Über die bahntreuen Abbildungen metrischer Räume

Von A. RAPCSÁK (Debrecen)

1. Mit bahntreuen oder geodätischen Abbildungen metrischer Räume haben sich zuerst DINI[1]) und dann DARBOUX[2]) beschäftigt.

Für Riemannsche Räume ist das Problem in allgemeiner Form durch LEVI—CIVITA gelöst worden.[3]) LEVI—CIVITA hat festgestellt, welche Gestalt die Maßtensoren zweier solcher Riemannscher Räume haben müssen, die sich aufeinander bahntreu abbilden lassen. In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit den geodätischen Abbildungen Finslerscher Räume,[4]) und bestimmen die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Finslersche Räume aufeinander geodätisch abbildbar seien.

Alle in unserer Arbeit betrachteten Funktionen gehören zur Klasse C^k $(k \geqq 4)$.[5])

2. Bekanntlich lassen sich zwei mit den Grundfunktionen $L(x, v)$ und $\bar{L}(x, v)$ gegebene Finslersche Räume F_n und $\bar{F}_n$ dann und nur dann aufeinander geodätisch abbilden, falls es einen Skalar $p(x, v)$ gibt, positiv homogen erster Ordnung in v^i, für welchen

$$\bar{G}^i = G^i + p v^i \tag{1}$$

gilt. In (1) ist

$$2G^i = g^{ik}\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{2} L^2}{\partial x^r \partial v^k} v^r - \frac{\partial \frac{1}{2} L^2}{\partial x^k}\right). \tag{2}$$

Das Differentialgleichungssystem der Geodätischen in F_n ist:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = -2G^i(x, x'). \tag{3}$$

---

[1]) S. U. DINI [8].

[2]) S. G. DARBOUX [5].

[3]) S. LEVI—CIVITA [11].

[4]) S. P. FINSLER [10].

[5]) C^k bezeichnet die Klasse der in ihren Veränderlichen k-mal stetig derivierbaren Funktionen.

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

(4) $$G^i_j = \frac{\partial G^i}{\partial v^j}, \quad G^i_{jk} = \frac{\partial G^i_j}{\partial v^k}, \ldots$$

(5) $$T^i_{j|k} = \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} - \frac{\partial T^i_j}{\partial v^r} G^r_k - T^i_r G^r_{jk} + T^r_j G^i_{rk}.$$

Wir werden auch die folgende, in Finslerschen Räumen gültige Identität[6]) nötig haben

(6) $$L_{|i} = 0.$$

Satz 1. *Ein mit der Grundfunktion $\bar{L}(x, v)$ gegebener $\bar{F}_n$ läßt sich dann und nur dann auf den mit der Grundfunktion $L(x, v)$ gegebenen F_n geodätisch abbilden, falls das folgende partielle Differentialgleichungssystem besteht*

(7) $$\bar{L}_{|i} - \frac{\partial \bar{L}_{|s}}{\partial v^i} v^s = 0,$$

wobei die kovarianten Ableitungen bzgl. F_n zubilden sind.

Beweis.[7]) Die Bedingung ist notwendig. Setzen wir nämlich voraus, daß sich $\bar{F}_n$ geodätisch auf F_n abbilden läßt. Wegen (6) und (1) erhalten wir

(8) $$\frac{\partial \bar{L}}{\partial x^m} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial v^r} \bar{G}^r_m = \frac{\partial \bar{L}}{\partial v^r} G^r_m + \frac{\partial (\bar{L} p)}{\partial v^m}.$$

Komponieren wir jetzt (1) mit $\frac{\partial \bar{L}}{\partial v^i} \overset{\text{def}}{=} \bar{l}_i$, so erhalten wir wegen der Homogenitätsbedingung

(9) $$\bar{G}^i \bar{l}_i = G^i \bar{l}_i + p \bar{L}.$$

Indem wir (9) nach v^m ableiten und den erhaltenen Ausdruck $\frac{\partial (\bar{L} p)}{\partial v^m}$ in (8) einsetzen, erhalten wir

(10) $$\frac{\partial \bar{L}}{\partial x^m} = \frac{\partial (\bar{l}_i \bar{G}^i)}{\partial v^m} - \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial v^i \partial v^m} G^i.$$

Nunmehr komponieren wir die (6) entsprechenden, auf $\bar{L}$ bezüglichen Gleichungen mit v^i, so ergibt sich

(11) $$2 \bar{l}_i \bar{G}^i = v^i \frac{\partial \bar{L}}{\partial v^i}.$$

---

[6]) S. E. Cartan [4].

[7]) Die mit einem Strich bezeichneten Größen sind diejenigen des Raumes $\bar{F}_n$, die ohne einen Strich diejenigen des Raumes F_n.

Falls wir jetzt noch (11) nach v^i ableiten und das Ergebnis in (10) einsetzen, gelangen wir zu (7).

Nehmen wir jetzt umgekehrt an, daß (7) für $\bar{L}$ erfüllt ist. Bekanntlich[8]) gilt in $\bar{F}_n$,

$$2\bar{G}_j = 2\bar{g}_{js}\bar{G}^s = \frac{\partial \bar{L}}{\partial v^j}\frac{\partial \bar{L}}{\partial x^r}v^r + \bar{L}\frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial v^j \partial x^r}v^r - \bar{L}\frac{\partial \bar{L}}{\partial x^j}. \tag{12}$$

Setzen wir jetzt aus (12) den Ausdruck für $\dfrac{\partial^2 \bar{L}}{\partial v^i \partial x^r}$ in (7) ein, so erhalten wir

$$2\bar{G}_j = \frac{\partial \bar{L}}{\partial v^j}\frac{\partial \bar{L}}{\partial x^r}v^r + 2\bar{L}\frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial v^j \partial v^r}G^r. \tag{13}$$

Indem wir nun (13) mit $\bar{g}^{ik}$ kontrahieren und die Identität

$$\frac{\partial \bar{l}_i}{\partial v^k} = \frac{1}{L}(\bar{g}_{ik} - \bar{l}_i\bar{l}_k)$$

berücksichtigen, erhalten wir

$$\bar{G}^k = G^k + \frac{1}{2\bar{L}}\bar{L}_{|r}v^r v^k. \tag{14}$$

Es sei noch

$$p(x, v) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\bar{L}}\bar{L}_{|r}v^r. \tag{15}$$

Aus (14) und (15) ergibt sich unsere Behauptung.

Aus Satz 1 und aus (15) folgt der

Satz 2. *Läßt sich ein Raum $\bar{F}_n$ geodätisch auf F_n abbilden, so wird der bei der Abbildung auftretende Skalar $p(x, v)$ durch* (15) *dargestellt.*

Da sich ein partielles Differentialgleichungssystem erster Ordnung leichter behandeln läßt, werden wir jetzt statt der notwendigen und hinreichenden Bedingung (7) eine solche Bedingung angeben, in welcher nur partielle Ableitungen erster Ordnung auftreten.

Satz 3. *Damit sich ein Raum $\bar{F}_n$ auf einen Raum F_n geodätisch abbilden lasse, ist die Existenz eines solchen Raumes F_n^* notwendig und hinreichend, dessen Grundfunktion den folgenden Bedingungen genügt:*[9]

$$M^*_{ik|s}v^s = 0 \tag{16$_1$}$$

$$M^*_{ir}K^r_{sjk}v^s + M^*_{jr}K^r_{ski}v^s + M^*_{kr}K^r_{sij}v^s = 0 \tag{16$_2$}$$

---

[8]) S. z. B. E. Cartan [4].

[9]) $$K^r_{sjk} = \frac{\partial G^r_{sj}}{\partial x^k} - \frac{\partial G^r_{sk}}{\partial x^j} - G^r_{sjm}G^m_k + G^r_{skm}G^m_j + G^r_{jm}G^m_{sk} - G^r_{km}G^m_{sj}$$

ist der Berwaldsche Krümmungstensor. S. z. B. Berwald [1].

wobei

$$M^{*}_{ik} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 L^*}{\partial v^i \partial v^k}$$

ist. Sodann läßt sich die Grundfunktion $\bar{L}$ *des Raumes* $\bar{F}_n$ *auf folgende Weise darstellen:*

$$\bar{L} = L^* + B_i(x) v^i. \tag{17}$$

BEWEIS. Nehmen wir an, daß sich $\bar{F}_n$ auf F_n geodätisch abbilden läßt, und so wegen (1)

$$\bar{l}_{i|j} - \bar{l}_{j|i} = 0 \tag{18}$$

gilt.

Indem wir (7) nach v^j ableiten und (17) berücksichtigen, erhalten wir (16_1). Nunmehr leiten wir (18) auf kovariante Weise ab, nehmen eine zyklische Vertauschung der Indizes vor, und addieren die erhaltenen Gleichungen. Falls wir noch die zyklische Symmetrie des Krümmungstensores K^{r}_{sjk} berücksichtigen, sowie von der Identität bezüglich der Vertauschung der kovarianten Ableitungen[10]) Gebrauch machen, gelangen wir zu (16_2).

Die Bedingung ist aber auch hinreichend. Setzen wir nämlich voraus, daß es einen Finslerschen Raum F^*_n gibt, dessen Grundfunktion, $L^*(x, v)$, sowohl (16_1) als auch (16_2) befriedigt. Falls L^* das Gleichungssystem (7) befriedigt, ist der Satz bereits bewiesen. Es sei

$$\varrho_i(L^*) \overset{\text{def}}{=} L^*_{|i} - \frac{\partial L^*_{|s}}{\partial v^i} v^s. \tag{19}$$

Nehmen wir also an, daß

$$\varrho_i(L^*) \neq 0$$

ist. Durch Nachrechnen beweist man, daß im Falle wo L^* (16_1) befriedigt, die Identität

$$\frac{\partial \varrho_i(L^*)}{\partial v^k} + \frac{\partial \varrho_k(L^*)}{\partial v^i} = 0 \tag{20}$$

erfüllt ist.

Indem wir jetzt (20) nach v^j ableiten, die Indizes zyklisch vertauschen und aus der Summe der beiden ersten so erhaltenen Gleichungen die dritte subtrahieren, erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \varrho_i(L^*)}{\partial v^k \partial v^j} = 0. \tag{21}$$

Wegen der Homogenitätsbedingung ist also

$$\varrho_i(L^*) = \Omega_{ir}(x) v^r. \tag{22}$$

[10]) S. z. B. L. BERWALD [1].

Wegen (20) ist Ω_{ir} schiefsymmetrisch.
Leiten wir jetzt (22) nach v^k ab, so erhalten wir mit Rücksicht auf (16_1)

$$\Omega_{ik}(x) = l^*_{k|i} - l^*_{i|k}. \tag{23}$$

Wir leiten (23) auf kovariante Weise ab, nehmen eine zyklische Vertauschung der Indizes vor, und addieren die erhaltenen Gleichungen; berücksichtigen wir noch (16_2) und die Identitäten bezüglich der Vertauschung der kovarianten Ableitung[10]), so erhalten wir mit Rücksicht auf den schiefsymmetrischen Charakter von

$$\frac{\partial \Omega_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial \Omega_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial \Omega_{kj}}{\partial x^i} = 0. \tag{24}$$

Auf Grund von (24) ist also das partielle Differentialgleichungssystem

$$\Omega_{jk} = \frac{\partial B_j(x)}{\partial x_k} - \frac{\partial B_k(x)}{\partial x^j}$$

vollkommen integrierbar. Es sei $B_i(x)$ eine Lösung desselben. In diesem Falle gilt für die Funktion

$$\bar{L}(x, v) = L^*(x, v) + B_j(x) v^j$$

wegen (19) und (22)

$$\varrho_i(\bar{L}) = 0.$$

Damit haben wir unseren Satz wollständig bewiesen.

Leiten wir (23) nach v^j ab, so erhalten wir auf Grund der Vertauschungsidentitäten[10]

$$M^*_{kj|i} - M^*_{ij|k} = 0.$$

Satz 4. *Damit sich ein $\bar{F}_n$ auf einen F_n geodätisch abbilden lasse, ist das Erfülltsein der folgenden Identität notwendig und hinreichend:*

$$\bar{l}_{i|k} - \bar{l}_{k|i} = 0. \tag{25}$$

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung wird durch (18) ausgesprochen. — Nehmen wir also an, daß (25) erfüllt ist. Indem wir mit v komponieren, erhalten wir (7), und damit ist der Satz bewiesen.

Literatur

[1] L. Berwald, Über Finslersche und Cartansche Geometrie IV., *Ann. of Math.* **48** (1947), 753—781.

[2] O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, *Leipzig u. Berlin,* 1909.

[3] C. Carathéodory, Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. *Leipzig u. Berlin,* 1935.

[4] E. Cartan, Les espaces de Finsler, *Actualités Sci. Ind.* **79** (1944).

[5] G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, *Paris*, 1894., §§. 604., 605.

[6] D. R. Davis, The inverse problem of the calculus of variations in higher space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **30** (1928), 711—736.

[7] Davis, The inverse problem of the calculus of variations in space of $n+1$ dimensions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **35** (1929), 371—380.

[8] U. Dini, Sopra una problema che si presenta nella teoria generale delle representazioni geografiche di una superfizie su di un' altra, *Ann. Mat. Pura Appl.* (2) **3** (1869), 269—293.

[9] J. Douglas, Solution of the inverse problem of the calculus of variations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **50** (1941), 79—128.

[10] P. Finsler, Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, *Diss. Göttingen,* 1918.

[11] Levi—Civita, Sulle transformazioni delle equazioni dinamiche, *Ann. Mat. Pura Appl.* **24** (1896), 255—300.

[12] A. Rapcsák, Über die Begründung der lokalen metrischen Differentialgeometrie, *Publ. Math. Debrecen* **7** (1960), 382—393.

[13] A. Rapcsák, Über die bahntreuen Abbildungen affinzusammenhängender Räume, *Publ. Math. Debrecen* **8** (1961), 225—230.

[14] O. Varga, Bedingungen für die Metrisierbarkeit von affinzusammenhängenden Linienelementmannigfaltigkeiten, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **5** (1954), 7—16.

(Eingegangen am 30. Dezember 1960.)