Topologische Untersuchung gewisser Substitutionsgruppen*)

Von I. GY. MAURER (Cluj)

1. Einleitung

Diese Mitteilung enthält Verallgemeinerungen einiger Ergebnisse, die wir bezüglich der Topologisierung der unendlichen Permutationsgruppen und der unendlichen monomialen Gruppen[1] in mehreren Mitteilungen veröffentlicht haben ([3]—[7]). Wir benützten in den zitierten Arbeiten für die Einführung einer gewissen Topologie in die obengenannten Substitutionsgruppen abzählbare Folgen (also Folgen von Typus ω, wobei ω die erste Ordinalzahl in der zweiten Klasse ist), deren Konvergenz wir in geeigneter Weise definiert hatten. Wir beschäftigen uns in dieser Mitteilung mit der Topologisierung dieser Gruppen durch *transfinite Folgen* (also Folgen von Typus α, wobei α eine beliebige Ordinalzahl ist) und wir bestimmen — im Funktion der betrachteten transfiniten Folgen — alle Normalteiler der vollständigen unendlichen Permutationsgruppe und monomialen Gruppe.

Die Wichtigkeit der Topologisierung der obigen Gruppen folgt aus der Tatsache, daß jede abstrakte Gruppe durch eine Permutationsgruppe bzw. eine monomiale Gruppe darstellbar ist. Durch die Topologisierung der obigen Gruppen haben wir also eine Methode zur Topologisierung einer beliebigen abstrakten Gruppe erhalten.

Unser Interesse für die Topologisierung durch transfinite Folgen — deren Wichtigkeit z. B. aus der Arbeit [2] BIRKHOFF's erhellt — ist von Akademiker GR. C. MOISIL (Bukarest) erregt worden. Wir wollen für dies Herrn MOISIL auch hier Dank sagen.

BEMERKUNGEN: 1. In dieser Arbeit ist die Gültigkeit des Auswahlaxioms vorausgesetzt.

2. Wir werden die Bezeichnungen von Abschnitt 2 und 3 ohne Beru-

*) Vorgelegt am II. Ungarischen Mathematischen Kongreß (August 1960).

1) Für die Definition dieser Gruppen s. Abschnitt 2.

fung benützen. Andere — im Abschnitt 4 oft gebrauchten Bezeichnungen — werden in Fußnoten erklärt.

3. Der Abschnitt 5 enthält viele Rechnungen mit Kardinalzahlen. Für diese s. etwa [8].

2. Grundbegriffe

Unter einer unendlichen Permutation versteht man eine eineindeutige Abbildung einer beliebigen unendlichen Menge M von der Mächtigkeit $\aleph_\mu$. Die Elemente dieser Menge können als eine transfinite Folge von Typus φ geschrieben werden:

$$m_0, m_1, \ldots, m_\xi, \ldots \quad (\xi < \varphi).$$

Man kann diese Folge — vom Standpunkt der Permutationen — durch die Folge

$$0, 1, \ldots, \xi, \ldots \quad (\xi < \varphi) \tag{1}$$

von Ordinalzahlen ersetzen. Man bezeichnet diese Menge der Ordinalzahlen auch mit M.

Wenn man das Produkt zweier Permutationen auf dieselbe Weise definiert wie im Falle endlicher Permutationen, so beweißt man leicht, daß die Menge P aller Permutationen von M eine Gruppe bezüglich dieser Operation bildet. Man nennt diese Gruppe die *vollständige Permutationsgruppe* der Menge M.

Wir bilden mit den Elementen einer beliebigen abstrakten Gruppe G alle möglichen Folgen

$$a_0, a_1, \ldots, a_\xi, \ldots \quad (\xi < \varphi) \tag{2}$$

vom Typus φ (die Elemente der Folge können auch gleich sein). Eine solche Folge wird mit $a = \{a_\xi\}_{\xi<\varphi}$ und die Menge dieser Folgen mit $\{G\}$ bezeichnet.

Die Gleichheit und das Produkt zweier Elemente $a = \{a_\xi\}_{\xi<\varphi}$ und $b = \{b_\xi\}_{\xi<\varphi}$ von $\{G\}$ werden folgendermaßen definiert:

$$a = b \Leftrightarrow a_\xi = b_\xi \text{ für alle } \xi \in M \tag{3}$$

und

$$ab = \{a_\xi b_\xi\}_{\xi<\varphi}. \tag{4}$$

Man bezeichnet mit $(a; \pi)$ ein beliebiges Element des kartesischen Produktes

$$P(G) = P \times \{G\}, \tag{5}$$

wobei $a = \{G\}$ und $\pi \in P$ ist. Definiert man die Gleichheit und das Produkt zweier beliebigen Elemente $(a;\pi)$, $(b;\sigma)\in P(G)$ durch

$$(a;\pi)=(b;\sigma)\Leftrightarrow a=b,\pi=\sigma \tag{6}$$

und

$$(a;\pi)(b;\sigma)=(ab_\pi;\pi\sigma), \tag{7}$$

wobei $ab_\pi=\{a_\xi b_{\pi(\xi)}\}$ ist, so ist die Menge $P(G)$ eine Gruppe [6], die sogenannte *vollständige monomiale Gruppe*. Das Einselement dieser Gruppe ist $(e;\varepsilon)=(e,\ldots,e,\ldots;\varepsilon)$, wobei e bzw. ε das Einselement der Gruppe G bzw. P ist.

3. Eine Topologisierung der Gruppen P und $P(G)$

Es sei $\{\pi_\varrho\}_{\varrho<\alpha}$ eine Folge vom Typus α, wobei $\pi_\varrho\in P$ und $\omega\leqq\alpha\leqq\varphi$ ist. Wir führen in P eine Topologie auf Grund des folgenden Grenzbegriffes ein:

Die Folge $\{\pi_\varrho\}_{\varrho<\alpha}$ hat den Grenzwert $\pi\in P$, wenn für ein beliebiges Element $\xi\in M$ eine Ordinalzahl λ_ξ existiert, so daß die Gleichheit $\pi_\varrho(\xi)=\pi(\xi)$ für alle $\varrho>\lambda_\xi$ gilt. In diesem Falle ist die Folge $\{\pi_\varrho\}_{\varrho<\alpha}$ konvergent, gegenfalls divergent genannt. Im Konvergenzfalle schreiben wir: $\lim\limits_{\varrho<\alpha}\pi_\varrho=\pi$ oder $\pi_\varrho\to\pi$.

Man kann — mit geringer Modifikation der, im Falle $\alpha=\omega$ in [4] angewandten Methoden — die Gültigkeit der folgenden Eigenschaften beweisen:

(A) *Wenn $\pi_\varrho\to\pi$ und $\kappa_\varrho<\kappa_{\varrho+1}$ $(\varrho<\alpha)$ ist, dann gilt $\pi_{\kappa_\varrho}\to\pi$.*

(B) *Wenn $\pi_\varrho=\pi$ $(\varrho<\alpha)$ ist, dann gilt $\pi_\varrho\to\pi$.*

(C) *Wenn*

$$\{\pi_{\varrho 1}\}_{\varrho<\alpha},\ \{\pi_{\varrho 2}\}_{\varrho<\alpha},\ \ldots,\ \{\pi_{\varrho\kappa}\}_{\varrho<\alpha},\ \ldots\quad(\kappa<\alpha)$$

konvergente Folgen in P sind und wenn die Folge $\{\pi_\kappa\}_{\kappa<\alpha}$ der Grenzwerte der obigen Folgen konvergent ist und $\pi_\kappa\to\pi$ gilt, dann kann aus der Tafel, die durch die Glieder der obigen Folgen gebildet wird, eine konvergente Folge ausgewählt werden, so daß der Grenzwert dieser Folge gleich π ist.

(D) *Aus $\pi_\varrho\to\pi$ und $\pi'_\varrho\to\pi'$ folgt $\pi_\varrho\pi'_\varrho\to\pi\pi'$.*

(E) *Aus $\pi_\varrho\to\pi$ folgt $\pi_\varrho^{-1}\to\pi^{-1}$.*

Aus den Eigenschaften (A), (B) und (C) folgt leicht, daß für P die Axiome von Riesz—Kuratowski gültig sind, woraus folgt, daß *P ein topologischer Raum ist.* Aus den Eigenschaften (C) und (D) folgt, daß die Gruppenoperation in P stetig ist. Also, gilt der folgende Satz:

Satz 1. *P ist eine topologische Gruppe.*

Wir gehen für die Einführung einer Topologie in $P(G)$ aus der folgenden Definition aus:

Eine Folge $\{a^{(\varrho)}\}_{\varrho<\alpha}$, *wobei* $a^{(\varrho)} \in \{G\}$ $(\varrho<\alpha)$ *ist, hat den Grenzwert* $a \in \{G\}$, *wenn für ein beliebiges Element* $\xi \in M$ *eine Ordinalzahl* λ_ξ *existiert, so daß die Gleichheit* $a_\xi^{(\varrho)} = a_\xi$ *für alle* $\varrho > \lambda_\xi$ *gilt.* Im Konvergenzfalle schreiben wir: $\lim\limits_{\varrho<\alpha} a^{(\varrho)} = a$, oder $a^{(\varrho)} \to a$.

Wir hatten schon in [6] bewiesen, daß der Grenzbegriff in $\{G\}$ im wesentlichen mit dem Grenzbegriffe in P identisch ist. Da P ein topologischer Raum bezüglich dieses Grenzbegriffes ist, so ist auf Grund der früheren Bemerkung auch $\{G\}$ *ein topologischer Raum.*

Nun können wir *einen Grenzbegriff in* $P(G)$ *auf Grund der folgenden Gleichheit definieren:*

$$\lim_{\varrho<\alpha} (a^{(\varrho)}; \pi_\varrho) = (\lim_{\varrho<\alpha} a^{(\varrho)}; \lim_{\varrho<\alpha} \pi_\varrho). \tag{8}$$

Im Konvergenzfalle schreiben wir: $\lim\limits_{\varrho<\alpha} (a^{(\varrho)}; \pi_\varrho) = (a; \pi)$ oder $(a^{(\varrho)}; \pi_\varrho) \to (a; \pi)$.

Da P und $\{G\}$ topologische Räumen sind, folgt auf Grund der Definition (8), daß auch $P(G)$ *ein topologischer Raum ist.*

Man kann mit geringer Modifikation, der im Falle $\alpha = \omega$, in [6] angewandten Methoden — die Gültigkeit der folgenden Propositionen beweisen:

(a) *Aus* $a^{(\varrho)} \to a$ *und* $b^{(\varrho)} \to b$ *folgt* $a^{(\varrho)} b^{(\varrho)} \to ab$.

(b) *Aus* $\pi_\varrho \to \pi$ *und* $b^{(\varrho)} \to b$ *folgt* $b_\pi^{(\varrho)} \to b_\pi$.

Man kann auf Grund dieser Propositionen die folgenden Eigenschaften leicht beweisen:

(D′) *Aus* $(a^{(\varrho)}; \pi_\varrho) \to (a; \pi)$ *und* $(b^{(\varrho)}; \sigma_\varrho) \to (b; \sigma)$, *folgt*

$$(a^{(\varrho)}; \pi_\varrho)(b^{(\varrho)}; \sigma_\varrho) \to (a; \pi)(b; \sigma).$$

(E′) *Aus* $(a^{(\varrho)}; \pi_\varrho) \to (a; \pi)$, *folgt* $(a^{(\varrho)}; \pi_\varrho)^{-1} \to (a; \pi)^{-1}$.

Es folgt aus diesen Eigenschaften die Stetigkeit der Gruppenoperationen in $P(G)$. Wir können also den folgenden Satz aussprechen:

Satz 2. $P(G)$ *ist eine topologische Gruppe.*

4. Die Normalteiler der topologischen Gruppen P und $P(G)$

Den Ausgangspunkt für die Bestimmung aller Normalteiler der topologischen Gruppe P bildet das folgende Ergebnis R. Baer's [1]:

Alle Normalteiler der abstrakten Permutationsgruppe P sind in der Folge

$$\{\varepsilon\} \subset A \subset P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_\nu \subset \cdots \subset P_\mu \subset P \tag{9}$$

enthalten. Hierbei ist P_ν (ν ist eine Ordinalzahl, $0 \leqq \nu \leqq \mu$) die Menge der

Elemente π von P für welche $\overline{\overline{M}}_\pi < \aleph_\nu$[2]); P_0 ist die Menge der endlichen Permutationen von P und A die Untermenge von P_0, welche alle geraden Permutationen aus P_0 enthält.

Wir müssen also, um unseres Problem zu lösen, diejenigen Glieder der Folge (9) auswählen, die mit ihren geschlossenen Hüllen[3]) zusammenfallen.

Nun können wir den folgenden Satz aussprechen:

Satz 3. *Die echten Normalteiler der topologischen Gruppe P sind diejenigen und nur diejenigen Glieder P_ν der Folge* (9), *für welche die Ordinalzahlen ν die folgenden Bedingungen erfüllen:* 1° $\aleph_\nu > \overline{\alpha}$[4]) *und daneben* 2° *die Ordinalzahlen ν sind entweder von erster Gattung*[5]), *oder sind derartige Ordinalzahlen von zweiter Gattung, die keine Grenzwerte von Folgen vom Typus α sind.*

Wir wollen dem Beweise dieses Satzes zwei Hilfsätze vorauschiecken:

Hilfssatz 1. *Ist $\{\pi_\varrho\}_{\varrho<\alpha}$ eine konvergente Folge in P ($\pi_\varrho \in P$ für $\varrho < \alpha$) und $\pi_\varrho \to \pi$, so gelten die folgenden Relationen:*[6])

a) $M'_{\pi_\varrho} \subseteq M_{\pi_\varrho}$ $(\varrho < \alpha)$

b) $M'_{\pi_\varrho} \subseteq M'_{\pi_{\varrho+1}}$ $(\varrho < \alpha)$

c) $M_\pi = M'_{\pi_0} \cup (\bigcup\limits_{\varrho<\alpha} M_\varrho)$,

wobei $M_\varrho = M'_{\pi_{\varrho+1}} - M'_{\pi_\varrho}$ $(\varrho < \alpha)$ ist und die Mengen M'_{π_0} und M_ϱ $(\varrho < \alpha)$ paarweise elementfremd sind.

Beweis. Die Relation a) (die nicht nur für konvergenten Folgen gilt), folgt aus der Gleichheit $M'_{\pi_\varrho} = M_{\pi_\varrho} \cap M_{\pi_{\varrho+1}} \cap \ldots$, die leicht festgestellt werden kann. Die Relationen b) und c) folgen leicht aus der Definition der Konvergenz der Folge $\{\pi_\varrho\}_{\varrho<\alpha}$.

Folgerung.

$$\overline{\overline{M}}_\pi = \overline{\overline{M'}}_{\pi_0} + \sum_{\varrho<\alpha} \overline{\overline{M}}_\varrho, \quad \textit{wobei} \quad \overline{\overline{M'}}_{\pi_0} \leqq \overline{\overline{M}}_{\pi_0}, \overline{\overline{M}}_\varrho \leqq \overline{\overline{M}}_{\pi_\varrho} \ (\varrho < \alpha) \tag{10}$$

---

[2]) M_π bezeichnet die Menge der Elemente $\pi \in P$, für welche $\pi(\xi) \neq \xi$ ist; $\overline{\overline{M}}_\pi$ bezeichnet die Mächtigkeit der Menge M_π.

[3]) Die geschlossene Hülle einer Menge M wird mit $\overline{M}$ bezeichnet.

[4]) $\overline{\alpha}$ bezeichnet die Mächtigkeit der Ordinalzahl α, also die Mächtigkeit der Ordinalzahlen $0, 1, \ldots, \xi, \ldots$, $(\xi < \alpha)$; zB. $\varphi = \aleph_\mu$.

[5]) Wir erinnern daran, daß eine Ordinalzahl ν erster Gattung genannt wird, wenn es eine Ordinalzahl ν' gibt, so daß $\nu' + 1 = \nu$. Im gegenfall heißt ν eine Ordinalzahl zweiter Gattung.

[6]) Man bezeichnet mit M'_{π_ϱ} die Gesamtheit der Elemente $\xi \in M$, für welche $\pi_\varrho(\xi) = \pi_{\varrho+1}(\xi) = \ldots$ ist, und die von ξ verschieden sind.

Hilfssatz 2. *Wenn die Glieder π_ϱ $(\varrho < \alpha)$ der konvergenten Folge $\{\pi_\varrho\}_{\varrho<\alpha}$ die Bedingung $\overline{\overline{M}}_{\pi_\varrho} < \aleph_\nu$ erfüllen und $\bar{\bar{\alpha}} \geqq \aleph_\nu$ ist, dann kann man diese Folge durch eine Folge vom Typus ω_ν[7]) ersetzen, deren Grezwert mit dem Grenzwert der Folge $\{\pi_\varrho\}_{\varrho<\alpha}$ übereinstimmt.*

Beweis. Es folgt aus der Konvergenz der Folge $\{\pi_\varrho\}_{\varrho<\alpha}$, daß $M'_{\pi_{\varrho+1}} \supseteqq M'_{\pi_\varrho}$ für alle $\varrho<\alpha$ ist (Hilfssatz 1,b)). Wir wählen aus den Gliedern der Folge $\{\pi_\varrho\}_{\varrho<\alpha}$ nur diejenigen Glieder π_{ϱ_κ}, für welche die Bedingung

$$(11) \qquad M'_{\pi_{\varrho_{\kappa+1}}} \supset M'_{\pi_{\varrho_\kappa}}$$

also

$$(11') \qquad M_\kappa = M'_{\pi_{\varrho_{\kappa+1}}} - M'_{\pi_{\varrho_\kappa}} \neq \emptyset$$

erfüllt ist[8]). Diese Permutationen bilden eine Folge $\{\pi_\varrho\}_{\kappa<\beta}$ — wobei β der Typus dieser Folge bezeichnet —, deren Grenzwert offenbar mit dem Grenzwert der Folge $\{\pi_\varrho\}_{\varrho<\alpha}$ übereinstimmt. Es gilt: $\beta \leqq \omega_\nu$. Nämlich, es sei $\beta > \omega_\nu$. Dann gelten für die Permutationen

$$(12) \qquad \pi_{\varrho_{\omega_\nu}}, \pi_{\varrho_{\omega_\nu+1}}, \pi_{\varrho_{\omega_\nu+2}}, \ldots$$

der Folge $\{\pi_{\varrho_\kappa}\}_{\kappa<\beta}$, die Beziehungen

$$(13) \qquad \overline{\overline{M'}}_{\pi_{\varrho_{\omega_\nu}}} \geqq \aleph_\nu, \ \overline{\overline{M'}}_{\pi_{\varrho_{\omega_\nu}+1}} \geqq \aleph_\nu, \ \overline{\overline{M'}}_{\pi_{\varrho_{\omega_\nu}+2}} \geqq \aleph_\nu, \ldots,$$

also, wegen a) Hilfssatz 1, auch die Ungleichheiten

$$(14) \qquad \overline{\overline{M}}_{\pi_{\varrho_{\omega_\nu}}} \geqq \aleph_\nu, \ \overline{\overline{M}}_{\pi_{\varrho_{\omega_\nu+1}}} \geqq \aleph_\nu, \ \overline{\overline{M}}_{\pi_{\varrho_{\omega_\nu+2}}} \geqq \aleph_\nu, \ldots,$$

die unserer Voraussetzung wiedersprechen. Es ist also $\beta \leqq \omega_\nu$, und da eine Folge vom Typus $\beta < \omega_\nu$ — unter Einschaltung gleicher Glieder — immer als eine Folge vom Typus ω_ν aufgefaßt werden kann, so ist der Hilfssatz 2 bewiesen.

Wir können zum Beweis des Satzes 3 übergehen. Dieser wird in mehreren Schritten geführt:

1. *Es gilt:* $\bar{A} \neq A$ und $\bar{P}_0 \neq P_0$.

Beweis. Man kann eine konvergente Folge $\{\pi_\varrho\}_{\varrho<\alpha}$ in A bzw. in P_0 ($\pi_\varrho \in A$ bzw. $\pi_\varrho \in P$ für alle $\varrho<\alpha$), durch eine Folge vom Typus ω ersetzen, denn in diesen Fällen ist $\overline{\overline{M}}_{\pi_\varrho} < \aleph_0$ für alle $\varrho<\alpha$ (Hilfssatz 2). Wir bilden eine

[7]) ω_ν bezeichnet das erste Element der Klasse $Z(\aleph_\nu)$, wobei $Z(\aleph_\nu)$ die Klasse der Ordinalzahlen bedeutet, deren Mächtigkeit $\aleph_\nu$ ist. Wir werden statt ω_0 — wie üblich — ω schreiben.

[8]) $\emptyset$ bezeichnet die leere Menge.

Folge $\{\pi_\varrho\}_{\varrho<\omega}$ — deren Glieder Elemente der Gruppe $A \subset P_0$ sind, nach der Vorschrift:

$$\pi_0 = \varepsilon, \quad \pi_\varrho = (1, 2)(3, 4)\dots(2\cdot 2\varrho - 1, 2\cdot 2\varrho)\cdot \pi'_\varrho \tag{15}$$

für $1 \leqq \varrho < \omega$, wobei π'_ϱ die identische Abbildung der Menge $M - H(\varrho)$ [9]) $=$ $= \{\varrho, \varrho+1, \dots, \omega, \dots, \xi, \dots\}$ bedeutet. Dann ist die Folge $\{\pi_\varrho\}_{\varrho<\omega}$ konvergent und hat den Grenzwert:

$$\pi = \prod_{\varrho<\omega} (\varrho, \varrho+1)\cdot \pi', \tag{16}$$

wobei π' die identische Abbildung der Menge $M - H(\omega)$ bedeutet. Nämlich, es sei ξ eine beliebige, die Bedingung $1 \leqq \xi < \omega$ erfüllende (also natürliche) Zahl und ξ' die erste, die Bedingungen $\xi' < \xi$ und $\xi' \equiv 0 \pmod 4$ erfüllende Zahl. Dann gilt für $\varrho > \frac{\xi'}{4} = \lambda_\xi$, daß $\pi_\varrho(\xi) = \pi(\xi)$ ist. Also, es ist $\pi_\varrho \to \pi$. Da $\overline{\overline{M}}_\pi = \aleph_0$ ist, so ist $\pi \notin P_0$ (und dann offenbar $\pi \notin A$). Es gelten also $\bar{A} \neq A$ und $\bar{P} \neq P_0$.

2. $\bar{P}_\nu \neq P_\nu$, *wenn ν eine derartige Ordinalzahl ist, dass* $\aleph_\nu \leqq \bar{\alpha}$.

Beweis. Da $\bar{\alpha} \geqq \aleph_\nu$ ist, kann man eine konvergente Folge $\{\pi_\varrho\}_{\varrho<\alpha}$ mit $\pi_\varrho \in P_\nu$ $(\varrho < \alpha)$ durch eine Folge vom Typus ω_ν ersetzen (Hilfssatz 2). Wir bilden eine Folge $\{\pi_\varrho\}_{\varrho<\omega_\nu}$ nach der Vorschrift:

$$M_{\pi_\varrho} = H(\varrho) \quad \text{für} \quad \varrho < \omega_\nu \quad (H(0) = \emptyset). \tag{17}$$

Dann gilt

$$\overline{\overline{M}}_{\pi_\varrho} = \overline{\overline{H(\varrho)}} < \aleph_\nu \qquad (\varrho < \omega_\nu), \tag{18}$$

also es ist $\pi_\varrho \in P_\nu$ $(\varrho < \omega_\nu)$.

Man kann auf Grund der Definition der Konvergenz leicht einsehen, daß diese Folge konvergent ist und für den Grenzwert π der Folge gilt

$$M_\pi = H(\omega_\nu). \tag{19}$$

Es folgt, daß

$$\overline{\overline{M}}_\pi = \bar{\omega}_\nu = \aleph_\nu \tag{20}$$

ist, woraus sich $\pi \notin P_\nu$ ergibt, w. z. b. w.

3. $\bar{P}_\nu = P_\nu$, *wenn $\bar{\alpha} < \aleph_\nu$ und daneben ν eine Ordinalzahl erster Gattung ist.*

Beweis. Es sei $\{\pi_\varrho\}_{\varrho<\alpha}$ eine konvergente Folge, wobei $\pi_\varrho \in P_\nu$ $(\varrho < \alpha)$ ist. Wegen dieser letzten Voraussetzung, gilt $\overline{\overline{M}}_{\pi_\varrho} < \aleph_\nu$ $(\varrho < \alpha)$.

---

[9]) $H(\varrho)$ bezeichnet die Menge (das „Intervall") $0, 1, \dots, \xi, \dots$ $(\xi < \varphi)$.

Ist ν eine Ordinalzahl erster Gattung, also von der Form $\nu = \nu' + 1$, so schließt man auf

$$\overline{\overline{M}}_{\pi_\varrho} \leqq \aleph_{\nu'} \ (\varrho < \alpha). \tag{20}$$

Daraus folgt auf Grund der Formel (10)

$$\overline{\overline{M}}_\pi \leqq \aleph_{\nu'} + \overline{\alpha} \cdot \aleph_{\nu'}. \tag{21}$$

Es sei $\overline{\alpha} = \aleph_\sigma$. Da $\overline{\alpha} < \aleph_\nu$, also $\aleph_\sigma < \aleph_\nu = \aleph_{\nu'+1}$ ist, gilt $\sigma < \nu = \nu' + 1$, also $\sigma \leqq \nu'$. Daraus folgt, daß $\aleph_\sigma \cdot \aleph_{\nu'} = \aleph_{\nu'}$, also

$$\overline{\overline{M}}_\pi \leqq \aleph_{\nu'} + \aleph_{\nu'} = 2\aleph_{\nu'} \leqq \aleph_{\nu'}^2 = \aleph_{\nu'} < \aleph_\nu, \tag{22}$$

und somit $\pi \in P_\nu$ ist, w. z. b. w.

4. *Es gilt $\overline{P}_\nu \neq P_\nu$, wenn $\overline{\alpha} < \aleph_\nu$ ist, und die Ordinalzahl ν eine derartige Ordinalzahl zweiter Gattung ist, die den Grenzwert einer Folge vom Typus α darstellt.*

Beweis. Wir haben im Sinne der Voraussetzungen:

$$\nu = \lim_{\xi < \nu} \xi \tag{23}$$

und

$$\nu = \lim_{\varrho < \alpha} \xi_\varrho. \tag{24}$$

Die Ordinalzahlen ξ_ϱ $(\varrho < \alpha)$ erfüllen offenbar die Ungleichheiten $\xi_\varrho < \nu$ und $\xi_\varrho < \xi_{\varrho+1}$ $(\varrho < \alpha)$.

Wir bilden gewisse Permutationen π_ϱ $(\varrho < \alpha)$ nach den Vorschriften:

1.

$$M_{\pi_\varrho} = \bigcup_{\kappa \leqq \varrho} N_\kappa \ (\varrho < \alpha), \tag{25}$$

wobei die Mengen N_κ $(\kappa \leqq \varrho)$ solche Untermengen der Menge M sind, die die Bedingungen

$$\overline{\overline{N}}_\kappa = \kappa_{\xi_\kappa} \ (\kappa \leqq \varrho) \tag{26}$$

und

$$N_\kappa \cap N_\lambda = \emptyset \qquad (0 \leqq \kappa, \lambda \leqq \varrho;\ \kappa \neq \lambda) \tag{27}$$

erfüllen;

2.

$$\pi_\varrho(\xi) = \pi_\kappa(\xi), \text{ wenn für alle } \kappa < \varrho,\ \xi \in \bigcup_{\lambda \leqq \kappa} N_\lambda \text{ ist.} \tag{28}$$

Wir beweisen zuerst, daß $\pi_\varrho \in P_\nu$ ist. Es gilt im Sinne der Vorschrift 1, daß

$$\overline{\overline{M}}_{\pi_\varrho} = \sum_{\kappa \leqq \varrho} \overline{\overline{N}}_\kappa = \sum_{\kappa \leqq \varrho} \aleph_{\xi_\kappa} \tag{29}$$

ist. Man muß zwei Fälle unterscheiden, je nachdem ξ_ϱ eine Ordinalzahl erster oder zweiter Gattung ist. Ist ξ_ϱ eine Ordinalzahl erster Gattung, so gilt:

$$\overline{\overline{M}}_{\pi_\varrho} = \sum_{\kappa \leqq \varrho} \aleph_{\xi_\kappa} \leqq \sum_{\kappa \leqq \xi_\varrho} \aleph_\kappa = \aleph_{\xi_\varrho}. \tag{30}$$

Ist ξ_ϱ eine Ordinalzahl zweiter Gattung, so gilt:

$$\overline{\overline{M}}_{\pi_\varrho} = \sum_{\kappa < \varrho} \aleph_{\xi_\kappa} + \aleph_{\xi_\varrho} \leqq \sum_{\kappa < \xi_\varrho} \aleph_\kappa + \aleph_{\xi_\varrho} = \aleph_{\xi_\varrho} + \aleph_{\xi_\varrho} = 2\aleph_{\xi_\varrho} \leqq \aleph_{\xi_\varrho}^2 = \aleph_{\xi_\varrho}. \tag{30'}$$

Es gilt also

$$\overline{\overline{M}}_{\pi_\varrho} \leqq \aleph_{\xi_\varrho}, \tag{31}$$

unabhängig von der Tatsache, daß ξ_ϱ eine Ordinalzahl erster, oder zweiter Gattung ist. Wenn man diese Ungleichheit mit der Ungleichheit

$$\overline{\overline{M}}_{\pi_\varrho} \geqq \aleph_{\xi_\varrho} \tag{32}$$

vergleicht (diese Ungleichheit gilt offenbar wegen der Vorschrift 1), dann gelangt man zur Gleichheit

$$\overline{\overline{M}}_{\pi_\varrho} = \aleph_{\xi_\varrho}. \tag{33}$$

Da $\xi_\varrho < \nu$ ist, gilt

$$\overline{\overline{M}}_{\pi_\varrho} = \aleph_{\xi_\varrho} < \aleph_\nu. \tag{34}$$

Das heißt, daß $\pi_\varrho \in P_\nu$ $(\varrho < \alpha)$ ist.

Wir bilden nun die Folge $\{\pi_\varrho\}_{\varrho<\alpha}$. Es ist leicht zu ersehen, daß diese Folge — deren Glieder zu P_ν gehören — konvergent ist und daß sein Grenzwert π durch die Gleichheit

$$M_\pi = \bigcup_{\varrho < \alpha} N_\varrho \tag{35}$$

charakterisiert ist.

Es muß noch gezeigt werden, daß $\pi \in P_{\nu+1}$, aber $\pi \notin P_\nu$ ist. Man kann auf Grund der Formeln (23) und (24) die folgende Relation gewinnen:

$$\sum_{\varrho < \alpha} \aleph_{\xi_\varrho} = \sum_{\xi < \nu} \aleph_\xi. \tag{36}$$

Wir bilden zwecks Herleitung dieser Relation die Summen

$$S_\varrho = \sum_{\xi < \xi_\varrho} \aleph_\xi + \aleph_{\xi_\varrho} \qquad (\varrho < \alpha). \tag{37}$$

Da — nach ähnlichen Rechnungen, wie wir sie in dem ersten Teil unseres Beweises für $\overline{\overline{M}}_{\pi_\varrho}$ geführt haben —

$$S_\varrho = \aleph_{\xi_\varrho} \qquad (\varrho < \alpha) \tag{38}$$

ist, folgt

$$\sum_{\varrho<\alpha} \aleph_{\xi_\varrho} = \sum_{\varrho<\alpha} S_\varrho . \tag{39}$$

Dann bekommt man unter Verwendung der offenbar gültigen Relation

$$\sum_{\xi<\nu} \aleph_\xi \geqq \sum_{\varrho<\alpha} \aleph_{\xi_\varrho} \tag{40}$$

die Ungleichheit

$$\sum_{\varrho<\alpha} S_\varrho \leqq \sum_{\xi<\nu} \aleph_\xi . \tag{41}$$

Es folgt andererseits aus der Struktur der Summen S_ϱ und aus den Bedingungen (23) und (23), daß

$$\sum_{\varrho<\alpha} S_\varrho \geqq \sum_{\xi<\nu} \aleph_\xi \tag{42}$$

ist. Wenn wir diese zwei letztere Ungleichheiten vergleichen, so erhalten wir

$$\sum_{\varrho<\alpha} S_\varrho = \sum_{\xi<\nu} \aleph_\xi . \tag{43}$$

Es folgt aus den Formeln (39) und (43), daß die Relation (36) gilt. Aber es ist bekannt, daß

$$\sum_{\xi<\nu} \aleph_\xi = \aleph_\nu \tag{44}$$

ist. Nun können wir auf Grund der Formeln (35), (36) und (44) auf die folgende Gleichheit schließen:

$$\overline{\overline{M}}_\pi = \sum_{\varrho<\alpha} \aleph_{\xi_\varrho} = \sum_{\xi<\nu} \aleph_\xi = \aleph_\nu . \tag{45}$$

Das heißt, daß $\pi \in P_{\nu+1}$ und $\pi \notin P_\nu$ ist, w. z. b. w.

5. *Es gilt* $\overline{P}_\nu = P_\nu$, *wenn* $\overline{\overline{\alpha}} < \aleph_\nu$ *ist, und die Ordinalzahl* ν *eine derartige Ordinalzahl zweiter Gattung ist, die keinen Grenzwert von Folgen vom Typus* α *darstellt.*

Beweis. Es sei $\{\pi_\varrho\}_{\varrho<\alpha}$ eine beliebige konvergente Folge, so daß $\pi_\varrho \in P_\nu$ $(\varrho<\alpha)$ ist. Man bezeichnet mit π den Grenzwert dieser Folge. Da wegen $\pi_\varrho \in P_\nu$ $(\varrho<\alpha)$, $\overline{\overline{M}}_{\pi_\varrho} < \aleph_\nu$ $(\varrho<\alpha)$ ist, so folgt auf Grund der Formel (10)

$$\overline{\overline{M'_{\pi_0}}} < \aleph_\nu, \quad \overline{\overline{M}}_\varrho < \aleph_\nu \qquad (\varrho<\alpha). \tag{46}$$

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\overline{\overline{M'_{\pi_0}}} = \aleph_{\nu_1}, \quad \overline{\overline{M}}_\varrho = \aleph_{\xi_\varrho} \qquad (\varrho<\alpha). \tag{47}$$

Es ist also

$$\overline{\overline{M}}_\pi = \aleph_{\nu_1} + \sum_{\varrho<\alpha} \aleph_{\xi_\varrho}, \quad \text{für} \quad \aleph_{\nu_1} < \aleph_\nu,\ \aleph_{\xi_\varrho} < \aleph_\nu\ (\varrho<\alpha). \tag{48}$$

Man kann wegen der Kommutativität der Addition voraussetzen, daß in der Summe (48) die Glieder so geordnet sind, daß

$$\aleph_{\xi_\varrho} \leqq \aleph_{\xi_{\varrho+1}} \qquad (\varrho < \alpha) \tag{49}$$

ist. Dann bilden die Indizes ξ_ϱ $(\varrho < \alpha)$ eine nicht absteigende Folge vom Typus α, wobei — wegen $\aleph_{\xi_\varrho} < \aleph_\nu$

$$\xi_\varrho < \nu \qquad (\varrho < \alpha) \tag{50}$$

ist.

Man kann bemerken, daß wegen $\aleph_{\nu_1} < \aleph_\nu$ auch

$$\nu_1 < \nu \tag{51}$$

ist.

Ist im Sinne der Voraussetzung die Ordinalzahl ν eine Ordinalzahl zweiter Gattung, so gilt die Gleichheit (24). Aber im Sinne derselben Voraussetzung, ist die Ordinalzahl ν kein Grenzwert einer Folge vom Typus α. Es folgt, daß es eine Ordinalzahl ν' existiert, so daß

$$\xi_\varrho < \nu' < \nu \qquad (\varrho < \alpha) \tag{52}$$

gilt. Die Ordinalzahl ν' kann als Ordinalzahl erster Gattung vorausgesetzt werden (denn, wenn ν' eine Ordinalzahl zweiter Gattung ist, so wählen wir statt ν' die Ordinalzahl $\nu' + 1 = \nu_1'$, die ist eine Ordinalzahl erster Gattung und sie erfüllt offenbar die Ungleichheit (51)). Es gilt wegen der Beziehungen (48), (51) und (52)

$$\overline{\overline{M}}_\pi = \aleph_{\nu_1} + \sum_{\varrho < \alpha} \aleph_{\xi_\varrho} \leqq \aleph_{\nu_1'} + \sum_{\varrho \leqq \nu'} \aleph_\xi = \aleph_{\nu_1} + \aleph_{\nu'} \leqq 2 \cdot \max(\aleph_{\nu_1}, \aleph_{\nu'}) \leqq \tag{53}$$

$$\leqq [\max(\aleph_{\nu_1}, \aleph_{\nu'})]^2 = \max(\aleph_{\nu_1}, \aleph_{\nu'}) < \aleph_\nu .$$

Daraus folgt, daß $\pi \in P_\nu$ ist, w. z. b. w.

Die Gültigkeit des Satzes 1 folgt aus den Propositionen 1., 2., 3., 4. und 5. Also, ist der Satz bewiesen.

Aus Satz 1 und Satz 3 folgt unmittelbar der folgende

Satz 4. *Die topologische Gruppe P ist dann und nur dann einfach, wenn $\overline{\alpha} = \overline{\varphi} = \aleph_\mu$ ist, also wenn $\alpha \in Z(\aleph_\mu)$ gilt.*

Korollar. *Ist $\varphi = \omega_\nu$, so ist die topologische Gruppe P dann und nur dann einfach, wenn $\alpha = \varphi$ gilt.*

Bemerkungen: ist $\alpha = \omega$, so folgt aus dem bewiesenen Satz 3 das Hauptergebnis unserer Mitteilung [5]. Das Korollar des Satzes 4 enthält als Spezialfall ein Ergebnis unserer Mitteilung [3]: ist $\nu = 0$, also $\varphi = \omega_0 = \omega$, so ist die Gruppe P einfach, denn in diesem Fall ist offenbar $\alpha = \omega$.

Die Normalteiler der abstrakten Gruppe $P(G)$ *haben die Gestalt* $Q(G)$, $E(N)$ *und* $E(c)$ [6]. Hier ist: $Q(G) = Q \times \{G\}$, wo Q einen beliebigen Normalteiler der Gruppe P bedeutet; $E(N) = E \times \{N\}$ mit $E = \{\varepsilon\}$ und N ist ein beliebiger Normalteiler der Gruppe G; $E(c)$ ist die Menge aller Elemente der Gestalt $(c; \varepsilon)$, wo $c = \{c, c, \ldots, c, \ldots\}$ ist und c zum Zentrum der Gruppe G gehört.

Wir bezeichnen im folgenden mit $Q(N)$ einen beliebigen Normalteiler der abstrakten Gruppe $P(G)$ der die Gestalt $Q(G)$ oder $E(N)$ hat (ist $Q \neq E$, so ist $N = G$). Dann kann man beweisen — ähnlich wie im Falle $\alpha = \omega$ in [7] — daß die folgenden Eigenschaften gelten:

(I) $\overline{E(c)} = E(c)$

(II) $\overline{Q(N)} = Q(N)$ *dann und nur dann, wenn* $\overline{Q} = Q$ *ist.*

Daraus folgt, wenn man auch den Satz 3 in Betracht nimmt, der folgende Satz:

Satz 5. *Die Normalteiler der topologischen Gruppe* $P(G)$ *sind diejenigen und nur diejenigen Untermengen der Menge* $P(G)$, *die die Gestalt* $P_v(G)$, $E(N)$, $E(c)$ *haben, wobei* P_v *ein beliebiger Normalteiler der topologischen Gruppe* P *ist.*

Literatur

[1] R. Baer, Die Kompositionsreihe der Gruppe aller eineindeutigen Abbildungen einer unendlichen Menge auf sich, *Studia Math.* **5** (1934), 15—17.

[2] G. Birkhoff, Moore—Smith convergence in general topology, *Ann. of Math.* **38** (1937), 39—56.

[3] I. Gy. Maurer, Topologizarea grupului de permutări infinite, *Bul. Şt. Acad. R. P. R. (secţia Şt. mat—fiz.)* **8** (1956), 265—272.

[4] I. Gy. Maurer, Eine Topologisierung der Permutationsgruppen einer beliebigen unendlichen Menge, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. R.* **2** (**50**), (1958), 55—59.

[5] I. Gy. Maurer, Despre divizorii normali ai grupurilor de permutări topologizate, *Com. Acad. R. P. R.* **8** (1958), 5—11.

[6] I. Gy. Maurer, Néhány megjegyzés a monomiális csoportokkal kapcsolatban, *A kolozsvári V. Babeş és Bolyai Egyetemek Közleményei (Term. tud. sorozat),* **2** (1957), 39—50.

[7] I. Gy. Maurer, Despre divizorii normali ai grupurilor monomiale topologizate, *Gaz. Mat. Fiz. (seria A)* **10** (LXIII)—(1958), 543—546.

[8] W. Sierpinski, Leçons sur les nombres transfinis, *Paris,* 1928.

(Eingegangen am 20. August 1960.)