Projective invariants of affine geometry of paths, *Ann. of Math.* **27** (1926), 279—296.

[5] K. YANO, Les espaces d'éléments linéaires a connexion projective normale et la géométrie projective générale des paths, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* **24** (1942), 7—24.

6] K. YANO, The theory of Lie derivatives and its applications, *Amsterdam*, 1955.

(Eingegangen am 30. Dezember 1960.)