Über die Divergenz der Orthogonalreihen

Von KÁROLY TANDORI (Szeged)

Einleitung

In dieser Arbeit werden wir die folgenden Sätze beweisen.

Satz 1. *Damit die Orthogonalreihe*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x) \tag{1}$$

für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_i(x)\}$ *im Grundinterwall* $[a, b]$ *fast überall konvergiert, ist es notwendig, daß die Bedingung*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \log_+^2 \frac{1}{a_i^2} < \infty \text{ [1]} \tag{2}$$

gilt.

Satz 2. *Damit die Orthogonalreihe* (1) *für jedes orthonormierte Funktionensystem* $\{\varphi_i(x)\}$ *in* $[a, b]$ *fast überall* $(C, 1)$*-summierbar ist, ist es notwendig, daß die Bedingung*

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i^2 \log_+^2 \frac{1}{A_i^2} < \infty \tag{3}$$

mit $A_i^2 = a_{2^{i-1}+1}^2 + \cdots + a_{2^i}^2$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *gilt.*

Der Satz 1 gibt eine Antwort auf ein Problem von G. ALEXITS[2]. Nach dem bekannten Satz von D. MENCHOFF und H. RADEMACHER[3] folgt aus

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \log^2 i < \infty, \tag{4}$$

---

[1]) In dieser Arbeit wird der Logarithmus mit der Basis e verwendet. Es sei weiterhin

$$\log_+ \frac{1}{a_i^2} = \begin{cases} \log \frac{1}{a_i^2} & \text{für } a_i^2 \leqq \frac{1}{e}, \\ 1 & \text{für } a_i^2 > \frac{1}{e} \quad \text{oder} \quad a_i = 0. \end{cases}$$

[2]) G. ALEXITS, Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen, *Budapest,* 1960, S. 101.

[3]) D. MENCHOFF, Sur les séries des fonctions orthogonales (Première partie), *Fundamenta Math.* **4** (1923), 92—105; H. RADEMACHER, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Ann.* **87** (1922), 112—138.

daß die Orthogonalreihe (1) für jedes orthonormierte Funktionensysten $\{\varphi_i(x)\}$ in $[a, b]$ fast überall konvergiert und nach dem Satz 1 ergibt sich, daß die Bedingung (2) aus (4) folgt. Es sei $a_i^2 \geqq a_{i+1}^2$ $(i=1, 2, \ldots)$. Ist die Bedingung (2) erfüllt, dann gilt $\{a_i\} \in l^2$, d. h.

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty.$$

Dann ist aber $a_i^2 = o\ (i^{-1})$ und es gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \log^2 i = O(1) \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \log_+^2 \frac{1}{a_i^2} < \infty.$$

Im Falle $a_i^2 \geqq a_{i+1}^2$ $(i=1, 2, \ldots)$ sind also die Bedingungen (2) und (4) gleichwertig. Satz 1 ist also eine Verallgemeinerung eines meiner vorherigen Resultate[4].

Nach dem bekannten Satz von S. KACZMARZ und D. MENCHOFF[5] folgt aus

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i^2 (\log\log i)^2 < \infty, \tag{5}$$

daß die Orthogonalreihe (1) für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_i(x)\}$ in $[a, b]$ fast überall $(C, 1)$-summierbar ist und nach dem Satz 2 ergibt sich, daß die Bedingung (3) aus (5) folgt. Es sei $i a_i^2 \geqq (i+1) a_{i+1}^2$ $(i=1, 2, \ldots)$. Ist die Bedingung (3) erfüllt, dann gilt $\{A_i\} \in l^2$. Es kann leicht eingesehen werden, daß $A_i^2 = o(i^{-1})$ ist und die Abschätzung

$$\sum_{i=5}^{\infty} a_i^2 (\log\log i)^2 = O(1) \sum_{i=2}^{\infty} A_i^2 \log^2 i = O(1) \sum_{i=0}^{\infty} A_i^2 \log_+^2 \frac{1}{A_i^2} < \infty$$

gilt. Im Falle $i a_i^2 \geqq (i+1) a_{i+1}^2$ $(i=1, 2, \ldots)$ sind also die Bedingungen (3) und (5) gleichwertig. Satz 2 ist also die Verallgemeinerung eines meiner vorherigen Resultate[6].

---

[4]) K. TANDORI, Über die orthogonalen Funktionen. I., *Acta Sci. Math. Szeged* **18** (1957), 57—130, Satz I.

[5]) S. KACZMARZ, Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Math. Z.* **26** (1927), 99—105; D. MENCHOFF, Sur les séries des fonctions orthogonales (Deuxième partie), *Fundamenta Math.* **8** (1926), 56—108.

[6]) K. TANDORI, Über die orthogonalen Funktionen II (Summation), *Acta Sci. Math. Szeged* **18** (1957), 149—168, Satz II.

§ 1. Hilfssätze

Wir benötigen einige Hilfssätze.

Für eine endliche und reelle Zahlenfolge $c_1, \ldots, c_n$ wird

$$M(c_1, \ldots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \lambda_i(c_1^2, \ldots, c_n^2)$$

gesetzt, wo

$$\lambda_i(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \log^2 \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{x_i} & \text{für} \quad x_1 + \cdots + x_n > 8x_i > 0, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist. Offensichtlich gilt

$$c_1^2 + \cdots + c_n^2 \leqq M(c_1, \ldots, c_n).$$

Hilfssatz 1. *Es gilt die Ungleichung*

$$M(c_1, \ldots, c_n) \leqq A\, M(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n) \quad (c_i^2 \leqq \bar{c}_i^2;\ i = 1, \ldots, n), \tag{1.1}$$

wo A eine von der Folgen $\{c_i\}$, $\{\bar{c}_i\}$ und von n unabhängige, positive Konstante bedeutet.

Beweis. Die Ungleichung

$$\lambda_j(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leqq \lambda_j(x_1, \ldots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \quad (x_i \leqq \bar{x}_i;\ i \neq j) \tag{1.2}$$

ist offensichtlich. Ist $x_1 + \cdots + x_{i-1} + x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n \leqq 8x_i$, dann gilt $x_1 + \cdots + x_{i-1} + \bar{x}_i + x_{i+1} + \cdots + x_n \leqq 8\bar{x}_i$ für $x_i \leqq \bar{x}_i$, und so hat man

$$x_i \lambda_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leqq \bar{x}_i \lambda_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \tag{1.3}$$
$$\text{für} \quad x_1 + \cdots + x_{i-1} + x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n \leqq 8x_i \quad \text{und} \quad x_i \leqq \bar{x}_i.$$

Da für $0 < 8x \leqq c + x$

$$\left(x \log^2 \frac{c+x}{x}\right)' = \log \frac{c+x}{x} \left(\log \frac{c+x}{x} - 2\frac{c}{c+x}\right) > 0 \tag{1.4}$$

gilt, so ist

$$x_i \lambda_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leqq \bar{x}_i \lambda_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \tag{1.5}$$

für $x_1 + \cdots + x_{i-1} + x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n > 8x_i > 0$, $x_1 + \cdots + x_{i-1} + \bar{x}_i + x_{i+1} + \cdots + x_n > 8\bar{x}_i$, $x_i \leqq \bar{x}_i$.

Es sei $x_1+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_n=c>0$. Da

$$\lim_{x_i\to\frac{1}{7}c-0} x_i\lambda_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)=\frac{1}{7}c\log^2 8$$

ist, so folgt aus (1. 4)

$$x_i\lambda_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)<\frac{1}{7}(x_1+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_n)\log^2 8$$

für $x_i<\frac{1}{7}(x_1+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_n)$. Daraus ergibt sich:

$$(1.6)\qquad x_i\lambda_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)<\log^2 8\,\bar{x}_i\lambda_i(x_1,\ldots x_{i-1},\bar{x}_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

für $\quad x_1+\cdots+x_{i-1}+x_i+x_{i+1}+\cdots+x_n>8x_i,\quad x_1+\cdots+x_{i-1}+\bar{x}_i+x_{i+1}+\cdots$

$$\cdots+x_n=8\bar{x}_i,\ x_i<\bar{x}_i.$$

Da $\bar{c}_1^2+\cdots+\bar{c}_{i-1}^2+\bar{c}_i^2+\bar{c}_{i+1}^2+\cdots+\bar{c}_n^2\leqq 8\bar{c}_i^2$ höchstens für 8 Indizes i erfüllt sein kann, ergibt sich (1. 1) auf Grund von (1. 2), (1. 3), (1. 5) und (1. 6) durch einfache Rechnung.

Hilfssatz 2. *Damit*

$$(1.7)\qquad \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2\log_+^2\frac{1}{a_i^2}<\infty$$

gilt, ist es notwendig und hinreichend, daß

$$(1.8)\qquad \sum_{k=0}^{\infty} M(a_{n_k+1},\ldots,a_{n_{k+1}})<\infty$$

für jede Indexfolge $(0=)n_0<\cdots<n_k<\cdots$ *gilt.*

Beweis. Aus (1. 7) folgt (1. 8) offensichtlich für jede Indexfolge $(0=)n_0<\cdots<n_k<\cdots$. Es wird angenommen, daß (1. 8) für jede Indexfolge $(0=)n_0<\cdots<n_k<\cdots$ erfüllt ist. Dann gilt $\{a_n\}\in l^2$, und so kann eine Indexfolge $(0=)m_0<\cdots<m_k<\cdots$ angegeben werden, für die

$$A_k=\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} a_i^2\leqq\frac{1}{2^{2k}}\qquad (k=1,2,\ldots)$$

erfüllt ist. Es wird mit I_k bzw. I_k' die Menge derjenigen Indizes $i(m_k<i\leqq m_{k+1})$ bezeichnet, für die $|a_i|\leqq A_k$ bzw. $|a_i|>A_k$ gilt. Durch einfache Rechnung ergibt sich:

$$(1.9)\qquad \sum_{i\in I_k} a_i^2\log_+^2\frac{1}{a_i^2}=\sum_{i\in I_k} a_i^2\log^2\frac{1}{a_i^2}=4\sum_{i\in I_k} a_i^2\log^2\frac{1}{|a_i|}\leqq 4\sum_{i\in I_k} a_i^2\log^2\frac{A_k}{a_i^2}\leqq$$

$$\leqq 32M(a_{m_k+1},\ldots,a_{m_{k+1}})$$

und

$$\sum_{i \in I_k'} a_i^2 \log_+^2 \frac{1}{a_i^2} \leqq A_k \log^2 \frac{1}{A_k^2} \leqq B \frac{1}{2^k} \tag{1.10}$$

für $k > 1$, wo B eine von k unabhängige, positive Konstante bedeutet. Aus (1.9) und (1.10) folgt (1.7).

Damit haben wir Hilfssatz 2 bewiesen.

Hilfssatz 3. *Es sei* $\{f_i(x)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ *ein im Intervall* $[0, 1]$ *orthonormiertes System von Treppenfunktionen*[7], $c_1, \ldots, c_n$ *reelle Zahlen und* $I_1, \ldots, I_\sigma (\subseteqq [0, 1])$ *paarweise disjunkte Intervalle, für die*

$$\max_{1 \leqq i_1 \leqq i_2 \leqq n} |c_{i_1} f_{i_1}(x) + \cdots + c_{i_2} f_{i_2}(x)| \geqq \varrho_s (> 0) \qquad (x \in I_s;\ s = 1, \ldots, \sigma) \tag{1.11}$$

gilt. Dann gibt es ein in $[0, 1]$ *orthonormiertes System von Treppenfunktionen* $\{\varphi_i(x)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ *derart, daß*

$$\max_{1 \leqq i_1 \leqq i_2 \leqq n} |c_{i_1} \varphi_{i_1}(x) + \cdots + c_{i_2} \varphi_{i_2}(x)| \geqq 1 \tag{1.12}$$

auf einer einfachen Menge[8] $E (\subseteqq [0, 1])$ *gilt, für die*

$$\operatorname{mes}(E) = \min\left(\sum_{s=1}^{\sigma} \operatorname{mes}(I_s), \sum_{s=1}^{\sigma} \varrho_s^2 \operatorname{mes}(I_s)\right) \tag{1.13}$$

ist.

Beweis. Es sei $I_s = [a_s, b_s]$ $(s = 1, \ldots, \sigma)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $0 \leqq a_1 < b_1 \leqq \cdots \leqq a_s < b_s \leqq \cdots \leqq a_\sigma < b_\sigma \leqq 1$ angenommen werden; es seien weiterhin $a_0 = b_0 = 0$ und $a_{\sigma+1} = b_{\sigma+1} = 1$.

Ist

$$\sum_{s=1}^{\sigma} \varrho_s^2 \operatorname{mes}(I_s) \leqq \sum_{s=1}^{\sigma} \operatorname{mes}(I_s),$$

so setzen wir:

$$u_s = \varrho_0^2 (b_0 - a_0) + (a_1 - b_0) + \cdots + \varrho_{s-1}^2 (b_{s-1} - a_{s-1}) + (a_s - b_{s-1}) \qquad (1 \leqq s \leqq \sigma + 1),$$

$$v_s = \varrho_0^2 (b_0 - a_0) + (a_1 - b_0) + \cdots + \varrho_{s-1}^2 (b_{s-1} - a_{s-1}) + (a_s - b_{s-1}) + \varrho_s^2 (b_s - a_s) \qquad (0 \leqq s \leqq \sigma).$$

Nach der Annahme ist $0 = v_0 \leqq u_1 < v_1 \leqq \cdots \leqq u_\sigma < v_\sigma \leqq u_{\sigma+1} \leqq 1$. Es sei

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} f_i(b_s + x) & x \in (v_s, u_{s+1}) \quad (s = 0, \ldots, \sigma), \\ \dfrac{1}{\varrho_s} f_i\left(a_s + \dfrac{x - a_s}{\varrho_s^2}\right) & x \in (u_s, v_s) \quad (s = 1, \ldots, \sigma), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(i = 1, \ldots, n)$.

---

[7]) Für jedes $f_i(x)$ kann das Intervall $[0, 1]$ in endlich viele Teilintervalle zerlegt werden, derart, daß in jedem Teilintervalle $f_i(x)$ konstant ist.

[8]) Die Menge E ist die Vereinigung endlich vieler Teilintervalle.

Offensichtlich sind diese Funktionen Treppenfunktionen. Ferner ergibt sich durch einfache Rechnung

$$\int_0^1 \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx = \sum_{s=0}^{\sigma} \int_{v_s}^{u_{s+1}} \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx + \sum_{s=1}^{\sigma} \int_{u_s}^{v_s} \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx =$$

$$= \sum_{s=0}^{\sigma} \int_{v_s}^{u_{s+1}} f_i(b_s+x) f_j(b_s+x)\,dx + \sum_{s=1}^{\sigma} \frac{1}{\varrho_s^2} \int_{u_s}^{v_s} f_i\left(a_s + \frac{x-a_s}{\varrho_s^2}\right) f_j\left(a_s + \frac{x-a_s}{\varrho_s^2}\right) dx =$$

$$= \sum_{s=0}^{\sigma} \int_{b_s}^{a_{s+1}} f_i(x) f_j(x)\,dx + \sum_{s=1}^{\sigma} \int_{a_s}^{b_s} f_i(x) f_j(x)\,dx = \int_0^1 f_i(x) f_j(x)\,dx,$$

also ist das System $\{\varphi_i(x)\}$ orthonormiert und für

$$E = \bigcup_{s=1}^{\sigma} (u_s, v_s)$$

gilt (1.13) offensichtlich. Ist $x \in (u_s, v_s)$, dann ist $a_s + (x-a_s)\varrho_s^{-2} \in (a_s, b_s)$ und es gilt

$$\max_{1 \leqq i_1 \leqq i_2 \leqq n} |c_{i_1}\varphi_{i_1}(x) + \cdots + c_{i_2}\varphi_{i_2}(x)| = \frac{1}{\varrho_s} \max_{1 \leqq i_1 \leqq i_2 \leqq n} |c_{i_1} f_{i_1}(x) + \cdots + c_{i_2} f_{i_2}(x)| \geqq 1,$$

wegen (1.11). (1.12) ist also erfüllt.

Es sei

$$\sum_{s=1}^{\sigma} \varrho_s^2 \operatorname{mes}(I_s) > \sum_{s=1}^{\sigma} \operatorname{mes}(I_s).$$

Dann können positive Zahlen $\bar\varrho_1, \ldots, \bar\varrho_\sigma$ angegeben werden, für die $\bar\varrho_s \leqq \varrho_s$ $(s = 1, \ldots, \sigma)$ und

$$\sum_{s=1}^{\sigma} \bar\varrho_s^2 \operatorname{mes}(I_s) = \sum_{s=1}^{\sigma} \operatorname{mes}(I_s) \tag{1.14}$$

erfüllt werden. Aus (1.11) folgt, daß

$$\max_{1 \leqq i_1 \leqq i_2 \leqq n} |c_{i_1} f_{i_1}(x) + \cdots + c_{i_2} f_{i_2}(x)| \geqq \bar\varrho_s \qquad (x \in I_s;\ s = 1, \ldots, \sigma)$$

ist. Auf Grund von (1.14) ergibt sich nach dem obigen, daß es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{\varphi_i(x)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ gibt, derart, daß (1.12) auf einer einfachen Menge $E(\subseteqq [0, 1])$ mit

$$\operatorname{mes}(E) = \sum_{s=1}^{\sigma} \operatorname{mes}(I_s)$$

gilt. Also ist (1.13) auch in diesem Falle erfüllt.

Damit haben wir Hilfssatz 3 vollständig bewiesen.

Hilfssatz 4. *Für die positiven Zahlen* $c_1, \ldots, c_n$ *kann ein in* $[0,1]$ *orthonormiertes System von Treppenfunktionen* $\{\varphi_i(x)\}$ $(i=1,\ldots,n)$ *angegeben werden, derart, daß*

$$\max_{1\leqq i_1\leqq i_2\leqq n} |c_{i_1}\varphi_{i_1}(x)+\cdots+c_{i_2}\varphi_{i_2}(x)|\geqq 1 \tag{1.15}$$

in einer einfachen Menge $E(\subseteqq[0,1])$ *gilt, für die*

$$\text{mes}\,(E)\geqq K\min\big(1, M(c_1,\ldots,c_n)\big) \tag{1.16}$$

mit einer von der Folge $\{c_i\}$ *und von* n *unabhängigen, positiven Konstante* $K(<1)$ *ist.*

BEWEIS. Für $n=1$ ist $M(c_1,\ldots,c_n)=c_1^2$. Es seien $E=[0, \min(1,c_1^2)]$ und

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\big(\min(1,c_1^2)\big)^{-1/2} & x\in[0,\min(1,c_1^2)],\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Für $\varphi_1(x)$ und E sind also (1.15) und (1.16) erfüllt. Im folgenden können wir also $n>1$ annehmen. $c_i\leqq 1$ $(i=1,\ldots,n)$ kann auch angenommen werden. Ist nämlich $c_{i_0}>1$ für ein i_0, dann gilt die Behauptung für $E=[0,1]$ und $\varphi_1(x)=r_1(x),\ldots,\varphi_{i_0-1}(x)=r_{i_0-1}(x)$, $\varphi_{i_0}(x)=r_0(x)$, $\varphi_{i_0+1}(x)=r_{i_0}(x),\ldots,\varphi_n(x)=$ $=r_{n-1}(x)$, wo $r_i(x)=\text{sign}\sin 2^i\pi x$ die i-te Rademachersche Funktion bedeutet.

Es sei $c=\min(c_1,\ldots,c_n)$. Mit m_k wird die Anzahl derjenigen c_i bezeichnet, für die $(k-1)c^2<c_i^2\leqq kc^2$ gilt. Es sei

$$N=\sum_{k\geqq 1} km_k(\geqq n).$$

Wir benützen das Funktionensystem von S. KACZMARZ[9]. Es bezeichne p den ganzen Teil von $N/2$. Es sei

$$\bar{g}_k(x)=\frac{1}{l-p-k-1/2}\quad\text{für}\quad x\in\left[\frac{l-1}{p},\frac{l}{p}\right)\quad(l=1,\ldots,2N,\ k=1,\ldots,N).$$

Diese Funktionen sind im Intervall $[0,\alpha)$ $\left(\alpha=\dfrac{2N}{p};\ 4\leqq\alpha\leqq 6\right)$ definiert. Mit $B_1, B_2,\ldots$ werden wir im folgenden von N unabhängige, positive Konstanten bezeichnen. Durch einfache Rechnung ergibt sich:

$$\int_0^\alpha \bar{g}_k^2(x)dx\leqq\frac{B_1}{N}\qquad(k=1,\ldots,N) \tag{1.17}$$

[9]) S. KACZMARZ, Notes on orthogonal series II, *Studia Math.* **5** (1934), 103—106.

und

$$|\alpha_{k,l}| \leqq \frac{B_2}{N^2} \qquad (k \neq l), \tag{1.18}$$

wo

$$\alpha_{k,l} = \int_0^\alpha \bar{g}_k(x)\bar{g}_l(x)\,dx$$

ist.

Im Intervall $[\alpha, 10]$ definieren wir die Funktionen $\bar{g}_k(x)$ folgenderweise. Wir teilen das Intervall $[\alpha, 7)$ in $N(N-1)$ Teilintervalle gleicher Länge $I_{k,l}$ $(1 \leqq k \leqq N,\ 1 \leqq l \leqq N, k \neq l)$. Es sei

$$\bar{g}_k(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{N(N-1)}{2(7-\alpha)}|\alpha_{k,l}|} & x \in I_{k,l}, \\ -\sqrt{\dfrac{N(N-1)}{2(7-\alpha)}|\alpha_{k,l}|}\ \operatorname{sign} \alpha_{k,l} & x \in I_{l,k}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(k = 1, \ldots, N)$. Aus (1.17) und (1.18) ergibt sich durch einfache Rechnung

$$\int_0^{10} \bar{g}_k^2(x)\,dx \leqq \frac{B_3}{N} \qquad (k = 1, \ldots, N). \tag{1.19}$$

Es wird

$$g_k(x) = \bar{g}_k(x) \left\{ \int_0^{10} \bar{g}_k^2(x)\,dx \right\}^{-1/2} \qquad (k = 1, \ldots, N)$$

gesetzt.

Es kann leicht eingesehen werden, daß die Treppenfunktionen $g_k(x)$ in $[0, 10]$ ein orthonormiertes System bilden. Aus der Definition von $g_k(x)$ und aus (1.19) bekommen wir nun die folgenden Abschätzungen. Ist für eine natürliche Zahl $m (0 \leqq m < N)$ $x \in \left[\dfrac{p+m}{p}, \dfrac{p+m+1}{p}\right)$, dann sind die Funktionenwerte $g_{m+1}(x), \ldots, g_N(x)$ negativ und es gilt

$$\left| \sum_{k=\varkappa}^{N} g_k(x) \right| \geqq B_4 \sqrt{N} \sum_{k=\varkappa}^{N} \frac{1}{k-m-1/2} \qquad (\varkappa \geqq m+1), \tag{1.20}$$

sind hingegen die Funktionenwerte $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)$ positiv und gilt

$$\sum_{k=1}^{\varkappa} g_k(x) \geqq B_5 \sqrt{N} \sum_{k=1}^{\varkappa} \frac{1}{m-k+1/2} \qquad (\varkappa < m+1). \tag{1.21}$$

Für jedes i $(1 \leqq i \leqq n)$ bezeichne p_i die natürliche Zahl, für die $(p_i - 1)c^2 < c_i^2 \leqq p_i c^2$ gilt. Offensichtlich gilt $p_i \geqq 1$ und $p_1 + \cdots + p_n = N$. Es seien $s_1, \ldots, s_q$

$(0 \leqq q \leqq 8)$ diejenigen Indizes i, für die $N \leqq 8p_i$ gilt. Es seien $\bar{J}_{s_r} = \left[7 + \frac{p_{s_1} + \cdots + p_{s_{r-1}}}{p}, \; 7 + \frac{p_{s_1} + \cdots + p_{s_r}}{p}\right)$ und

$$\psi_{s_r}(x) = \begin{cases} \frac{1}{12} c\sqrt{N} & x \in \bar{J}_{s_r}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(r = 1, \ldots, q)$. Da $7 + \frac{p_{s_1} + \cdots + p_{s_q}}{p} \leqq 7 + \frac{p_1 + \cdots + p_n}{p} = 7 + \frac{N}{p} \leqq 10$ ist, so gilt $\bar{J}_{s_r} \subseteq [7, 10]$ $(r = 1, \ldots, q)$. Da nach der Annahme $c_i \leqq 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ und nach der Definition von p_i $c^2 N \frac{p_{s_r}}{p} \leqq 3c^2 p_{s_r} \leqq 6c^2_{s_r} \leqq 6$ $(r = 1, \ldots, q)$ gilt, so ist

$$\beta_r = \int_0^{10} \psi^2_{s_r}(x)\,dx \leqq \frac{1}{2} \qquad (r = 1, \ldots, q).$$

Wir setzen

$$\bar{f}_i(x) = \frac{1}{\sqrt{p_i}} \sum_{k = p_1 + \cdots + p_{i-1} + 1}^{p_1 + \cdots + p_i} g_k(x) \quad (1 \leqq i \leqq n;\; i \neq s_1, \ldots, s_q)$$

und

$$\bar{f}_{s_r}(x) = \frac{\sqrt{1 - \beta_r}}{\sqrt{p_{s_r}}} \sum_{k = p_1 + \cdots + p_{s_r - 1} + 1}^{p_1 + \cdots p_{s_r}} g_k(x) + \psi_{s_r}(x) \quad (r = 1, \ldots, q).$$

Hier ist $\sqrt{1 - \beta_r} \geqq 1/\sqrt{2}$ $(r = 1, \ldots, q)$. Offensichtlich bilden die Treppenfunktionen $\bar{f}_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ in $[0, 10]$ ein orthonormiertes System.

Es seien $J_1 = \left[1, \frac{p + p_1}{p}\right) \cap [1, 2)$, $J_s = \left[\frac{p + p_1 + \cdots + p_{s-1}}{p}, \frac{p + p_1 + \cdots + p_s}{p}\right)$ $(1 < s < n)$ und $J_n = \left[\frac{p + p_1 + \cdots + p_{n-1}}{p}, \frac{p + p_1 + \cdots + p_n}{p}\right) \cap [2, 3)$. Es gelten $\operatorname{mes}(J_1) = \min\left(\frac{p_1}{p}, 1\right)$, $\operatorname{mes}(J_s) = \frac{p_s}{p}$ $(1 < s < n)$ und $\operatorname{mes}(J_n) = \min\left(\frac{p_n}{p}, 1\right)$ und so ist

$$\sum_{s=1}^{n} \operatorname{mes}(J_s) \geqq 1. \tag{1.22}$$

Im folgenden werden wir mit $C_1, C_2, \ldots$ von der Folge $\{c_i\}$ und von n unabhängige, positive Konstanten bezeichnen. Ist $x \in J_s$ $(1 < s < n)$, dann gibt es ein m $(p_1 + \cdots + p_{s-1} \leqq m < p_1 + \cdots + p_s)$, derart, daß $x \in \left[\frac{p + m}{p}, \frac{p + m + 1}{p}\right)$

erfüllt ist. Dann sind die Funktionenwerte $g_k(x)$ $(p_1+\cdots+p_s\leqq k\leqq N)$ negativ bzw. die Funktionenwerte $g_k(x)$ $(1\leqq k\leqq p_1+\cdots+p_{s-1})$ positiv und aus (1.20) bzw. aus (1.21) ergibt sich:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=s+1}^{n} c_i\bar{f}_i(x)\right| &= \left|\sum_{i=s+1}^{n}\frac{c_i}{\sqrt{p_i}}\sum_{k=p_1+\cdots+p_{i-1}+1}^{p_1+\cdots+p_i} g_k(x)\right| \geqq \frac{c}{2}\left|\sum_{k=p_1+\cdots+p_s+1}^{N} g_k(x)\right| \geqq \\ &\geqq \frac{B_4}{2}c\sqrt{N}\sum_{k=p_1+\cdots+p_s+1}^{N}\frac{1}{k-m+1/2} \geqq C_1 c\sqrt{N}\log\frac{N-m}{p_s}\end{aligned} \tag{1.23}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{s-1} c_i\bar{f}_i(x) &= \sum_{i=1}^{s-1}\frac{c_i}{\sqrt{p_i}}\sum_{k=p_1+\cdots+p_{i-1}+1}^{p_1+\cdots+p_i} g_k(x) \geqq \frac{c}{2}\sum_{k=1}^{p_1+\cdots+p_{s-1}} g_k(x) \geqq \\ &\geqq \frac{B_5}{2}c\sqrt{N}\sum_{k=1}^{p_1+\cdots+p_{s-1}}\frac{1}{m-k+1/2} \geqq C_2 c\sqrt{N}\log\frac{m}{p_s}.\end{aligned} \tag{1.24}$$

Ist endlich $x\in J_1$, bzw. $x\in J_n$, dann ergibt sich ähnlicherwiese, daß

$$\left|\sum_{i=2}^{n} c_i\bar{f}_i(x)\right| \geqq C_1 c\sqrt{N}\log\frac{N-m}{p_1} \tag{1.25}$$

mit einem m $(0\leqq m<p)$ bzw.

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_i\bar{f}_i(x) \geqq C_2 c\sqrt{N}\log\frac{m}{p_n} \tag{1.26}$$

mit einem m $(p\leqq m<N)$ gelten. Aus (1.23), (1.24), (1.25) und (1.26) fogt, daß

$$\max_{1\leqq i_1\leqq i_2\leqq n}|c_{i_1}\bar{f}_{i_1}(x)+\cdots+c_{i_2}\bar{f}_{i_2}(x)| \geqq C_3 c\sqrt{N}\log\frac{N}{p_s} \quad\text{mit}\quad \frac{N}{p_s}>8 \tag{1.27}$$
$$(x\in J_s;\ 1\leqq s\leqq n,\ s\neq s_1,\ldots,s_q)$$

gilt. Es gilt auch die Abschätzung

$$\max_{1\leqq i_1\leqq i_2\leqq n}|c_{i_1}\bar{f}_{i_1}(x)+\cdots+c_{i_2}\bar{f}_{i_2}(x)| \geqq |\bar{f}_{s_r}(x)| = \frac{1}{12}c\sqrt{N}\quad (x\in\bar{J}_{s_r};\ 1\leqq r\leqq q). \tag{1.28}$$

Wir setzen $I_s=J_s$ $(1\leqq s\leqq n;\ s\neq s_1,\ldots,s_q)$ und $I_{s_r}=\bar{J}_{s_r}$ $(r=1,\ldots,q)$. Aus (1.22) ergibt sich leicht:

$$\sum_{s=1}^{n}\operatorname{mes}(I_s)\geqq 1. \tag{1.29}$$

Es sei

$$f_i(x)=\frac{1}{\sqrt{10}}\bar{f}_i\left(\frac{x}{10}\right)\quad (i=1,\ldots,n)$$

und I_s bezeichne das mit der Lineartransformation $y = \frac{x}{10}$ erhaltende Bild von Intervall $\bar{I}_s$ $(s = 1, \ldots, n)$. Aus (1.27), (1.28) und (1.29) ergibt sich:

$$\max_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} |c_{i_1} f_{i_1}(x) + \cdots + c_{i_2} f_{i_2}(x)| > \varrho_s \quad (x \in I_s;\ 1 \leq s \leq n)$$

und

$$\sum_{s=1}^{n} \text{mes}\,(I_s) \geq \frac{1}{10}, \tag{1.30}$$

wo $\varrho_s = C_4 c \sqrt{N} \log \frac{N}{p_s}$ $\left(\text{mit } \frac{N}{p_s} > 8\right)$ für $1 \leq s \leq n$, $s \neq s_1, \ldots, s_q$ und $\varrho_{s_r} = C_4 c \sqrt{N}$ für $r = 1, \ldots, q$ ist.

Unter Anwendung von Hilfssatz 3 ergibt sich ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{\varphi_i(x)\}$, für die (1.15) in einer einfachen Menge $E (\subseteq [0, 1])$ erfüllt ist; dabei gilt

$$\text{mes}\,(E) = \min\left(\sum_{s=1}^{n} \text{mes}\,(I_s),\ \sum_{s=1}^{n} \varrho_s^2\ \text{mes}\,(I_s)\right). \tag{1.31}$$

Nach den Definitionen von ϱ_s und I_s ergibt sich, daß

$$\varrho_s^2\ \text{mes}\,(I_s) \geq \begin{cases} C_5 c^2 p_s \log^2 \frac{N}{p_s} \left(\text{mit } \frac{N}{p_s} > 8\right) & (1 \leq s \leq n;\ s \neq s_1, \ldots, s_q), \\ C_5 c^2 p_{s_r} & (s = s_r;\ r = 1, \ldots, q) \end{cases}$$

gilt, woraus

$$\sum_{s=1}^{n} \varrho_s^2\ \text{mes}\,(I_s) \geq C_6 \sum_{i=1}^{n} c^2 p_i \lambda_i (p_1, \ldots, p_n) = C_6 \sum_{i=1}^{n} c^2 p_i \lambda_i (c^2 p_1, \ldots, c^2 p_n)$$

folgt.

Da $c_i^2 \leq c^2 p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ ist, bekommen wir auf Grund von Hilfssatz 1:

$$\sum_{s=1}^{n} \varrho_s^2\ \text{mes}\,(I_s) \geq C_7 M(c_1, \ldots, c_n). \tag{1.32}$$

Aus (1.30), (1.31) und (1.32) folgt endlich (1.16).

Damit haben wir Hilfssatz 4 vollständig bewiesen.

§ 2. Beweis von Satz 1

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $[a, b] = [0, 1]$ angenommen werden. Ist die Bedingung (2) nicht erfüllt, dann gibt es auf Grund von Hilfssatz 2 eine Indexfolge $(0 =) n_0 < \cdots < n_k < \cdots$, für die

$$\sum_{k=0}^{\infty} M(a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}) = \infty \tag{2.1}$$

ist.

Wir werden ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{\Phi_i(x)\}$ und eine Folge von einfachen Mengen $E_k(\subseteqq[0, 1])$ definieren, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Es bestehen die Relationen

$$(2.2)\qquad \max_{n_k<i_1\leqq i_2\leqq n_{k+1}} |a_{i_1}\Phi_{i_1}(x)+\cdots+a_{i_2}\Phi_{i_2}(x)|\geqq 1 \quad (x\in E_k;\ k=1, 2, \ldots),$$

$$(2.3)\qquad \operatorname{mes}(E_k)\geqq K\min(1, M(a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}})) \quad (k=1, 2, \ldots)$$

(wo K die in (1.16) stehende positive Konstante ist) und die Mengen E_k stochastisch unabhängig sind.

Es seien $\mu_1, \ldots, \mu_p$ bzw. $m_1, \ldots, m_q$ diejenigen Indizes i $(1\leqq i\leqq n_1)$, für die $a_i=0$ bzw. $a_i\neq 0$ ist. Wir setzen

$$\Phi_{\mu_k}(x)=r_k(x) \qquad (k=1, \ldots, p).$$

Dann können wir das Intervall $[0, 1]$ in endlich viele Teilintervalle I_r $(1\leqq r\leqq \varrho)$ einteilen, derart, daß in jedem I_r jede Funktion $\Phi_{\mu_k}(x)$ $(k=1, \ldots, p)$ konstant ist.

Mit Anwendung von Hilfssatz 4 auf $|a_{m_1}|, \ldots, |a_{m_q}|$ ergibt sich ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_i(x)$ $(i=1, \ldots, q)$, für die

$$(2.4)\qquad \max_{1\leqq j_1\leqq j_2\leqq q} \big||a_{m_{j_1}}|\varphi_{j_1}(x)+\cdots+|a_{m_{j_2}}|\varphi_{j_2}(x)\big|\geqq 1$$

auf einer einfachen Menge E $(\subseteqq[0, 1])$ gilt, wobei

$$(2.5)\qquad \operatorname{mes}(E)\geqq K\min\big(1, M(|a_{m_1}|, \ldots, |a_{m_q}|)\big)$$

ist. Wir setzen

$$\Phi_{m_k}(x)=\operatorname{sign} a_{m_k}\cdot\sum_{r=1}^{\varrho}\varphi_k(x; I_r) \qquad (k=1, \ldots, q)$$

und

$$E_1=\bigcup_{r=1}^{\varrho} E(I_r)^{10)}.$$

[10]) Es sei $f(x)$ eine in $[0, 1]$ definierte Funktion und $E\subseteqq[0, 1]$. Für ein endliches Intervall $I=[u, v]$ wird

$$f(x; I)=\begin{cases} f\left(\dfrac{x-u}{v-u}\right) & u<x<v,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

gesetzt; mit $E(I)$ wird das mit der Lineartransformation $y=u+(v-u)x$ erhaltene Bild von E bezeichnet. Es besteht $\operatorname{mes}(E(I))=\operatorname{mes}(I)\cdot\operatorname{mes}(E)$. Sind $f(x)$ und $g(x)$ in $[0, 1]$ quadratisch-integrierbare Funktionen, dann gilt

$$\int_u^v f(x; I)\cdot g(x; I)\,dx=\operatorname{mes}(I)\int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

Die Treppenfunktionen $\Phi_i(x)$ $(1 \leqq i \leqq n_1)$ bilden in $[0, 1]$ ein orthonormiertes System. Da für $x \in E_1$

$$\max_{1 \leqq i_1 \leqq i_2 \leqq n_1} |a_{i_1}\Phi_{i_1}(x) + \cdots + a_{i_2}\Phi_{i_2}(x)| = \max_{1 \leqq j_1 \leqq j_2 \leqq q} \big||a_{m_{j_1}}|\varphi_{j_1}(y) + \cdots + |a_{m_{j_2}}|\varphi_{j_2}(y)\big|$$

mit $y \in E$ gilt, ergibt sich aus (2. 4), daß (2. 2) für $k=1$ erfüllt ist. Da $M(|a_{m_1}|, \ldots, |a_{m_q}|) = M(a_1, \ldots, a_{n_1})$ ist, folgt aus (2. 5), daß (2. 3) für $k=1$ gilt.

Es sei $\varkappa(>1)$ eine natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\Phi_i(x)$ $(1 \leqq i \leqq n_{\varkappa-1})$ und die einfachen Mengen $E_1, \ldots, E_{\varkappa-1}(\subseteqq [0, 1])$ schon definiert sind, derart, daß diese Funktionen in $[0, 1]$ ein orthonormiertes System bilden, diese Mengen stochastisch unabhängig sind und (2. 2), (2. 3) für $k = 1, \ldots, \varkappa-1$ erfüllt sind. Dann können wir das Intervall $[0, 1]$ in endlich viele Teilintervalle J_s $(1 \leqq s \leqq \sigma)$ einteilen, derart, daß jede Funktion $\Phi_i(x)$ $(1 \leqq i \leqq n_{\varkappa-1})$ in jedem J_s konstant ist. Es seien $\bar\mu_1, \ldots, \bar\mu_{\bar p}$ bzw. $\bar m_1, \ldots, \bar m_{\bar q}$ diejenigen Indizes i $(n_{\varkappa-1} < i \leqq n_\varkappa)$, für die $a_i = 0$ bzw. $a_i \neq 0$ gilt. Wir setzen

$$\Phi_{\bar\mu_k}(x) = \sum_{s=1}^{\sigma} r_k(x; J_s) \qquad (k = 1, \ldots, \bar p).$$

Dann teilen wir das Intervall $[0, 1]$ in endlich viele Teilintervalle $\bar I_r$ $(1 \leqq r \leqq \bar\varrho)$ ein, derart, daß in jedem $\bar I_r$ jede Funktion $\Phi_i(x)$ $(1 \leqq i \leqq n_{\varkappa-1})$, $\Phi_{\bar\mu_k}(x)$ $(k = 1, \ldots, \bar p)$ konstant ist und jede Menge E_k $(1 \leqq k \leqq \varkappa-1)$ die Vereinigung einiger $\bar I_r$ ist.

Unter Anwendung von Hilfssatz 4 auf $|a_{\bar m_1}|, \ldots, |a_{\bar m_{\bar q}}|$ ergibt sich ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\bar\varphi_i(x)$ $(i = 1, \ldots, \bar q)$, für die

$$\max_{1 \leqq j_1 \leqq j_2 \leqq \bar q} \big||a_{\bar m_{j_1}}|\bar\varphi_{j_1}(x) + \cdots + |a_{\bar m_{j_2}}|\bar\varphi_{j_2}(x)\big| \geqq 1 \tag{2.6}$$

in einer einfachen Menge $\bar E$ $(\subseteqq [0, 1])$ gilt, wo

$$\operatorname{mes}(\bar E) \geqq K \min\big(1, M(|a_{\bar m_1}|, \ldots, |a_{\bar m_{\bar q}}|)\big) \tag{2.7}$$

ist. Wir setzen

$$\Phi_{\bar m_k}(x) = \operatorname{sign} a_{\bar m_k} \cdot \sum_{r=1}^{\bar\varrho} \bar\varphi_k(x; \bar I_r) \qquad (k = 1, \ldots, \bar q)$$

und

$$E = \bigcup_{r=1}^{\bar\varrho} \bar E(\bar I_r).$$

Die Treppenfunktionen $\Phi_i(x)$ $(1 \leqq i \leqq n_\varkappa)$ bilden in $[0, 1]$ ein orthonormiertes System. Da für $x \in E_\varkappa$

$$\max_{n_{\varkappa-1} < i_1 \leqq i_2 \leqq n_\varkappa} |a_{i_1}\Phi_{i_1}(x) + \cdots + a_{i_2}\Phi_{i_2}(x)| = \max_{1 \leqq j_1 \leqq j_2 \leqq \bar q} \big||a_{\bar m_{j_1}}|\bar\varphi_{j_1}(y) + \cdots + |a_{\bar m_{j_2}}|\bar\varphi_{j_2}(y)\big|$$

mit $y \in \bar{E}$ gilt, so ergibt sich aus (2.6), daß (2.2) für $k = \varkappa$ gilt. Da $M(|a_{\bar{m}_1}|, \ldots, |a_{\bar{m}_{\bar{q}}}|) = M(a_{n_{\varkappa-1}+1}, \ldots, a_{n_\varkappa})$ ist, folgt aus (2.7), daß (2.3) für $k = \varkappa$ gilt. Offensichtlich sind die Mengen $E_1, \ldots, E_\varkappa$ stochastisch unabhängig.

Mit vollständiger Induktion bekommen wir ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_i(x)\}$ und eine Mengenfolge $\{E_k\}$ mit den erwähnten Eigenschaften.

Ist $x \in \overline{\lim_{k\to\infty}} E_k$, dann besteht (2.2) für unendlich viele k und so divergiert die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \Phi_i(x) \tag{2.8}$$

im Punkt x. Aus (2.1), (2.3) und aus der stochastischen Unabhängigkeit der Mengen E_k, ergibt sich unter Anwendung des zweiten Borel-Cantellischen Lemmas, daß

$$\operatorname{mes}(\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k) = 1$$

ist. Also divergiert die Orthogonalreihe (2.8) fast überall.

Damit haben wir Satz 1 vollständig bewiesen.

§ 3. Beweis von Satz 2

Da im Falle $\{a_n\} \notin l^2$ die Rademachersche Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i r_i(x)$$

in $[0,1]$ fast überall nicht $(C,1)$-summierbar ist[11], darf $\{a_n\} \in l^2$ angenommen werden.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann auch $[a,b] = [0,1]$ angenommen werden. Ist die Bedingung (3) nicht erfüllt, dann gibt es auf Grund von Hilfssatz 2 eine Indexfolge $(0=)n_0 < \cdots < n_k < \cdots$, für die

$$\sum_{k=0}^{\infty} M(A_{n_k+1}, \ldots, A_{n_{k+1}}) = \infty \tag{3.1}$$

ist. Es seien b_i $(i = 1, 2, \ldots)$ rationale Zahlen mit $a_i^2 < b_i^2$, $|c_i| \le i^{-2}$ $(c_i = a_i - b_i;\ i = 1, 2, \ldots)$. Dann ist $A_i^2 < B_i^2 = b_{2^{i-1}+1}^2 + \cdots + b_{2^i}^2$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Auf Grund von Hilfssatz 1 und (3.1) bekommen wir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} M(B_{n_k+1}, \ldots, B_{n_{k+1}}) = \infty. \tag{3.2}$$

---

[11]) A. Zygmund, On the convergence of lacunary trigonometric series, *Fundamenta Math.* **16** (1930), 90–107.

Wegen (3.2) gibt es nach Satz 1 ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{\Phi_i(x)\}$ und eine Folge von einfachen Mengen $E_k (\subseteqq [0, 1])$ derart, daß

$$\max_{n_k < i_1 \leqq i_2 \leqq n_{k+1}} |B_{i_1} \Phi_{i_1}(x) + \cdots + B_{i_2} \Phi_{i_2}(x)| \geqq 1 \quad (x \in E_k; k = 1, 2, \ldots) \tag{3.3}$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{mes}(E_k) = \infty \tag{3.4}$$

gelten.

Wir werden ein orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{\psi_i(x)\}$ und eine Folge von einfachen Mengen $F_k (\subseteqq [0, 1])$ mit folgenden Eigenschaften definieren:

Es gelten

$$\max_{n_k < i_1 \leqq i_2 \leqq n_{k+1}} |b_{2^{i_1-1}+1} \psi_{2^{i_1-1}+1}(x) + \cdots + b_{2^{i_2}} \psi_{2^{i_2}}(x)| \geqq 1 \quad (x \in F_k; k = 1, 2, \ldots), \tag{3.5}$$

$$\operatorname{mes}(F_k) = \operatorname{mes}(E_k) \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3.6}$$

und die Mengen F_k sind stochastisch unabhängig.

Es sei $\psi_1(x) \equiv 1$. Wir schreiben die endlich vielen rationalen Zahlen $b_n^2 B_i^{-2}$ $(2^{i-1} < n \leqq 2^i; 1 \leqq i \leqq n_1)$ als Brüche von natürlichen Zahlen mit gemeinsamem Nenner auf:

$$\frac{b_n^2}{B_i^2} = \frac{p_n}{q}.$$

Wir teilen das Intervall $[0, 1]$ in q Teilintervalle gleicher Länge $I_r = [u_r, v_r]$ $(1 \leqq r \leqq q)$. Es sei

$$\psi_n(x) = \frac{B_i}{b_n} \sum_{r = p_{2^{i-1}+1} + \cdots + p_{n-1} + 1}^{p_{2^{i-1}+1} + \cdots + p_n} \Phi_i(x; I_r) \qquad (2^{i-1} < n \leqq 2^i; 1 \leqq i \leqq n_1)$$

und

$$F_1 = \bigcup_{r=1}^{q} E_1(I_r).$$

Diese Funktionen $\psi_n(x)$ sind Treppenfunktionen und bilden in $[0, 1]$ ein orthonormiertes System. F_1 ist eine einfache Menge und (3.6) ist für $k = 1$ erfüllt. Ist $x \in F_1$, so gibt es ein r $(1 \leqq r \leqq q_1)$ derart, daß $x \in E_1(I_r)$ gilt. Dann ist $y = (x - u_r)(v_r - u_r)^{-1} \in E_1$, und so gilt nach (3.3) und nach $\Phi_i(y) = \Phi_i(x; I_r)$

$$\max_{1 \leqq i_1 \leqq i_2 \leqq n_1} |B_{i_1} \Phi_{i_1}(x; I_r) + \cdots + B_{i_2} \Phi_{i_2}(x; I_r)| \geqq 1. \tag{3.7}$$

Nach der Definition von $\psi_i(x)$ ist aber

$$b_{2^{i_1-1}+1} \psi_{2^{i_1-1}+1}(x) + \cdots + b_{2^{i_2}} \psi_{2^{i_2}}(x) = B_{i_1} \Phi_{i_1}(x; I_r) + \cdots + B_{i_2} \Phi_{i_2}(x; I_r)$$

für jedes $1 \leqq i_1 \leqq i_2 \leqq n_1$. Daraus und aus (3.7) folgt, daß (3.5) für $k=1$ erfüllt ist.

Es sei $\varkappa(>1)$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\psi_i(x)\,(1 \leqq i \leqq 2^{n_{\varkappa-1}})$ und die einfachen Mengen $F_1, \ldots, F_{\varkappa-1}$ schon derart definiert sind, daß diese Funktionen in $[0, 1]$ ein orthonormiertes System bilden, diese Mengen stochastisch unabhängig sind und (3.5), (3.6) für $k=1, \ldots, \varkappa-1$ erfüllt sind.

Dann kann das Intervall $[0, 1]$ in endlich viele Teilintervalle J_s $(1 \leqq s \leqq \sigma)$ zerlegt werden, derart, daß in jedem J_s die Funktionen $\psi_i(x)$ $(1 \leqq i \leqq 2^{n_{\varkappa-1}})$ konstant sind und jede Menge F_k $(1 \leqq k \leqq \varkappa-1)$ die Vereinigung gewisser J_s ist. Wir schreiben die endlich vielen rationalen Zahlen $b_n^2 B_i^{-2}$ $(2^{i-1} < n \leqq 2^i;\ n_{\varkappa-1} < i \leqq n_\varkappa)$ als Brüche von natürlichen Zahlen mit gemeinsamem Nenner auf:

$$\frac{b_n^2}{B_i^2} = \frac{\bar{p}_n}{\bar{q}}.$$

Wir teilen jedes J_s in $\bar{q}$ Teilintervalle gleicher Länge $J_{s,r} = [u_{s,r}, v_{s,r}]$ $(1 \leqq s \leqq \sigma,\ 1 \leqq r \leqq \bar{q})$ ein und wir setzen

$$\psi_n(x) = \frac{B_i}{b_n} \sum_{s=1}^{\sigma} \sum_{r=\bar{p}_{2^{i-1}+1}+\cdots+\bar{p}_{n-1}+1}^{\bar{p}_{2^{i-1}+1}+\cdots+\bar{p}_n} \Phi_i(x; J_{s,r})$$

$(2^{i-1} < n \leqq 2^i;\ n_{\varkappa-1} < i \leqq n_\varkappa)$ und

$$F_\varkappa = \bigcup_{s=1}^{\sigma} \bigcup_{r=1}^{\bar{q}} E_\varkappa(J_{s,r}).$$

Die Treppenfunktionen $\psi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq 2^{n_\varkappa})$ bilden in $[0, 1]$ ein orthonormiertes Funktionensystem, die einfachen Mengen $F_1, \ldots, F_\varkappa$ sind stochastisch unabhängig und (3.6) ist für $k=\varkappa$ offensichtlich erfüllt. Ist $x \in F_\varkappa$, dann gibt es Werte s, r $(1 \leqq s \leqq \sigma,\ 1 \leqq r \leqq \bar{q})$, derart, daß $x \in E_\varkappa(J_{s,r})$ gilt. Dann ist $y = (x - u_{s,r})(v_{s,r} - u_{s,r}) \in E_\varkappa$ und so gilt nach (3.8) und nach $\Phi_i(x; J_{s,r}) = \Phi_i(y)$

$$\max_{n_{\varkappa-1} < i_1 \leqq i_2 \leqq n_\varkappa} |B_{i_1} \Phi_{i_1}(x; J_{s,r}) + \cdots + B_{i_2} \Phi_{i_2}(x; J_{s,r})| \geqq 1. \tag{3.8}$$

Nach der Definition von $\psi_i(x)$ ist aber

$$b_{2^{i_1-1}+1} \psi_{2^{i_1-1}+1}(x) + \cdots + b_{2^{i_2}} \psi_{2^{i_2}}(x) = B_{i_1} \Phi_{i_1}(x; J_{s,r}) + \cdots + B_{i_2} \Phi_{i_2}(x; J_{s,r})$$

für jedes $n_{\varkappa-1} < i_1 \leqq i_2 \leqq n_\varkappa$. Daraus und aus (3.8) folgt, daß (3.5) für $k=\varkappa$ erfüllt ist.

Mit vollständiger Induktion ergibt sich ein orthonormiertes System $\{\psi_i(x)\}$ und eine Mengenfolge $\{F_k\}$ mit den erwähnten Eigenschaften.

Ist $x \in \overline{\lim_{k\to\infty}} F_k$, dann gilt (3.5) für unendlich viele k, also divergiert die Folge der 2^i-ten Partialsummen der Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i \psi_i(x) \tag{3.9}$$

in $[0, 1]$ fast überall. Aus (3.4), (3.6) und aus der stochastischen Unabhängigkeit der Folge $\{F_k\}$ ergibt sich, daß $\operatorname{mes}(\overline{\lim_{k\to\infty}} F_k) = 1$ ist. Also divergiert die Folge der 2^i-ten Partialsummen der Reihe (3.9) fast überall. Da nach unseren Annahmen $\{b_i\} \in l^2$ ist, folgt daraus auf Grund eines bekannten Satzes[12], daß die Reihe (3.9) fast überall nicht $(C, 1)$-summierbar ist. Aus unserer Annahme folgt, daß die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i) \psi_i(x)$$

fast überall konvergiert. So bekommen wir, daß die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \psi_i(x) \tag{3.10}$$

in $[0, 1]$ fast überall nicht $(C, 1)$-summierbar ist.

Damit haben wir Satz 2 vollständig bewiesen.

Bemerkung. In obigen haben wir folgendes gezeigt. *Ist die Bedingung (3) nicht erfüllt, dann gibt es ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\psi_i(x)\}$ derart, daß die Folge der 2^i-ten Partialsummen von (3.10) fast überall divergiert.*

Ähnlicherweise kann die folgende, allgemeinere Behauptung bewiesen werden. Für eine Indexfolge $(0 =)\mu_0 < \cdots < \mu_k < \cdots$ wird $A_i^2(\{\mu_k\}) = a^2_{\mu_i+1} + \cdots + a^2_{\mu_{i+1}}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ gesetzt.

Satz 3. *Damit die Folge der μ_i-ten Partialsummen der Orthogonalreihe (1) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_i(x)\}$ fast überall konvergiert, ist es notwendig, daß*

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_i^2(\{\mu_k\}) \log_+^2 A_i^{-2}(\{\mu_k\}) < \infty$$

gilt.

(Eingegangen am 30. Januar 1961.)

[12]) A. N. Kolmogoroff, Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.* **5** (1924), 96—97.