Konvergenzfreie p-Gruppen

Von G. ROCH (Münster)

Einleitung

Die Lösung des Strukturproblems höhenendlicher p-Gruppen ist nicht so schnell zu erwarten. Man wird sich daher zunächst mit der Untersuchung gewisser durch zusätzliche Bedingungen eingeschränkter Mengen solcher Gruppen begnügen. Z. B. kann man verlangen, daß die Gruppen abzählbar sind. Für diese Menge von Gruppen wurde das Problem von PRÜFER [7] gelöst. Diese und die im folgenden beschriebene Menge höhenendlicher p-Gruppen sind m. W. die einzigen, für welche das Strukturproblem gelöst wurde.

Eine höhenendliche p-Gruppe G heiße *halbfinit,* wenn es eine Teilmenge U der Menge Z der natürlichen Zahlen und Untergruppen $B^i \simeq (p^i)$, $i \in Z$ von G gibt, so daß

$$G = \sum_{i \in U} B^i + (\prod_{i \in \bar{U}} B^i)^* . \tag{1}$$

Hierbei bedeutet $\bar{U}$ die Komplementärmenge von U und $(\ldots)^*$ die Torsionsuntergruppe der in der Klammer stehenden Gruppe. Wir wollen $U, V \subset Z$ *äquivalent* nennen, wenn sie sich um höchstens endlich viele Zahlen unterscheiden. ULM hat bewiesen[1]):

Ist G halbfinit und gilt

$$G = \sum_{i \in U} B^i + (\prod_{i \in \bar{U}} B^i)^* = \sum_{i \in V} C^i + (\prod_{i \in \bar{V}} C^i)^*$$

mit $B^i \simeq C^i \simeq (p^i)$, so sind U und V äquivalent.

Es läßt sich mithin jeder halbfiniten höhenendlichen p-Gruppe G eindeutig eine Klasse $\mathbf{T}(G)$ äquivalenter Teilmengen von Z zuordnen. Sind G und H halbfinit, so ist dann und nur dann $\mathbf{T}(G) = \mathbf{T}(H)$, wenn $G \simeq H$ ist.

[1]) Nach mündlicher Mitteilung; nicht publiziert. Unabhängig davon H. LEPTIN, ebenfalls nicht publiziert.

Damit ist das Strukturproblem für die halbfiniten höhenendlichen p-Gruppen gelöst.

Der Begriff der halbfiniten p-Gruppen läßt sich erweitern, indem man die B^i in (1) durch beliebige direkte Summen zyklischer Gruppen der Ordnungen (p^i) ersetzt.

Es ist aber noch eine weitere Verallgemeinerung möglich: Die halbfiniten p-Gruppen entsprechen den halbfiniten Koordinatenräumen, die gewisse von KÖTHE [5] in die Theorie der linearen Vektorräume eingeführte konvergenzfreie Räume sind. Auch dieser Begriff läßt sich auf Gruppen übertragen, und man gelangt so zu den *konvergenzfreien p-Gruppen*. Für diese werden wir entsprechend wie bei den halbfiniten p-Gruppen ein vollständiges Invariantensystem angeben.

Aus beweistechnischen Gründen ist es besser, sich nicht auf p-Gruppen zu beschränken, sondern etwas allgemeiner Gruppen mit dem Ring der ganzen p-adischen Zahlen als Operatorenbereich zu betrachten.

§ 1. Grundlagen

Es sei p eine Primzahl und $\mathbf{P}$ der Ring der ganzen p-adischen Zahlen. In dieser Arbeit verstehen wir unter einer $\mathbf{P}$-*Gruppe* G eine additiv geschriebene abelsche Gruppe, die den folgenden Bedingungen genügt:

1. $\mathbf{P}$ ist Operatorenbereich von G,
2. G ist höhenendlich,
3. Die Basisuntergruppen von G sind Torsionsgruppen,
4. G ist eine topologische Gruppe, deren Topologie durch das Umgebungssystem $\{p^n G : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ der Null gegeben ist (dies ist die sogenannte *p-adische Topologie* über G).

Ist eine (topologische) Untergruppe H einer $\mathbf{P}$-Gruppe G eine $\mathbf{P}$-Gruppe, d. h. ist die Topologie über H gleich der p-adischen Topologie, so nennen wir H eine $\mathbf{P}$-*Untergruppe* von G.

Die im folgenden (teilweise) ohne Beweis wiedergegebenen Aussagen sind bekannt oder lassen sich leicht herleiten.

A. *Eine reine Untergruppe einer* $\mathbf{P}$-*Gruppe ist eine* $\mathbf{P}$-*Untergruppe.*

Im allgemeinen ist nicht jede $\mathbf{P}$-Untergruppe einer $\mathbf{P}$-Gruppe rein. Es gilt aber:

B. *Eine überall dichte* $\mathbf{P}$-*Untergruppe einer* $\mathbf{P}$-*Gruppe ist eine reine Untergruppe.*

C. *Eine Untergruppe einer* $\mathbf{P}$-*Gruppe* G *liegt dann und nur dann überall dicht in* G, *wenn ihre Faktorgruppe teilbar ist* [1].

D. *Die vollständige Hülle einer* **P**-*Gruppe ist eine* **P**-*Gruppe* [1].

Die vollständige Hülle einer **P**-Gruppe G wird mit G' bezeichnet.

E. *Die algebraischen Homomorphismen zwischen* **P**-*Gruppen sind stetig.*

F. *Sei G eine vollständige* **P**-*Gruppe, $g_1, g_2, \ldots$ eine Folge aus G. Σg_i konvergiert dann und nur dann, wenn $\lim g_i = 0$ ist.*

Beweis von **F.** Daß $\lim g_i = 0$ aus der Konvergenz von Σg_i folgt, ist klar. Sei umgekehrt $\lim g_i = 0$. Zu gegebenem k[2]) gibt es ein $n(k)$, so daß

$$g_i \in p^k G; \quad i > n(k).$$

Daher ist

$$\sum_{i=1}^{l} g_i - \sum_{i=1}^{m} g_i = \sum_{i=m+1}^{l} g_i \in p^k G; \quad l > m > n(k),$$

also konvergiert Σg_i.

Aus **A**, **B** und **C** folgt:

G. *Die Basisuntergruppen einer* **P**-*Gruppe G sind die einrangig direkt zerlegbaren, in G überall dichten* **P**-*Untergruppen von G.*

Eine einrangig direkt zerlegbare **P**-Gruppe nennen wir im folgenden eine *Basis-***P**-*Gruppe* oder kurz *Basisgruppe.* Der Satz über die Einbettung topologischer Gruppen in ihre vollständigen Hüllen liefert uns:

H. *Sei G eine* **P**-*Gruppe und B eine Basisgruppe. G hat dann und nur dann eine zu B isomorphe Basisuntergruppe, wenn G isomorph einer B enthaltenden* **P**-*Untergruppe von B' ist* [2], [6].

Dieser Satz zeigt, daß eine **P**-Gruppe G mit der Basisuntergruppe B als B enthaltende **P**-Untergruppe von B' aufgefaßt werden kann. Die nächste Aufgabe besteht nun darin, die vollständige Hülle einer Basisgruppe zu beschreiben.

Sei B eine Basisgruppe. *i-Komponenten* B^i, $i = 1, 2, \ldots$ von B werden definiert durch

$$B^i = \sum_{\mu_i} Z_{\mu_i}(i), \qquad Z_{\mu_i}(i) \simeq (p^i); \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$$B = \sum B^i.$$

Die μ_i durchlaufen gewisse Indexmengen M_i. Die B^i sind im allgemeinen nur bis auf Isomorphie eindeutig durch B bestimmt.

Das mit der p-adischen Topologie ausgestattete kartesische Produkt[3]) $B^* = \Pi B^i$ ist eine **P**-Gruppe, die B als **P**-Untergruppe enthält (die B^i und damit B werden in natürlicher Weise als Untergruppen von B^* aufgefaßt). Die i-te Komponente von $b \in B^*$ wird mit b^i bezeichnet.

---

[2]) i, j, k, l, m und n bezeichnen stets natürliche Zahlen.

[3]) Gemeint ist hier das *algebraische* kartesische Produkt.

I. *Sei B eine Basisgruppe. B^* ist vollständig.*

Beweis. Sei $b_1, b_2, \ldots$ eine Cauchy-konvergente Folge aus B^*, k beliebig. Es gibt dann ein $n(k)$, so daß

$$b_l - b_m \in p^k B^*; \quad l, m > n(k).$$

Diese Beziehung überträgt sich auf die Komponenten:

$$(b_l - b_m)^i = b_l^i - b_m^i \in p^k B^i; \quad l, m > n(k); \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Die B^i sind diskret, also vollständig. Mithin gibt es ein $b \in B^*$, so daß

$$b_l^i - b^i \in p^k B^i; \quad l > n(k), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

woraus

$$b_l - b \in p^k B^*; \quad l > n(k)$$

folgt, d. h. die Folge $b_1, b_2, \ldots$ konvergiert gegen b.

K. *Sei B eine Basisgruppe. Es gilt:*

1. *B' ist eine $\mathbf{P}$-Untergruppe von B^*.*

2. *$b \in B^*$ liegt dann und nur dann in B', wenn*

$$\lim b^i = 0.$$

3. *Für $b \in B'$ konvergiert Σb^i und es ist*

$$\Sigma b^i = b.$$

4. *Die Torsionsuntergruppe $\bar{B}$ von B^* ist $\mathbf{P}$-Untergruppe von B'.*

5. *B' ist vollinvariant in B^*.*

Beweis. **1** ist eine unmittelbare Folgerung aus **I.**

Ad **2.** Die Menge

$$L := \{b : b \in B^*, \quad \lim b^i = 0\}^{4})$$

ist eine $\mathbf{P}$-Gruppe, denn für $a, b \in L$, $s \in \mathbf{P}$, gilt

$$0 = \lim a^i - \lim b^i = \lim (a - b)^i$$

und, da die Abbildung $a \to sa$ stetig ist,

$$0 = s \lim a^i = \lim sa^i = \lim (sa)$$

also liegen $a - b$ und sa in L.

Liegt $b \in B^*$ nicht in L, so gibt es eine Folge $i_1, i_2, \ldots$ und ein n, so daß

$$b^{i_k} \notin p^n B^{i_k}; \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Erinnert man sich an die Definition der B^i, so sieht man, daß dann auch

$$p b^{i_k} \notin p^{n+1} B^{i_k}; \quad k = 1, 2, \ldots$$

---

[4]) $:=$ deutet an, daß es sich um eine Definitionsgleichung handelt.

gilt. Also liegt pb und allgemein $p^j b$ nicht in L. Eine Gleichung $p^j a' = a$ mit $a \in L$ kann daher nur für $a' \in L$ bestehen, woraus sich ergibt: L ist rein in B^*, d. h. *L ist eine* **P**-*Untergruppe von B^*.*

Darüber hinaus gilt: *L ist abgeschlossen,* denn für eine Folge $b_1, b_2, \ldots$ aus L mit $\lim b_i = b \in B^*$ gibt es zu gegebenem n ein k, so daß

$$b_k - b \in p^n B^*. \tag{1}$$

Weil

$$\lim_{i \to \infty} b_k^i = 0,$$

existiert ein i_0 mit

$$b_k^i \in p^n B^i; \quad i > i_0,$$

woraus wegen (1)

$$b^i \in p^n B^i; \quad i > i_0$$

und damit $\lim b^i = 0$, also $b \in L$ folgt.

Wie man leicht sieht, liegt $\bar{B}$ und daher auch B in L (damit ist **4** bewiesen, wenn $L = B'$ gezeigt ist). Da B' offenbar die kleinste B enthaltende abgeschlossene **P**-Untergruppe von B^* ist, gilt

$$B' \subset L. \tag{2}$$

Sei $b \in L$, n beliebig, k derart, daß $b^i \in p^n B^i$ für $i > k$. Es ist

$$\Big(b - \sum_{j=1}^{l} b^j\Big)^i = \left.\begin{cases} 0 & \text{für} \quad i \leqq l \\ b^i & \text{für} \quad i > l \end{cases}\right\} \in p^n B^i; \quad l > k,$$

also

$$b - \sum_{j=1}^{l} b^j \in p^n B^*; \quad l > k,$$

woraus

$$\lim_{l \to \infty} \sum_{j=1}^{l} b^j = b \tag{3}$$

folgt. Da ferner $\sum_{j=1}^{l} b^j \in B$, ist $b \in B'$, womit $L \subset B'$ gezeigt ist. Zusammen mit (2) liefert dies $L = B'$. Damit ist die Behauptung **2** bewiesen.

3 ergibt sich aus (3).

4 folgt aus der Bemerkung zum Beweis von (2) und der Tatsache, daß die Torsionsuntergruppe einer Gruppe rein in der Gruppe ist.

5 folgt aus **2** und **E**.

§ 2. Die Automorphismengruppen vollständiger P-Gruppen

Auf dem Endomorphismenring $\mathbf{E}(G)$ einer $\mathbf{P}$-Gruppe G führen wir eine Topologie ein, indem wir definieren:

Eine Folge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ aus $\mathbf{E}(G)$ heißt konvergent gegen $\alpha \in \mathbf{E}(G)$, wenn für jedes $g \in G$ gilt:

$$\lim g\alpha_1 = g\alpha.$$

Bekanntlich ist $\mathbf{E}(G)$ vollständig, wenn G vollständig ist.

Da die Endomorphismen stetige Abbildungen sind, läßt sich jeder Endomorphismus von G zu einem Endomorphismus von G' fortsetzen. Es kann daher $\mathbf{E}(G)$ als Unterring von $\mathbf{E}(G')$ aufgefaßt werden.

Aus § 1, **F** ergibt sich:

A. *Sei G eine vollständige $\mathbf{P}$-Gruppe, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ eine Folge aus $\mathbf{E}(G)$. $\Sigma\alpha_i$ konvergiert dann und nur dann, wenn $\lim \alpha_i = 0$.*

Wir sind jetzt in der Lage einen Hilfssatz zu beweisen, der uns bei der Aufstellung der Automorphismengruppe $\mathbf{A}(G)$ einer vollständigen $\mathbf{P}$-Gruppe G gute Dienste leisten wird:

B. *Sei G eine $\mathbf{P}$-Gruppe, α und γ aus $\mathbf{E}(G)$. γ genüge eine der beiden folgenden Bedingungen:*

a) $\gamma : G \to pG$

b) $\gamma : G[p] \to 0$[5]).

α liegt nur dann und nur dann in $\mathbf{A}(G)$, wenn $\alpha + \gamma$ in $\mathbf{A}(G)$ liegt.

Beweis. Es genügt zu zeigen: Mit α liegt auch $\alpha + \gamma$ in $\mathbf{A}(G)$. Die Umkehrung folgt dann sofort aus der Gleichung $(\alpha + \gamma) - \gamma = \alpha$ und der Tatsache, daß mit γ auch $-\gamma$ die Bedingung *a)* bzw. *b)* erfüllt.

Sei also $\alpha \in \mathbf{A}(G)$. γ^n bildet offenbar G in $p^n G$ (bzw. $G[p^n]$ in 0) ab. Es seien $g \in G$ und k gegeben. Im Falle *a)* gilt

$$g\gamma^i \in p^k G; \quad i \geqq k,$$

also $\lim \gamma^i = o$. Ist B eine Basisuntergruppe von G, so kann G als Untergruppe von B' aufgefaßt werden. Es gibt dann nach § 1, **K 2** ein $n(k)$, so daß

$$g^i \in p^k G; \quad i \geqq n(k). \tag{1}$$

Genügt γ der Bedingung *b)*, so folgt

$$g^l \gamma^i = o; \quad i \geqq l,$$

also mit (1)

$$g^j \gamma^i \in p^k G; \quad i \geqq n(k); \quad j = 1, 2, \ldots,$$

[5]) $G[p^n] := \{g : g \in G,\ p^n g = 0\}$

so daß sich auch für diesen Fall $\lim \gamma^i = 0$ ergibt. Mit γ erfüllt auch $-\gamma\alpha^{-1}$ die Bedingung *a)* bzw. *b)*. Wir haben daher

$$\lim (-\gamma\alpha^{-1})^i = 0.$$

Nach **A** konvergiert dann $\Sigma(-\gamma\alpha^{-1})^i$. Wir bezeichnen mit σ_n die n-te Teilsumme dieser Reihe und setzen $\sigma = \lim \sigma_n$ (es ist zu beachten, daß zunächst nur $\sigma \in \mathbf{E}(B')$ geschlossen werden kann). Es ist

$$(\alpha + \gamma)\alpha^{-1}\sigma_n = \varepsilon - (-\gamma\alpha^{-1})^{n+1}$$

(ε identischer Automorphismus), also

$$(\alpha + \gamma)\alpha^{-1}\sigma = \varepsilon.$$

$\alpha + \gamma$ besitzt daher eine Rechtsinverse. Entsprechend zeigt man, daß

$$\tau_n := \sum_{i=1}^{n} (-\alpha^{-1}\gamma)$$

gegen einen Endomorphismus $\tau \in \mathbf{E}(B')$ konvergiert und $\tau\alpha^{-1}(\alpha + \gamma) = \varepsilon$ ist. $\alpha + \gamma$ hat also in $\mathbf{E}(B')$ und daher auch in $\mathbf{E}(G)$ eine Inverse. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

C. [3] *Sei B eine Basisgruppe, $B = \Sigma B^i$ eine Zerlegung von B und* Hom (B^i, B^k) *die Gruppe der Homomorphismen von B^i in B^k. Jedes $\alpha \in \mathbf{E}(B')$ kann durch eine Matrix (α_i^k), $\alpha_i^k \in$* Hom (B^i, B^k), *dargestellt werden, und jede solche Matrix liefert einen Endomorphismus von B'. Dabei gilt für $b \in B'$*

$$(b\alpha)^k = \sum_i b^i \alpha_i^k. \tag{2}$$

Auf der rechten Seite von (2) sind wegen § 1, **K 2** und der leicht zu beweisenden Beziehung

$$p^n B^i \alpha_i^k \subset p^{\max(n,\, k-i+n)} B^k \tag{3}$$

nur endlich viele Summanden von Null verschieden. Der Einfachheit halber wird $\alpha = (\alpha_i^k)$ gesetzt; die Endomorphismen werden also als Matrizen aufgefaßt.

Jedes $\alpha \in \mathbf{E}(B')$ läßt sich darstellen in der Form

$$\begin{aligned} &\alpha = \alpha' + \alpha'' + \alpha''', \\ &\alpha' \text{ Diagonalmatrix}, \\ &\alpha'' : B' \to pB', \\ &\alpha''' : B'[p] \to 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Man hat nur

$$\alpha'^k_i = \begin{cases} \alpha^k_i & \text{für} \quad i = k, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\alpha''^k_i = \begin{cases} \alpha^k_i & \text{für} \quad i < k, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\alpha'''^k_i = \begin{cases} \alpha^k_i & \text{für} \quad i > k, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

zu setzen und Formel (3) anzuwenden.

Die Automorphismen von B' sind durch eine sehr einfache Eigenschaft gekennzeichnet:

Satz 1. *Es sei $B = \Sigma B^i$ eine Zerlegung einer Basisgruppe B, $\alpha \in \mathbf{E}(B')$. α liegt dann und nur dann in $\mathbf{A}(B')$, wenn die α^i_i Automorphismen von B^i, $i = 1, 2, \ldots,$ sind.*

Beweis. Die Behauptung ergibt sich aus **B**, (4) und der Tatsache, daß eine Diagonalmatrix dann und nur dann ein Automorphismus ist, wenn sämtliche Diagonalelemente Automorphismen sind.

D. *Sei B eine Basisgruppe, H eine vollinvariante, B enthaltende Untergruppe von B'. Es gilt $\mathbf{E}(H) = \mathbf{E}(B')$ und $\mathbf{A}(H) = \mathbf{A}(B')$.*

Beweis. Weil H überall dicht in B' liegt, ist $\mathbf{E}(H)$ Unterring von $\mathbf{E}(B')$. Aus der Vollinvarianz von H folgt dann $\mathbf{E}(H) = \mathbf{E}(B')$. Entsprechend schließt man für die Automorphismengruppen.

In **D** wurde nicht verlangt, daß H eine **P**-Untergruppe von B' ist, also B zur Basisuntergruppe hat.

E. *Sei B eine Basisgruppe. Die **P**-Untergruppe $\bar{B}$ von B' ist die kleinste vollinvariante, B enthaltende Untergruppe von B'* [3].

Wir wollen eine Gruppe H *vollinvariant zur Basisgruppe B* nennen, wenn H eine vollinvariante, B enthaltende **P**-Untergruppe von B' ist.

§ 3. Konvergenzfreie Gruppen

Es sei G eine **P**-Gruppe und B eine Basisuntergruppe von G: $B \subset G \subset B'$. Wir setzen

$$L_B(g) := \{i : g^i \neq 0\}; \quad g \in G,$$

$$\mathbf{T}_B(G) := \{L_B(g) : g \in G\}.$$

Sowohl $L_B(g)$ als auch $\mathbf{T}_B(G)$ hängen, wie schon durch die Bezeichnung angedeutet, von der Wahl der Basisuntergruppe ab.

Ist H vollinvariant zur Basisgruppe B und U eine Teilmenge der Menge Z der natürlichen Zahlen, so sei

$$H_{U,B} := H \cap \prod_{i \in U} B^i.$$

D e f i n i t i o n 1: *Sei G eine* **P**-*Gruppe. Die kleinste vollinvariante, G enthaltende* **P**-*Untergruppe von G' heißt der Torsionstypus von G. Er wird mit $H(G)$ gezeichnet.*

Offenbar haben isomorphe Gruppen isomorphe Torsionstypen. Der Begriff Torsionstypus ist in gewisser Hinsicht eine Verallgemeinerung des Begriffs Torsionsgruppe.

D e f i n i t i o n 2: *Eine* **P**-*Gruppe G heißt konvergenzfrei, wenn es eine Basisuntergruppe B von G gibt, so daß*

(1) $$H_{L_B(g),B} \subset G \qquad \text{für alle } g \in G.$$

Eine Basisuntergruppe B einer konvergenzfreien Gruppe G, die der Bedingung (1) genügt, heißt eine *starke Basisuntergruppe von G.*

Eine vollinvariante Gruppe H zu einer Basisgruppe B ist konvergenzfrei, und jede ihrer Basisuntergruppen ist stark. Ist umgekehrt G eine konvergenzfreie **P**-Gruppe und jede Basisuntergruppe von G stark, so ist $G = H(G)$. Weitere Beispiele für konvergenzfreie **P**-Gruppen sind die Basisgruppen und die in der Einleitung erwähnten halbfiniten Gruppen.

D e f i n i t i o n 3: *Ein System* **S** *von Teilmengen von Z heißt eine direkte Operation, wenn es den folgenden Bedingungen genügt:*

1. *Aus $U, V \in \mathbf{S}$ folgt $U \cup V \in \mathbf{S}$.*

2. *Aus $U \in \mathbf{S}$, $V \subset U$ folgt $V \in \mathbf{S}$.*

3. **S** *enthält alle endlichen Teilmengen von Z.*

Beispiele für die direkten Operationen sind das System aller Teilmengen von Z und das System **Q** aller endlichen Teilmengen von Z.

Es sei B eine Basisgruppe, H vollinvariant zu B und **S** eine direkte Operation. Wir definieren:

$$\mathbf{S}_H \times B := \langle H_{U,B} : U \in \mathbf{S} \rangle.$$ [6]

Aus dieser Definition ergeben sich unmittelbar die beiden folgenden Aussagen:

A. *$\mathbf{S}_H \times B$ ist konvergenzfrei und besitzt B als Basisuntergruppe.*

B. *Ist die* **P**-*Gruppe G konvergenzfrei und B eine starke Basisuntergruppe von G, so ist $\mathbf{S} := \mathbf{T}_B(G)$ eine direkte Operation und es gilt*

$$\mathbf{S}_{H(G)} \times B = G.$$

---

[6]) $\langle \cdots \rangle$ ist die von den $H_{U,B}$ erzeugte Untergruppe von H.

Der folgende Hilfssatz löst im wesentlichen das Strukturproblem der konvergenzfreien Gruppen:

C. *Sei G eine* **P**-*Gruppe, B und C zwei starke Basisuntergruppen von G. Es ist*

$$\mathbf{T}_B(G) = \mathbf{T}_C(G).$$

Beweis. Wir denken uns G in B' und C' eingebettet: $B \subset G \subset B'$ und $C \subset G \subset C'$. B und C sind isomorph. Ein Isomorphismus von C auf B läßt sich zu einem Isomorphismus von C' auf B' fortsetzen. Dabei geht G in eine Gruppe $\hat{G}$ über und wir erhalten $\hat{G} \simeq G$ und

$$\mathbf{T}_B(\hat{G}) = \mathbf{T}_C(G). \tag{3}$$

$\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ sei ein Isomorphismus von G auf $\hat{G}$. Da G und $\hat{G}$ überall dicht in B' liegen, läßt sich $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ zu einem Automorphismus $\boldsymbol{\alpha}$ von B' fortsetzen. Nach Satz 1 sind die $\boldsymbol{\alpha}_i^i$ Automorphismen, es existieren also Inverse $\boldsymbol{\beta}_i^i$. Sei $U \in \mathbf{T}_B(G)$, $U = \{n_1, n_2, \ldots\}$, $n_1 < n_2 < \ldots$, und $0 \neq b^{n_i} \in B^{n_i}$ [1], $i = 1, 2, \ldots$. Wir definieren induktiv eine Folge $a^{n_1}, a^{n_2}, \ldots, a^{n_i} \in B^{n_i}$:

$$a^{n_1} := b^{n_1} \boldsymbol{\beta}_{n_1}^{n_1}.$$

Sind die a^{n_j} für $j < i$ schon definiert, so sei

$$a^{n_i} := \Big(b^{n_i} - \sum_{j<i} b^{n_j} \boldsymbol{\alpha}_{n_j}^{n_i}\Big) \boldsymbol{\beta}_{n_i}^{n_i}.$$

Es liegt a^{n_i} in B^{n_i} [1], also $a = \Sigma a^{n_i}$ in $\bar{B}$ und wegen § 2, **E** in $H(G)$. Da weiter $U \in \mathbf{T}_B(G)$, folgt

$$a \in G. \tag{4}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, daß $(a\boldsymbol{\alpha})^{n_i} = b^{n_i}$ ist. Wegen $b^{n_i} \neq 0$ erhalten wir daher

$$U \subset L_B(a\boldsymbol{\alpha}). \tag{5}$$

Wegen (4) liegt $a\boldsymbol{\alpha}$ in $\hat{G}$, so daß also $L_B(a\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbf{T}_B(\hat{G})$ folgt. Nach (5) und Def. 3. 2. gilt dann $U \in \mathbf{T}_B(\hat{G})$. Damit ist $\mathbf{T}_B(G) \subset \mathbf{T}_B(\hat{G})$ und mit (3) $\mathbf{T}_B(G) \subset \mathbf{T}_C(G)$ gezeigt. Ebenso ergibt sich $\mathbf{T}_C(G) \subset \mathbf{T}_B(G)$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Mit $\mathfrak{K}(B, H)$ wollen wir die Menge der konvergenzfreien **P**-Gruppen bezeichnen, welche die Basisgruppe B zur Basisuntergruppe haben und vom Torsionstypus H sind. Ω sei die Menge der direkten Operation.

Der Hilfssatz **C** zeigt uns, daß jedem Element $G \in \mathfrak{K}(B, H)$ eindeutig ein Element $\mathbf{T}(G) \in \Omega$ zugeordnet werden kann.

Sind G und $\hat{G}$ aus $\mathfrak{K}(B, H)$ und $\mathbf{T}(G) = \mathbf{T}(\hat{G})$, so gibt es Basisuntergruppen C und $\hat{C}$ von G bzw. $\hat{G}$, so daß $\mathbf{T}(G) = \mathbf{T}_C(G)$ und $\mathbf{T}(\hat{G}) = \mathbf{T}_{\hat{C}}(\hat{G})$. Also ist $\mathbf{T}_C(G) = \mathbf{T}_{\hat{C}}(\hat{G})$ und mit der Bezeichnung $\mathbf{S} = \mathbf{T}_C(G)$ wegen $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{S}_H \times C = G, \quad \mathbf{S}_H \times \hat{C} = \hat{G}.$$

Weil $C \simeq \hat{C}$ ist, folgt hieraus $G \simeq \hat{G}$. Damit ist der folgende Satz bewiesen:

Satz 2. *Sei B eine Basisgruppe und H vollinvariant zu B. Die Abbildung*

$$\mathbf{T}: \mathfrak{K}(B, H) \to \Omega$$

ist eindeutig und für G, $\hat{G}$ aus $\mathfrak{K}(B, H)$ gilt dann und nur dann $\mathbf{T}(G) = \mathbf{T}(\hat{G})$, wenn $G \simeq \hat{G}$ ist.

Wir wollen mit $\Omega(B, H)$ das Bild von $\mathfrak{K}(B, H)$ unter der Abbildung $\mathbf{T}$ bezeichnen. Ist $H = B$, so gilt wegen $\mathbf{A}$ offenbar $\Omega(B, H) = \Omega$. Hat B unendlich viele von Null verschiedene Komponenten, und nur dieser Fall interessiert, und ist $H \neq \bar{B}$, d. h. besitzt H Elemente von unendlicher Ordnung, so ist der Torsionstypus von $\mathbf{Q}_H \times B$ von H verschieden. Damit ist gezeigt:

D. *Sei H vollinvariant zur Basisgruppe B und es besitze B unendlich viele von Null verschiedene Komponenten. Es ist dann und nur dann $\Omega(B, H) = \Omega$,* wenn $H = \bar{B}$.

Literatur

[1] N. Bourbaki Algèbre, Chap. VII., *Paris*, 1952.

[2] L. Fuchs, On the structure of abelian p-groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **4** (1953), 267—288.

[3] L. Fuchs, Abelian groups, *Budapest*, 1958.

[4] J. Kaplansky, Infinite abelian groups, *Ann Arbor*, 1954.

[5] G. Köthe, Die konvergenzfreien linearen Räume abzählbarer Stufe, *Math. Ann.* **111** (1935), 229—258.

[6] L. J. Kulikoff, Zur Theorie abelscher Gruppen von beliebiger Mächtigkeit, *Mat. Sbornik N. S.* **16** (1945), 129—162.

[7] H. Prüfer, Unendliche abelsche Gruppen von Elementen endlicher Ordnung, *Dissertation* (1921).

(Eingegangen am 22. April 1961.)