Über projektive geometrische Invarianten

Von A. MOÓR (Szeged)

Einleitung

Ein geometrisches Objektenfeld $\Omega^i(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ im n-dimensionalen Punktraum P_n ist ein System der r Funktionen $\Omega^i(\xi)$, die bei einer zulässigen Koordinatentransformation

$$\bar{\xi}^\alpha = \varphi^\alpha(\xi^1, \ldots, \xi^n) \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)\,^{1)} \tag{1}$$

der Transformationsformel

$$\bar{\Omega}^i(\bar{\xi}) = f^i(\Omega^j, \xi, \bar{\xi}, A^\alpha_{\beta_1}, \ldots, A^\alpha_{\beta_1 \ldots \beta_s}, \bar{A}^\alpha_{\beta_1}, \ldots, \bar{A}^\alpha_{\beta_1 \ldots \beta_t}), \qquad (i, j = 1, \ldots, r)$$

genügen, wo

$$A^\alpha_{\beta_1 \ldots \beta_j} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^j \xi^\alpha}{\partial \bar{\xi}^{\beta_1} \ldots \partial \bar{\xi}^{\beta_j}} \qquad \bar{A}^\alpha_{\beta_1 \ldots \beta_j} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^j \bar{\xi}^\alpha}{\partial \xi^{\beta_1} \ldots \partial \xi^{\beta_j}}$$

ist, und die Form der Funktionen f^i von der zulässigen Koordinatentransformation (1) unabhängig ist.

Wie gewöhnlich, werden in unseren folgenden Untersuchungen die Funktionen $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma(\xi)$ immer affine Übertragungsparameter bedeuten, die in den unteren Indizes symmetrisch sind.

Im folgenden werden wir einige Probleme der projektiven Invarianten mit Hilfe von Funktionalgleichungssystemen untersuchen. Die projektiven Invarianten sind durch die folgende Definition festgelegt:

DEFINITION. *Eine projektive Invariante P^A, $(A = 1, \ldots, r)$ ist ein geometrisches Objektenfeld, welches aus*

$$\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma,\ \partial_{\nu_1} \Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma,\ \ldots,\ \overset{s}{\partial}_{\nu_1 \ldots \nu_s} \Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$$

gebildet ist, und bei einer projektiven Veränderung der affinen Übertragungsparameter $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$, d. h.:

$$\hat{\Gamma}_\alpha{}^\beta{}_\gamma = \Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma + \delta^\beta_\alpha \psi_\gamma + \delta^\beta_\gamma \psi_\alpha \tag{2}$$

sich nicht verändert. ψ_γ bedeutet in (2) einen beliebigen Vektor.

---

[1]) Die griechischen Indizes werden immer die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ durchlaufen.

Eine projektive Invariante genügt also immer dem Funktionalgleichungssystem

$$(3)\qquad P^A(\hat{\Gamma}_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}, \partial_{\nu_1}\hat{\Gamma}_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}, \ldots, \overset{s}{\partial}_{\nu_1\ldots\nu_s}\hat{\Gamma}_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}) = P^A(\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}, \partial_{\nu_1}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}, \ldots, \overset{s}{\partial}_{\nu_1\ldots\nu_s}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}),$$

wo für $\hat{\Gamma}_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}$ die durch (2) angegebenen Werte eingesetzt werden sollen, und ∂_{ν_1} die partielle Abletitung nach ξ^{ν_1} bedeutet.

Wir werden in einigen Fällen untersuchen, wasfür projektive Tensoren aus den $\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}$ gebildet werden können. Unser Hauptergebnis ist das folgende: der aus den $\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}$ und $\partial_\kappa\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}$ gebildete projektive Tensor $V_{\alpha\ \gamma\delta}^{\ \beta}$ ist allein vom Weylschen projektiven Krümmungstensor $W_{\alpha\ \gamma\delta}^{\ \beta}$ abhängig. Eben das behauptet unser Satz 4 in § 3.

§ 1. Die projektiven Übertragungsparameter

Die klassischen projektiven Übertragungsparameter $\Pi_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}$ bestimmen eine projektive Invariante, die bei einer zulässigen Koordinatentransformation (1) dem Transformationsgesetz:

$$(4)\qquad \overline{\Pi}_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta} = \Pi_{\rho\ \tau}^{\ \sigma} A_\alpha^\rho \bar{A}_\sigma^\beta A_\gamma^\tau + A_{\alpha\gamma}^\rho \bar{A}_\rho^\beta - \frac{1}{n+1}(\delta_\alpha^\beta A_{\tau\gamma}^\rho \bar{A}_\rho^\tau + \delta_\gamma^\beta A_{\tau\alpha}^\rho \bar{A}_\rho^\tau)$$

genügt[2]). Wir wollen alle sich nach (4) transformierende Objektenfelder projektive Übertragungsparameter nennen. Die klassischen projektiven Übertragungsparameter sind aus den affinen Übertragungsparametern $\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}$ gebildet. Es ist

$$(5)\qquad \Pi_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta} \overset{\text{def}}{=} \Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta} - \frac{1}{n+1}(\delta_\alpha^\beta \Gamma_{\tau\ \gamma}^{\ \tau} + \delta_\gamma^\beta \Gamma_{\tau\ \alpha}^{\ \tau}).$$

Es entsteht nun das folgende Problem: können aus den $\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}$ auch andere, d. h. von (5) verschiedene projektive Übertragungsparameter $\Pi_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}$ gebildet werden, oder aber ist (5) der einzige, aus $\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}$ gebildete projektive Übertragungsparameter? Auf diese Frage antwortet der folgende

Satz 1. *Aus den affinen Übertragungsparametern $\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}$ können nur die klassischen, d. h. durch* (5) *bestimmten projektiven Übertragungsparameter $\Pi_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}$ gebildet werden.*

Beweis. Nach der Bedingung des Satzes 1 sind die aus den $\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}$ gebildeten projektiven Übertragungsparameter $\Pi_{\alpha\ \gamma}^{*\beta}$ von der Form:

$$(6)\qquad \Pi_{\alpha\ \gamma}^{*\beta} = \Phi_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}(\Gamma_{\kappa\ \mu}^{\ \lambda}),$$

[2]) Vgl. L. P. Eisenhart, Non-Riemannian geometry, (Amer. Math. Soc. Coll. Publ. VIII.) *New York* 1927, insbesondere die Formel (35. 5), die mit unserer Formel (4) in Wesentlichen übereinstimmt.

d. h. die $\Phi_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ sind Funktionen von $\Gamma_\kappa{}^\lambda{}_\mu$. Nach einer Koordinatentransformation erhält man die transformierten Komponenten $\overline{\Pi}^{*}_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ dadurch, daß man in die Funktionen $\Phi_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ statt $\Gamma_\kappa{}^\lambda{}_\mu$ die $\overline{\Gamma}_\kappa{}^\lambda{}_\mu$ substituiert, d. h.

$$\overline{\Pi}^{*}_\alpha{}^\beta{}_\gamma = \Phi_\alpha{}^\beta{}_\gamma(\overline{\Gamma}_\kappa{}^\lambda{}_\mu). \tag{7}$$

Beachten wir jetzt einerseits die Transformationsformel von $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$, d. h.

$$\overline{\Gamma}_\alpha{}^\beta{}_\gamma = \Gamma_\rho{}^\sigma{}_\tau A^\rho_\alpha \overline{A}^\beta_\sigma A^\tau_\gamma + A^\rho_{\alpha\gamma}\overline{A}^\beta_\rho, \tag{7*}$$

andererseits die Transformationsformel von $\Pi^{*}_\alpha{}^\beta{}_\gamma$, die mit (4) übereinstimmt, so ergibt sich nach (6) und (7):

$$\Phi_\alpha{}^\beta{}_\gamma(\Gamma_\rho{}^\sigma{}_\tau A^\rho_\kappa \overline{A}^\lambda_\sigma A^\tau_\mu + A^\rho_{\kappa\mu}\overline{A}^\lambda_\rho) = \Phi_\rho{}^\sigma{}_\tau(\Gamma_\kappa{}^\lambda{}_\mu) A^\rho_\alpha \overline{A}^\beta_\sigma A^\tau_\gamma + \tag{8}$$
$$+ A^\rho_{\alpha\gamma}\overline{A}^\beta_\rho - \frac{1}{n+1}(\delta^\beta_\alpha A^\rho_{\tau\gamma}\overline{A}^\tau_\rho + \delta^\beta_\gamma A^\rho_{\tau\alpha}\overline{A}^\tau_\rho).$$

Von nun an fixieren wir den Punkt $\underset{(0)}{\xi^\alpha}$ und betrachten alle in (8) auftretenden Größen in diesem Punkte.

In dem Punkte $\underset{(0)}{\xi^\alpha}$ können nun die A^ρ_κ und $A^\rho_{\kappa\mu}$ beliebig angegeben werden. A^ρ_κ und $A^\rho_{\kappa\mu}$ sind also in (8) die unabhängigen Veränderlichen. Hingegen sind die $\overline{A}^\lambda_\rho$ durch

$$A^\rho_\kappa \overline{A}^\lambda_\rho = \delta^\lambda_\kappa \tag{9}$$

schon eindeutig festgelegt. Die Relationen (8) bilden also ein Funktionalgleichungssystem für die unbekannten Funktionen $\Phi_\alpha{}^\beta{}_\gamma$, und die Veränderlichen sind eben die A^ρ_α und $A^\rho_{\alpha\beta}$. Setzen wir nun in dem Funktionalgleichungssystem (8) im Punkte $\underset{(0)}{\xi^\alpha}$:

$$A^\rho_\alpha = \delta^\rho_\alpha, \qquad A^\rho_{\alpha\gamma} = -\Gamma_\alpha{}^\rho{}_\gamma,$$

was wegen der Symmetrie von $A^\rho_{\alpha\gamma}$ und $\Gamma_\alpha{}^\rho{}_\gamma$ in den Indizes α, γ möglich ist, so wird in Hinblick auf (9):

$$\Phi_\alpha{}^\beta{}_\gamma(\Gamma_\kappa{}^\lambda{}_\mu) = \Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma - \frac{1}{n+1}(\delta^\beta_\alpha \Gamma_\tau{}^\tau{}_\gamma + \delta^\beta_\gamma \Gamma_\tau{}^\tau{}_\alpha) + c_\alpha{}^\beta{}_\gamma \tag{10}$$

mit

$$c_\alpha{}^\beta{}_\gamma \overset{\text{def}}{=} \Phi_\alpha{}^\beta{}_\gamma(0). \tag{10a}$$

Unsere Formel (10a) bedeutet, daß die $c_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ Konstanten sind, da auf der rechten Seite in (10a) für jede Veränderliche von $\Phi_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ Null gesetzt werden soll.

Beachten wir jetzt (8), so folgt, daß die durch (10) bestimmten Funktionen $\Phi_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ dann und nur dann projektive Übertragungsparameter bilden können, falls die $c_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ Tensorcharakter haben. Wir zeigen jetzt, daß die $c_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ den Nulltensor bestimmen. Wegen des Tensorcharakters muß

$$\bar{c}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} = c_{\rho}{}^{\sigma}{}_{\tau} A_{\alpha}^{\rho} \bar{A}_{\sigma}^{\beta} A_{\gamma}^{\tau}$$

bestehen. Da aber nach (10a) die $c_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ Konstanten sind, folgt aus unserer letzten Gleichung:

$$c_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} = c_{\rho}{}^{\sigma}{}_{\tau} A_{\alpha}^{\rho} \bar{A}_{\sigma}^{\beta} A_{\gamma}^{\tau}. \tag{11}$$

Wählen wir jetzt in einem Punkte $\underset{(0)}{\xi^{\alpha}} : A_{\alpha}^{\rho} = x\delta_{\alpha}^{\rho}$, so wird nach (9) $\bar{A}_{\alpha}^{\rho} = x^{-1}\delta_{\alpha}^{\rho}$ und aus (11) wird:

$$c_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} = x\, c_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma},$$

wo x eine beliebige Zahl ist. Das bedeutet aber, daß $c_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ identisch Null ist.

Die Relation (10) gibt somit nach (6) und (5): $\Pi^{*}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} = \Pi_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ und das beweist unseren Satz.

Bemerkung. Aus den $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ können also nur die durch (5) angegebenen projektiven Übertragungsparameter gebildet werden. Die Gesamtheit dieser Übertragungsparameter ist zwar eine projektive Invariante, diese Eigenschaft haben wir aber bei dem Beweise des Satzes 1 nicht ausgenützt.

Wir zeigen nun, daß aus

$$\Gamma_{\alpha} \overset{\text{def}}{=} \Gamma_{\tau}{}^{\tau}{}_{\alpha}$$

überhaupt keine wesentliche nicht triviale projektive Invariante gebildet werden kann; z. B. ist $\Pi_{\tau}{}^{\tau}{}_{\alpha}$ keine wesentliche projektive Invariante. Es besteht der folgende

Satz 2. *Ist eine projektive Invariante allein von Γ_{α} abhängig, so ist sie eine Konstante.*

Beweis. Es sei die projektive Invariante P^{A} von Γ_{α} abhängig, d. h.:

$$P^{A} = g^{A}(\Gamma_{1}, \ldots, \Gamma_{n}).$$

Da P^{A} eine projektive Invariante ist, müssen die Komponenten P^{A} nach einer projektiven Veränderung (2) der Übertragungsparameter invariant bleiben. Nach (2) wird aber

$$\hat{\Gamma}_{\alpha} = \Gamma_{\alpha} + (n+1)\psi_{\alpha}$$

bestehen, somit wird

$$g^{A}(\Gamma_{\alpha} + (n+1)\psi_{\alpha}) = g^{A}(\Gamma_{\alpha})$$

gültig sein. Wählen wir jetzt wieder in einem Punkte $\underset{(0)}{\xi^{\alpha}}$

$$\psi_{\alpha}(\underset{(0)}{\xi}) = -\frac{1}{n+1}\Gamma_{\alpha}(\underset{(0)}{\xi}),$$

so wird

$$g^A(\Gamma_\alpha) = g^A(0) = g^A(0, \ldots, 0)$$

gelten, d. h. $g^A = konst.$ w. z. b. w.

Setzen wir z. B. in (5) $\alpha = \beta$, so bekommt man nach einer Summation auf β: $\Pi_\beta{}^\beta{}_\gamma \equiv 0$, wie das nach dem Satze 2 sein muß.

§ 2. Über die aus $R_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta}$ bildbaren projektiven Tensoren vom gleichen Typ

Der aus den $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ und $\partial_\delta \Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ gebildete affine Krümmungstensor

$$R_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta} \overset{\text{def}}{=} 2(\partial_{[\gamma}\Gamma_{\delta]}{}^\beta{}_\alpha + \Gamma_\alpha{}^\rho{}_{[\delta}\Gamma_{\gamma]}{}^\beta{}_\rho)$$

ist keine projektive Invariante, es ist aber bekannt, daß aus $R_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta}$ ein projektiver Tensor — nämlich der Weylsche Krümmungstensor — gebildet werden kann. Wir beweisen den folgenden

Satz 3. *Ist $\Phi_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta}$ aus dem Tensor $R_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta}$ gebildet, und ist $\Phi_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta}$ projektiv invariant, so ist $\Phi_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta}$ nur vom Weylschen Krümmungstensor*

$$W_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta} \overset{\text{def}}{=} R_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta} + \frac{2}{n+1}\delta_\alpha^\beta R_{[\gamma\delta]} + \frac{1}{n^2-1}[\delta_\gamma^\beta(nR_{\alpha\delta} + R_{\delta\alpha}) - \delta_\delta^\beta(nR_{\alpha\gamma} + R_{\gamma\alpha})]$$

abhängig, wo

$$R_{\alpha\delta} \overset{\text{def}}{=} R_\alpha{}^\beta{}_{\delta\beta}$$

ist.

Beweis. Nach einer projektiven Veränderung (2) von $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ wird

$$\hat{R}_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta} = R_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta} - 2\delta_\alpha^\beta \psi_{[\gamma\delta]} - 2\delta_{[\gamma}^\beta \psi_{|\alpha|\delta]} \tag{12}$$

bestehen (vgl. L. P. Eisenhart loc. cit. § 32), wo das Zeichen „$\hat{}$" die projektive Veränderung,

$$\psi_{\gamma\delta} \overset{\text{def}}{=} \nabla_\delta \psi_\gamma - \psi_\gamma \psi_\delta$$

und ∇_δ die mit den $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ gebildete kovariante Ableitung bedeuten.

Nehmen wir jetzt an, daß die projektive Invariante $\Phi_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta}$ aus $R_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta}$ gebildet ist, d. h.

$$\Phi_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta} = V_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta}(R_\kappa{}^\lambda{}_{\mu\nu})$$

gilt. Nach einer projektiven Veränderung (2) von $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ wird:

$$\hat{\Phi}_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta} = V_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta}(\hat{R}_\kappa{}^\lambda{}_{\mu\nu}). \tag{13}$$

Da $\Phi_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta}$ eine projektive Invariante sein soll, wird nach (12) und (13)

$$V_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta}(R_\kappa{}^\lambda{}_{\mu\nu}) = V_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta}(R_\kappa{}^\lambda{}_{\mu\nu} - 2\delta_\kappa^\lambda \psi_{[\mu\nu]} - 2\delta_{[\mu}^\lambda \psi_{|\kappa|\nu]}) \tag{14}$$

gelten. In einem Punkte können die $\psi_{\mu\nu}$ beliebig vorgeschrieben werden, wenn aber

$$\psi_{\mu\nu} = -\frac{1}{n^2-1}(n R_{\mu\nu} + R_{\nu\mu})$$

gesetzt wird, so bekommt man aus (14):

$$\Phi_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta} \equiv V_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta}(R_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu\nu}) = V_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta}(W_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu\nu}),$$

und das beweist den Satz 3.

§ 3. Über die aus $\Pi_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ und $\partial_\delta \Pi_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ gebildeten projektiven Tensoren vom Typ $V_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta}$

Der Weylsche projektive Krümmungstensor $W_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta}$, den wir im vorigen Paragraphen in expliziter Form angegeben hatten, kann auch durch die projektiven Übertragungsparameter $\Pi_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ ausgedrückt werden. Es ist [3])

$$(15) \qquad W_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta} = 2\Big(\partial_{[\gamma}\Pi_{\delta]}{}^{\beta}{}_{\alpha} + \Pi_{\alpha}{}^{\rho}{}_{[\delta}\Pi_{\gamma]}{}^{\beta}{}_{\rho} - \frac{1}{n-1}\delta^{\beta}_{[\gamma}\partial_{|\tau|}\Pi_{\delta]}{}^{\tau}{}_{\alpha} + \\ + \frac{1}{n-1}\delta^{\beta}_{[\gamma}\Pi_{\delta]}{}^{\tau}{}_{\rho}\Pi_{\tau}{}^{\rho}{}_{\alpha}\Big).$$

Wir beweisen das folgende

Lemma. *Ist*

$$P^A(\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}, \partial_{\nu_1}\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}, \ldots, \overset{s}{\partial}_{\nu_1\ldots\nu_s}\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma})$$

eine projektive Invariante, so können die affinen Übertragungsparameter in der Formel dieser Invariante durch die projektiven Übertragungsparameter $\Pi_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ ersetzt werden.

Beweis. Nach der Definition der projektiven Invarianten befriedigt P^A das Funktionalgleichungssystem (3), wo $\hat{\Gamma}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ durch (2) angegeben ist, und ψ_α beliebig gewählt werden kann. Es sei in einem Punkte $\underset{(0)}{\xi}{}^{\alpha}$

$$\psi_\alpha(\underset{(0)}{\xi}) = -\frac{1}{n+1}\Gamma_{\tau}{}^{\tau}{}_{\alpha}(\underset{(0)}{\xi}), \quad \partial_{\nu_1}\psi_\alpha(\underset{(0)}{\xi}) = -\frac{1}{n+1}\partial_{\nu_1}\Gamma_{\tau}{}^{\tau}{}_{\alpha}(\underset{(0)}{\xi}), \ldots$$

so bekommt man aus (3) in Hinblick auf die Definitionsgleichung (5) der $\Pi_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$:

$$(16) \quad P^A(\Pi_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}, \partial_{\nu_1}\Pi_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}, \ldots, \overset{s}{\partial}_{\nu_1\ldots\nu_s}\Pi_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}) = P^A(\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}, \partial_{\nu_1}\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}, \ldots, \overset{s}{\partial}_{\nu_1\ldots\nu_s}\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma})$$

und das beweist das Lemma.

[3]) Vgl. L. P. Eisenhart, loc. cit.; Formeln (35. 11) und (35. 12).

Hieraus folgt gleich in Analogie zu Satz 2 (vgl. die Bemerkung am Ende von Satz 1) der

Satz 2'. *Jede, allein von $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ abhängige projektive Invariante ist eine Funktion der $\Pi_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ allein.*

Jetzt sind wir schon imstande, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 4. *Ist der projektive invariante Tensor $V^{*}_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta}$ aus $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ und $\partial_\delta \Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ gebildet, so ist der Tensor $V^{*}_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta}$ allein durch den Weylschen Krümmungstensor $W_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta}$ ausdrückbar.*

Beweis. Auf Grund unseres Lemmas, insbesondere nach der Formel (16), ist es hinreichend, wenn wir statt der Abhängigkeit von $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$, für $V^{*}_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta}$ die Abhängigkeit von $\Pi_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ bedingen. Wir nehmen also an, daß $V^{*}_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta}$ von $\Pi_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ und $\partial_\delta \Pi_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ abhängig ist, d. h.: $V^{*}_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta} = V_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta}(\Pi_\kappa{}^\lambda{}_\mu, \partial_\nu \Pi_\kappa{}^\lambda{}_\mu)$.

Nach einer zulässigen Koordinatentransformation wird

$$V_\rho{}^\sigma{}_{\tau\omega}(\Pi_\kappa{}^\lambda{}_\mu, \partial_\nu \Pi_\kappa{}^\lambda{}_\mu) A^\rho_\alpha \bar{A}^\beta_\sigma A^\tau_\gamma A^\omega_\delta = V_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta}(\bar{\Pi}_\kappa{}^\lambda{}_\mu, \partial_{\bar{\nu}} \bar{\Pi}_\kappa{}^\lambda{}_\mu) \tag{17}$$

bestehen, wo $\bar{\Pi}_\kappa{}^\lambda{}_\mu$ durch (4) bestimmt ist, und $\partial_{\bar{\nu}}$ die partielle Ableitung nach $\bar{\xi}^\nu$ bedeutet. Die Transformationsformel von $\partial_{\bar{\nu}} \bar{\Pi}_\kappa{}^\lambda{}_\mu$ ist:

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{\delta}} \bar{\Pi}_\alpha{}^\beta{}_\gamma = {} & \partial_\nu \Pi_\rho{}^\sigma{}_\tau A^\rho_\alpha \bar{A}^\beta_\sigma A^\tau_\gamma A^\nu_\delta + A^\rho_{\alpha\gamma\delta} \bar{A}^\beta_\rho - \\ & - \frac{1}{n+1} (\delta^\beta_\alpha A^\rho_{\tau\gamma\delta} \bar{A}^\tau_\rho + \delta^\beta_\gamma A^\rho_{\tau\alpha\delta} \bar{A}^\tau_\rho) + \cdots, \end{aligned} \tag{18}$$

wie das nach einer partiellen Ableitung nach $\bar{\xi}^\delta$ von (4) leicht bestätigt werden kann, und wo die Punkte solche Glieder bedeuten, in denen höchstens $A^\beta_{\alpha\gamma}$ vorkommen, d. h. die von $A^\rho_{\alpha\gamma\delta}$ unabhängig sind.

$\bar{A}^\beta_{\alpha\gamma}$ ist durch $A^\beta_{\alpha\gamma}$ ausdrückbar. Aus (9) folgt durch eine partielle Ableitung nach $\bar{\xi}^\nu$:

$$A^\rho_{\kappa\nu} \bar{A}^\lambda_\rho = - A^\rho_\kappa \bar{A}^\lambda_{\rho\sigma} A^\sigma_\nu, \tag{19}$$

woraus nach einer Kontraktion mit $\bar{A}^\kappa_\tau \bar{A}^\nu_\omega$ die Größe $\bar{A}^\lambda_{\tau\omega}$ unmittelbar berechnet werden könnte; für die folgenden wird aber auch (19) schon hinreichend sein.

Wählen wir jetzt eine zulässige Koordinatentransformation, für die in einem Punkte $\underset{(0)}{\xi^\alpha}$:

$$A^\rho_\kappa = \delta^\rho_\kappa, \quad A^\beta_{\alpha\gamma} = 0, \quad A^\tau_{\tau\gamma\delta} = 0, \quad A^\lambda_{\kappa\mu\nu} \neq 0$$

ist. Aus (17) wird jetzt in Hinblick auf (4) und (18):

$$V_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta}(\Pi_\kappa{}^\lambda{}_\mu, \partial_\nu \Pi_\kappa{}^\lambda{}_\mu) = V_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta}(\Pi_\kappa{}^\lambda{}_\mu, \partial_\nu \Pi_\kappa{}^\lambda{}_\mu + A^\lambda_{\nu\kappa\mu}). \tag{20}$$

Da $A^{\beta}_{\alpha\gamma\delta}$ in α, γ, δ totalsymmetrisch und $\Pi_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ in α, γ symmetrisch ist, kann

$$A^{\lambda}_{\nu\kappa\mu} = -\tfrac{1}{3}(\partial_{\nu}\Pi_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu} + \partial_{\kappa}\Pi_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu} + \partial_{\mu}\Pi_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\kappa})$$

gesetzt werden; aus (20) wird somit

$$V_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta}(\Pi_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu}, \partial_{\nu}\Pi_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu}) = V_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta}(\Pi_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu}, \tfrac{2}{3}(\partial_{[\nu}\Pi_{\kappa]}{}^{\lambda}{}_{\mu} + \partial_{[\nu}\Pi_{\mu]}{}^{\lambda}{}_{\kappa})). \tag{21}$$

Wir substituieren nun in die rechte Seite von (17) die aus (21) bestimmten Werte von $V_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta}$; wir bekommen somit die folgende Relation:

$$V_{\rho}{}^{\sigma}{}_{\tau\omega}(\Pi_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu}, \partial_{\nu}\Pi_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu}) A^{\rho}_{\alpha}\overline{A}^{\beta}_{\sigma}A^{\tau}_{\gamma}A^{\omega}_{\delta} = V_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta}(\overline{\Pi}_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu}, \tfrac{2}{3}(\partial_{[\bar{\nu}}\overline{\Pi}_{\kappa]}{}^{\lambda}{}_{\mu} + \partial_{[\bar{\nu}}\overline{\Pi}_{\mu]}{}^{\lambda}{}_{\kappa})), \tag{22}$$

wo $\overline{\Pi}_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu}$ und $\partial_{\bar{\nu}}\overline{\Pi}_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu}$ durch die Formeln (4) und (18) bestimmt sind. Es kann leicht verifiziert werden, daß nach einer allgemeinen zulässigen Koordinatentransformation in (22) die $A^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ nicht vorkommen, falls in $\underset{(0)}{\xi^{\alpha}}$ $A^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$ und folglich auch $\overline{A}^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$ gilt. Es sind aber bei solchen Transformationen noch $A^{\tau}_{\tau\alpha\beta}$ vorhanden. Wählen wir jetzt eine solche Transformation, für die

$$A^{\rho}_{\alpha} = \delta^{\rho}_{\alpha}, \quad A^{\rho}_{\alpha\beta} = 0, \quad A^{\beta}_{\alpha\gamma\delta} = -\frac{n+1}{n-1}(\partial_{\alpha}\Pi_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\delta} + \partial_{\gamma}\Pi_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\delta} + \partial_{\delta}\Pi_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma})$$

bestehen, so wird wegen $\Pi_{\tau}{}^{\tau}{}_{\gamma} = 0$, und nach (19) $\overline{A}^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$, aus den Gleichungen (22), (4) und (18)

$$\begin{aligned} V_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta}(\Pi_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu}, \partial_{\nu}\Pi_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu}) = V_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta}\Big(\Pi_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu}, \frac{2}{3}\Big(\partial_{[\nu}\Pi_{\kappa]}{}^{\lambda}{}_{\mu} - \\ - \frac{1}{n-1}\delta^{\lambda}_{[\nu}\partial_{|\tau|}\Pi_{\kappa]}{}^{\tau}{}_{\mu} + \partial_{[\nu}\Pi_{\mu]}{}^{\lambda}{}_{\kappa} - \frac{1}{n-1}\delta^{\lambda}_{[\nu}\partial_{|\tau|}\Pi_{\mu]}{}^{\tau}{}_{\kappa}\Big)\Big). \end{aligned} \tag{23}$$

Es kann unmittelbar verifiziert werden, daß wenn wir in dieser Formel statt $\Pi_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu}$ und $\partial_{\nu}\Pi_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu}$ ihre transformierten Größen: $\overline{\Pi}_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu}$ und $\partial_{\bar{\nu}}\overline{\Pi}_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu}$ einsetzen, dann auf der rechten Seite $A^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ schon nicht vorkommen wird. Das folgt übrigens aus der Tatsache, daß die Glieder

$$\frac{2}{3}\Big(\partial_{[\nu}\Pi_{\kappa]}{}^{\lambda}{}_{\mu} - \frac{1}{n-1}\delta^{\lambda}_{[\nu}\partial_{|\tau|}\Pi_{\kappa]}{}^{\tau}{}_{\mu} + \partial_{[\nu}\Pi_{\mu]}{}^{\lambda}{}_{\kappa} - \frac{1}{n-1}\delta^{\lambda}_{[\nu}\partial_{|\tau|}\Pi_{\mu]}{}^{\lambda}{}_{\kappa}\Big),$$

in deren Transformationsformel die $A^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ vorkommen, mit den entsprechenden Gliedern des Tensors

$$\tfrac{1}{3}(W_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu\kappa} + W_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\nu\mu})$$

(vgl. die Formel (15)) übereinstimmen.

Wir setzen nun in die rechte Seite von (17) den Wert von $V_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta}$ aus der Relation (23) ein. Es wird:

$$(24)\qquad V_{\rho}{}^{\sigma}{}_{\tau\omega}(\Pi_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu}, \partial_{\nu}\Pi_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu})A^{\rho}_{\alpha}\bar{A}^{\beta}_{\sigma}A^{\tau}_{\gamma}A^{\omega}_{\delta} = V_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta}\Big(\bar{\Pi}_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu}, \frac{2}{3}\Big(\partial_{[\bar{\nu}}\bar{\Pi}_{\kappa]}{}^{\lambda}{}_{\mu} -$$

$$-\frac{1}{n-1}\delta^{\lambda}_{[\nu}\partial_{|\bar{\tau}|}\bar{\Pi}_{\kappa]}{}^{\tau}{}_{\mu} + \partial_{[\bar{\nu}}\bar{\Pi}_{\mu]}{}^{\lambda}{}_{\kappa} - \frac{1}{n-1}\delta^{\lambda}_{[\nu}\partial_{|\bar{\tau}|}\bar{\Pi}_{\mu]}{}^{\tau}{}_{\kappa}\Big)\Big),$$

wo $\bar{\Pi}_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu}$ und $\partial_{\bar{\nu}}\bar{\Pi}_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu}$ durch (4) und (18) bestimmt sind.

Wir betrachten nun diejenigen zulässigen Transformationen T_0, für die $A^{\rho}_{\alpha\beta\gamma}=0$, $A^{\rho}_{\alpha}=\delta^{\rho}_{\alpha}$ und folglich, nach der Relation (9), auch $\bar{A}^{\rho}_{\alpha}=\delta^{\rho}_{\alpha}$ ist. Für eine Transformation T_0 ist nach (19)

$$\bar{A}^{\rho}_{\alpha\beta} = -A^{\rho}_{\alpha\beta}.$$

Nach (4) und (18) werden somit für eine Transformation T_0 die Relationen

$$\bar{\Pi}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} = \Pi_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} + A^{\beta}_{\alpha\gamma} - \frac{1}{n+1}(\delta^{\beta}_{\alpha}A^{\tau}_{\tau\gamma} + \delta^{\beta}_{\gamma}A^{\tau}_{\tau\alpha}),$$

$$\partial_{\bar{\delta}}\bar{\Pi}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} = \partial_{\delta}\Pi_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} + \Pi_{\rho}{}^{\beta}{}_{\gamma}A^{\rho}_{\alpha\delta} - \Pi_{\alpha}{}^{\rho}{}_{\gamma}A^{\beta}_{\rho\delta} + \Pi_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\rho}A^{\rho}_{\gamma\delta} - A^{\rho}_{\alpha\gamma}A^{\beta}_{\rho\delta} +$$

$$+\frac{1}{n+1}(\delta^{\beta}_{\alpha}A^{\rho}_{\tau\gamma}A^{\tau}_{\rho\delta} + \delta^{\beta}_{\gamma}A^{\rho}_{\tau\alpha}A^{\tau}_{\rho\delta})$$

bestehen.

Wählen wir jetzt für eine Transformation T_0 im Punkte $\underset{(0)}{\xi^{\alpha}}$

$$A^{\rho}_{\alpha\delta} = -\Pi_{\alpha}{}^{\rho}{}_{\delta},$$

so wird wegen $\Pi_{\tau}{}^{\tau}{}_{\alpha}=0$:

$$\bar{\Pi}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}=0,$$

$$\partial_{\bar{\delta}}\bar{\Pi}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} = \partial_{\delta}\Pi_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} - \Pi_{\rho}{}^{\beta}{}_{\gamma}\Pi_{\alpha}{}^{\rho}{}_{\delta} - \Pi_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\rho}\Pi_{\gamma}{}^{\rho}{}_{\delta} + \frac{1}{n+1}(\delta^{\beta}_{\alpha}\Pi_{\tau}{}^{\rho}{}_{\gamma}\Pi_{\rho}{}^{\tau}{}_{\delta} + \delta^{\beta}_{\gamma}\Pi_{\tau}{}^{\rho}{}_{\alpha}\Pi_{\rho}{}^{\tau}{}_{\delta})$$

und aus (24) wird in Hinblick auf (15):

$$(25)\qquad V^{*}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta} = V_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta}(\Pi_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu}, \partial_{\nu}\Pi_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\mu}) = V_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta}(0, \tfrac{2}{3}W_{(\kappa}{}^{\lambda}{}_{|\nu|\mu)}) = U_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta}(W_{(\kappa}{}^{\lambda}{}_{|\mu|\nu)}),$$

und das beweist den Satz 4.

Bemerkung. Die Formel (25) zeigt, daß die $V^{*}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta}$ sogar *nur von den* $n^4 - n^2\binom{n}{2}$ *Komponenten des symmetrisierten Tensors* $W_{(\kappa}{}^{\lambda}{}_{|\nu|\mu)}$ *abhängen*. Das ist auch mit $W_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta}$ selbst der Fall, wie man es auch direkt sofort einsieht: Aus

$$W_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta} = -W_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\delta\gamma}$$

(vgl. (15)) und aus

$$W_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta} + W_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\delta\alpha} + W_{\delta}{}^{\beta}{}_{\alpha\gamma} = 0$$

(vgl. L. P. EISENHART, loc. cit., Formel (32. 14)) folgt nämlich

$$W_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta} = \tfrac{1}{3}(W_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta} + W_\delta{}^\beta{}_{\gamma\alpha} - W_\alpha{}^\beta{}_{\delta\gamma} - W_\gamma{}^\beta{}_{\delta\alpha}) = \tfrac{2}{3}\, W_{(\alpha}{}^\beta{}_{|\gamma|\delta)} - \tfrac{2}{3}\, W_{(\alpha}{}^\beta{}_{|\delta|\gamma)}$$

ein Ausdruck von der Gestalt (25). (Wegen der schiefen Symmetrie der $W_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta}$ in γ, δ hängt $V^{*\beta}_{\alpha}{}_{\gamma\delta}$ in (25) von noch weniger unabhängigen Größen ab.)

Da im Beweis des Satzes 4 die projektive Invarianz nach Verwendung des Lemmas nicht mehr ausgenützt wurde, gilt auch der

Satz 4'. *Jeder einfach kontravarianter, dreifach kovarianter Tensor, der aus $\Pi_\kappa{}^\lambda{}_\mu$, $\partial_\nu \Pi_\kappa{}^\lambda{}_\mu$ gebildet ist, hängt nur von den Komponenten $W_{(\kappa}{}^\lambda{}_{|\mu|\nu)}$ des Weylschen Krümmungstensors ab.*

(Eingegangen am 2. Mai 1961.)