Unstetige, monotone Iterationsgruppen reeller Funktionen

Von LOTHAR BERG (Halle/Saale)

Bekanntlich bildet jede Lösung $f(x, s)$ der *Translationsgleichung* (vgl. [1], S. 170 ff.)

$$(1) \qquad f(f(x, s), t) = f(x, s+t)$$

$(a < x < b, \ -\infty < s < \infty)$ eine Gruppe, bei der die Verknüpfung zweier Elemente $f_1(x) = f(x, s_1)$, $f_2(x) = f(x, s_2)$ durch die Zusammensetzung $f_1 f_2 = f(f(x, s_2), s_1)$ erklärt ist, und die eine *Iterationsgruppe* von $\alpha(x) = f(x, 1)$ genannt wird. Bei festem s heißt $f(x, s)$ eine Iterierte von $\alpha(x)$ der Ordnung s. Die Funktion $\alpha(x)$ möge zunächst stetig, streng monoton, und $> x$ sein sowie die Randwerte $\alpha(a+0) = a$, $\alpha(b-0) = b$ besitzen. Nach Ergebnissen von ACZÉL—KALMÁR—MIKUSIŃSKI [2] ist es naheliegend, sich auf solche Funktionen $f(x, s)$ zu beschränken, die in bezug auf s stetig und streng monoton sind. Untersuchungen in dieser Richtung hat H. MICHEL in seiner Dissertation [3] durchgeführt. In der vorliegenden Arbeit werden Lösungen $f(x, s)$ von (1) konstruiert, die in bezug auf s unstetig sind, ohne daß sie aus den stetigen Lösungen durch Umnumerierung mit Hilfe einer Hamel-Basis der reellen Zahlen hervorgehen. Sie bleiben zwar in beiden Veränderlichen monoton, sind aber in Übereinstimmung mit [2] in bezug auf x unstetig und nicht mehr streng monoton (dies zeigt zugleich, warum sie nicht durch Umnumerierung in bezug auf s aus den stetigen Lösungen erhalten werden können). Genauer sind sie *Treppenfunktionen*, d. h. stückweise konstante Funktionen. Diese Funktionen ergeben sich bei einer Untersuchung der in [3] angegebenen notwendigen und hinreichenden Bedingungen zur Charakterisierung einer Iterierten in einer bezüglich s stetigen, monotonen Iterationsgruppe auf ihre *Unabhängigkeit*.

1. Aussagen über vertauschbare Funktionen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir uns *auf den Fall* $\alpha(x) = x+1$, $a = -\infty$, $b = +\infty$ *beschränken*, da wir sonst bei gegebener Funktion $y = \alpha(x)$ mit den oben angegebenen Eigenschaften nur die Substitution $y = \beta^{-1}(\eta)$, $x = \beta^{-1}(\xi)$, wobei $\beta(x)$ irgendeine stetige, streng monotone Lösung der Abelschen Funktionalgleichung $\beta(\alpha(x)) = \beta(x) + 1$ ist, durchzuführen brauchten. Hierbei gilt nämlich $\eta = \xi + 1$, und die Funktionen $\eta = \beta(f(\beta^{-1}(\xi), s))$ bilden eine zu der Gruppe der Funktionen $y = f(x, s)$ isomorphe Gruppe. Aus (1) folgt als notwendige Bedingung dafür, daß zwei Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ einer Iterationsgruppe angehören, die *Vertauschbarkeitsrelation*

$$(2) \qquad f_1(f_2(x)) = f_2(f_1(x)).$$

In [4] ist gezeigt worden, daß diese Bedingung unter starken Zusatzvoraussetzungen auch hinreichend ist. Stellen wir keine zusätzlichen Bedingungen, so folgt aus (2) für die spezielle Funktion $f_2(x)=x+1$, daß jede Iterierte $f(x)$ dieser Funktion der Differenzengleichung

$$f(x+1)=f(x)+1 \tag{3}$$

genügen muß und somit notwendig die Gestalt

$$f(x)=x+p(x) \tag{4}$$

besitzt, wobei $p(x)$ eine Funktion mit der Periode 1 ist, d. h. die Gleichung $p(x+1)= =p(x)$ befriedigt.

Umgekehrt kann aber nicht jede Funktion der Gestalt (4) Iterierte von $x+1$ sein, wenn wir nur eindeutige Funktionen zulassen und die Zusatzbedingung $f(x,0)=x$ stellen. Unter diesen Voraussetzungen besitzt jede Iterierte ein Inverses. Daher wollen wir *voraussetzen, daß $f(x)$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion ist, die mit $\alpha(x)=x+1$ vertauschbar ist*. Gibt es zwei nicht verschwindende ganze Zahlen m, n, so daß für die Funktion (4) $f^n(x)=\alpha^m(x)$ für alle x gilt, wobei die Potenzen von $f(x)$ und $\alpha(x)$ bezüglich der Gruppenmultiplikation zu verstehen sind, so wurde bereits in [3] gezeigt, daß es dann stets (sogar unendlich viele) Iterationsgruppen gibt, in denen $f(x)$ eine Iterierte von $x+1$ der Ordnung $\frac{m}{n}$ ist. *Gibt es zwei ganze Zahlen m, n und zwei reelle Zahlen x_0, x_1, so daß*

$$f^n(x_0)\neq\alpha^m(x_0),\quad f^n(x_1)=\alpha^m(x_1) \tag{5}$$

gilt, so kann $f(x)$ niemals eine rationale Iterierte von $\alpha(x)$ sein. Wäre nämlich für zwei natürliche Zahlen p, q und alle x die Gleichung $f^p(x)=\alpha^q(x)$ erfüllt, so würde auch $f^{np}(x)=\alpha^{nq}(x)$ gelten. Andererseits gilt wegen der Vertauschbarkeit

$$f^{2n}(x_1)=f^n\big(f^n(x_1)\big)=f^n\big(\alpha^m(x_1)\big)=\alpha^m\big(f^n(x_1)\big)=\alpha^m(\alpha^m(x_1))=\alpha^{2m}(x_1)$$

und ganz analog $f^{pn}(x_1)=\alpha^{pm}(x_1)$. Hieraus folgt durch Vergleich mit der vorhergehenden Beziehung für $x=x_1$, daß $nq=pm$ sein muß und somit $f^{np}(x)=\alpha^{mp}(x)$ oder $\big(f^n(\alpha^{-m}(x))\big)^p=x$. Wegen der Monotonie folgt hieraus $f^n\big(\alpha^{-m}(x)\big)=x$ oder $f^n(x)=\alpha^m(x)$, was für $x=x_0$ ein Widerspruch zur Voraussetzung (5) ist. Weiterhin *kann $f(x)$ unter der Voraussetzung (5) auch keine irrationale Iterierte von $\alpha(x)$ in einer bezüglich s monotonen Iterationsgruppe sein.* Hätte nämlich $f(x)$ die irrationale Iterationsordnung s, so hätte die Funktion $\beta(x)=f^n\big(\alpha^{-m}(x)\big)$ die nicht verschwindende Ordnung $t=ns-m$, die wir als positiv annehmen können, da wir andernfalls nur die Funktion $\beta^{-1}(x)$ zu betrachten brauchten. Außerdem hat $\beta(x)$ den Fixpunkt x_1, d. h. es gilt $\beta(x_1)=x_1$. Wählen wir jetzt eine natürliche Zahl r so groß, daß $rt>1$ ist, so erhalten wir an der Stelle x_1 wegen $x_1=\beta^r(x_1)<\alpha(x_1)$ einen Widerspruch zur Monotonie. Zwischen den Fixpunkten der Funktion $\beta(x)$ kann man zwar eine neue Betrachtung anstellen und dort auch Iterationsgruppen konstruieren, diese sind jedoch in Verbindung mit $\alpha(x)$ nicht monoton und interessieren somit im Rahmen dieser Arbeit nicht.

Schließlich bleibt noch der Fall übrig, wo für jede reelle Zahl x und beliebige ganze Zahlen $m, n\neq 0$ *stets $f^n(x)\neq\alpha^m(x)$ gilt.* In [3] wurde bereits gezeigt, daß außer der Vertauschbarkeit die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend dafür sind, daß $f(x)$ einer bezüglich s stetigen, monotonen Iterationsgruppe von $\alpha(x)$ mit irrationalem s angehört:

1°. *Zu jedem Paar* (x_0, y_0) *reeller Zahlen gibt es höchstens ein Paar* (n, m) *ganzer Zahlen mit* $f^n(\alpha^m(x_0)) = y_0$.

2°. *Zu jedem Tripel* (x_0, y_0, ε) *reeller Zahlen mit* $\varepsilon > 0$ *gibt es wenigstens ein Paar* (n, m) *ganzer Zahlen mit* $|f^n(\alpha^m(x_0)) - y_0| < \varepsilon$.

Man sieht leicht, daß 1° *eine Folgerung aus 2°* ist. Ist nämlich 1° nicht erfüllt, dann gibt es zwei Zahlenpaare (n_1, m_1) und (n_2, m_2) mit $f^{n_1}(\alpha^{m_1}(x_0)) = f^{n_2}(\alpha^{m_2}(x_0))$ für ein gewisses x_0. Diese Beziehung können wir wegen $f^n(\alpha^m(x)) = f^n(x+m) = f^n(x) + m$ auch in der Form $f^{n_1 - n_2}(x_0) \equiv x_0 \bmod. 1$ schreiben. Folglich besteht die Menge der Zahlen $f^n(\alpha^m(x_0))$ mod. 1 bei festem x_0 nur aus höchstens $|n_1 - n_2|$ verschiedenen isolierten Punkten und kann somit die Dichteeigenschaft 2° nicht besitzen.

2. Ein Gegenbeispiel. Umgekehrt ist jedoch 2° *keine Folgerung aus* 1°. Um diese Behauptung zu beweisen, konstruieren wir jetzt eine zu $\alpha(x) = x + 1$ vertauschbare, stetige, streng monotone Funktion $f(x)$, welche zwar die Eigenschaft 1°, aber nicht die Eigenschaft 2° besitzt, und zwar werden wir $f(x)$ zunächst rekursiv auf einer Menge von *abgeschlossenen* Intervallen $J_n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ konstruieren. Zunächst wählen wir in $[0, 1)$ ein Intervall J_0 und rechts davon ein Intervall J_1, auf das $f(x)$ das Intervall J_0 linear abbilden soll. Links von J_0 wählen wir in $[0, 1)$ ein Intervall J_{-1} und verlangen von der Funktion $f(x)$, daß sie J_{-1} linear auf J_0 abbildet (Abb. 1). Dieses Verfahren setzen wir mit der Wahl von Intervallen J_2, $J_{-2}, J_3, J_{-3}, \ldots$ fort, wobei $f(x)$ stets J_n linear auf J_{n+1} abbilden soll. In Abb. 1 haben wir diese weiteren Intervalle außerhalb von $[0, 1)$ gewählt. Damit $f(x)$ der Funktionalgleichung (3) genügt, die die Vertauschbarkeit mit $\alpha(x)$ beinhaltet, betrachten wir zu den außerhalb von $[0, 1)$ liegenden Intervallen J_n die ihnen im Innern von $[0, 1)$ mod. 1 entsprechenden Intervalle und setzen das Verfahren so fort, daß die Intervalle J_n mod. 1 keine gemeinsamen Punkte haben und die Funktion $f(x)$ monoton ist. Dies wird erreicht, wenn wir die Intervalle J_n nach folgendem Schema wählen:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccc}
-1 & 0 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -10 & -9 & -8 & -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & -27 \\
2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 \\
0 & -2 & -1 & 0 & 1 & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & -17 & -16 & -15 & -14 & -13 & -12 & -11 & -10 & -9 & -8 & -7 & -6
\end{array} \tag{6}$$

Die Zahlen $-1, 2, 0$ in der ersten Spalte bedeuten, daß wir J_2 zwischen J_{-1} und J_0 wählen und J_{-2} zwischen J_0 und J_1, wobei wir die Intervalle immer so mod. 1 betrachten, daß sie innerhalb von $[0, 1)$ liegen. Die zweite Spalte $0, 3, -2$ besagt, daß wir J_3 zwischen J_0 und J_{-2} wählen und J_{-3} zwischen J_2 und J_0 usw. Liegt J_n bereits zwischen J_r und J_s, so ist $f(x)$ sicher monoton, wenn wir J_{n+1} zwischen J_{r+1} und J_{s+1} festlegen. Liegt zwischen J_{r+1} und J_{s+1} schon ein weiteres Intervall J_t, so können wir J_{n+1} entweder zwischen J_{r+1} und J_t oder zwischen J_t und J_{s+1} wählen. Bei dem Zahlenschema (6) haben wir uns alternierend einmal für die eine und das nächste Mal für die zweite Möglichkeit entschieden. Die Stellen, bei denen eine solche Entscheidung erforderlich war, haben wir in (6) durch einen senkrechten Strich an der linken Seite gekennzeichnet. Vor der Festlegung von J_{n+1} haben

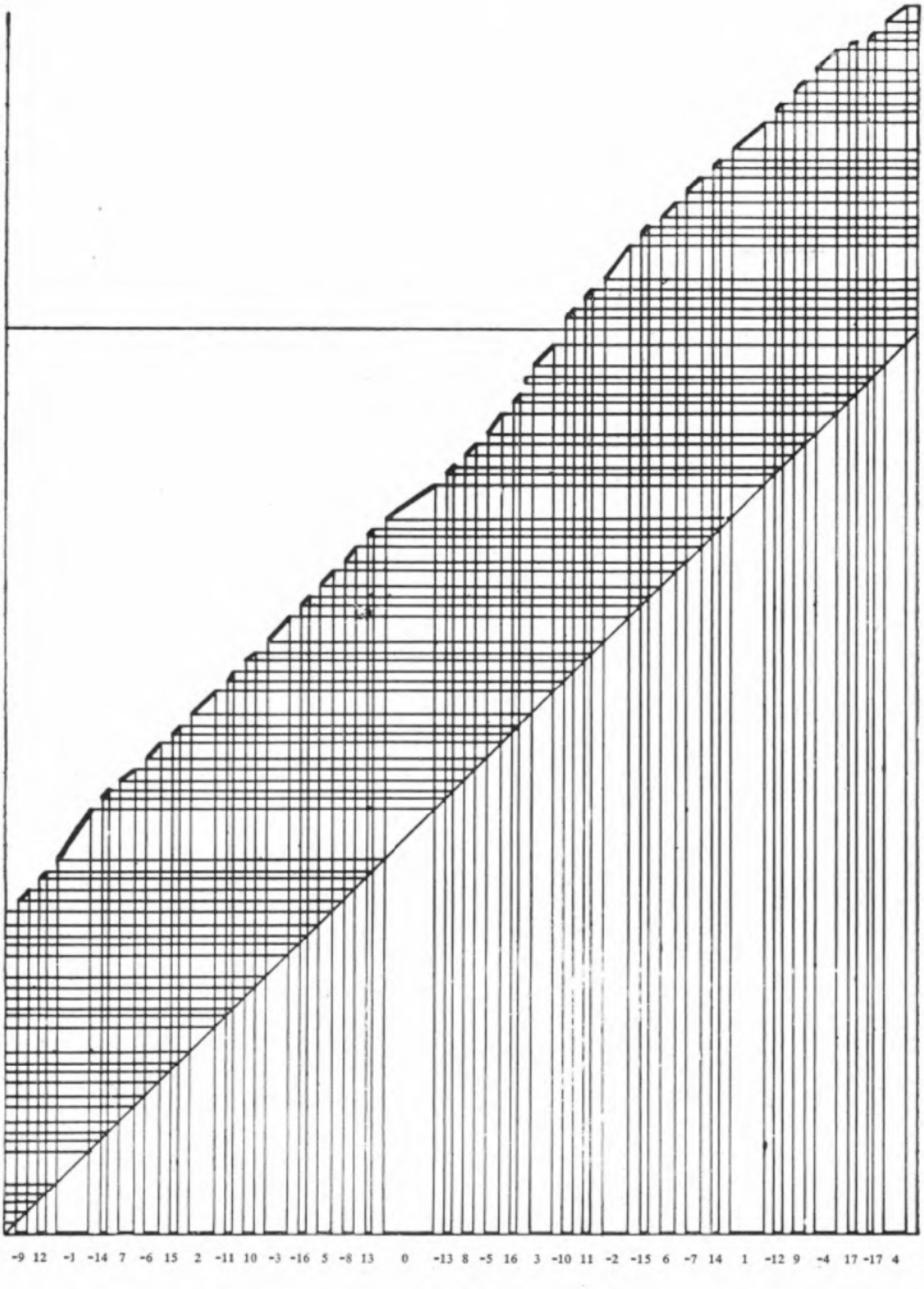
-9 12 -1 -14 7 -6 15 2 -11 10 -3 -16 5 -8 13 0 -13 8 -5 16 3 -10 11 -2 -15 6 -7 14 1 -12 9 -4 17 -17 4

Abb. 1

wir noch J_{-n} zwischen J_{-s} und J_{-r} zu wählen. Nach jedem dritten senkrechten Strich in (6) ist $s=-r$, so daß J_n und J_{-n} in dieselbe Lücke fallen. Auch in diesem Fall treffen wir die Entscheidung über die Reihenfolge von J_n und J_{-n} nach der alternierenden Regel. In Abb. 1 haben wir $f(x)$ für alle J_n bis $n=\pm 17$ eingezeichnet.

Die in dem Schema (6) in der mittleren Zeile vor den senkrechten Strichen auftretenden Zahlen

$$1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 10,\ 16,\ 27,\ 44,\ 71,\ 116,\ 188,\ 304,\ \ldots,$$

wobei wir uns (6) noch vorne durch die Spalte $0, 1, -1$ ergänzt denken, können durch

$$a_n=[b_n],\ b_{n+1}=b_n+b_{n-1}+\tfrac{1}{2},\ b_1=1,\ b_2=2$$

definiert werden und sind somit mit der Zahlenfolge von Fibonacci verwandt. Dies läßt sich durch vollständige Induktion beweisen. Die speziellen Zahlen a_n mit $a_n<b_n$ sind diejenigen, nach denen die nächsten Intervalle J_{a_n+1} und J_{-a_n-1} in dieselbe Lücke fallen, nämlich zwischen $J_{-a_{n-3}-1}$ und $J_{a_{n-3}+1}$ bzw. $J_{a_{n-3}+1}$ und $J_{-a_{n-3}-1}$. Die Zahlen in der ersten und dritten Zeile von (6) laufen jeweils von $-\left[b_n+\frac{1}{2}\right]$ bis zu a_{n-1}, wobei n in der ersten Zeile die ungeraden und in der letzten Zeile die geraden Zahlen durchläuft und $a_0=a_{-1}=0$ ist. Wegen $a_n\to\infty$ für $n\to\infty$ tritt jede ganze Zahl in dem Schema (6) unendlich oft in der ersten und unendlich oft in der letzten Zeile auf. Dies bedeutet aber, daß in jede Lücke, die zwischen irgendwelchen Intervallen noch besteht, wenn wir zunächst nur endlich viele Intervalle festgelegt haben, nach endlich vielen weiteren Schritten sicher einmal ein Intervall hineinfällt. Wählen wir insbesondere jedes Intervall J_n so, daß etwa der Mittelpunkt der Lücke, in die J_n gelegt wird, mit zu J_n gehört, so liegt die *Vereinigungsmenge M aller J_n auf* $[0, 1)$ *überall dicht*. Somit können wir die zunächst nur auf M erklärte Funktion $f(x)$ *für alle x von* $[0, 1)$ *folgendermaßen definieren*:

$$f(x_0)=\inf_{x>x_0} f(x) \tag{7}$$

mit $x\in M$. Diese Funktion ist für alle x von $[0, 1)$ stetig und genügt der Beziehung

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=f(0)+1. \tag{8}$$

Angenommen, $f(x)$ wäre unstetig, dann müßte es wegen der Monotonie eine Stelle x_0 geben mit

$$x_1=\sup_{x<x_0} f(x)<\inf_{x>x_0} f(x)=x_2\,.$$

Dann wäre aber $f(x)$ nach unserer Konstruktionsvorschrift in dem Intervall $x_1<x<x_2$ nicht definiert, und wir hätten einen Widerspruch dazu, daß M auf $[0, 1)$ überall dicht liegt. In entsprechender Weise läßt sich (8) beweisen. Setzen wir jetzt $f(x)$ außerhalb von $[0, 1)$ durch die Forderung (3) fort, so ist $f(x)$ eine überall stetige, streng monotone, mit $\alpha(x)$ vertauschbare Funktion.

Um jetzt zu zeigen, daß $f(x)$ die Eigenschaft 1° besitzt, überzeugen wir uns davon, daß für alle reellen Zahlen x und alle natürlichen Zahlen n

$$f^n(x)\not\equiv x \bmod 1 \tag{9}$$

gilt, wobei wir uns auf das Intervall $[0, 1)$ beschränken können. Für die Punkte von M ist (9) auf Grund der Konstruktionsvorschrift von $f(x)$ klar. Angenommen, es gäbe ein $x_0 \notin M$ und eine natürliche Zahl m mit

$$f^m(x_0) \equiv x_0 \text{ mod. } 1. \tag{10}$$

Dann denken wir uns in Abb. 1 alle J_n eingezeichnet mit $|n| \leqq a_m + 1$ und betrachten von diesen Intervallen J_n diejenigen beiden, zwischen denen x_0 liegt. An Hand des Schemas (6) kann man sich jedoch leicht überlegen, daß die Bilder einer Lücke zwischen zwei beliebigen Intervallen J_n bezüglich der Funktionen $f(x), f^2(x), \ldots, f^{c_m}(x)$ alle mod. 1 zur Lücke selbst durchschnittsfremd sind, wobei c_m durch

$$c_{n+1} = c_n + c_{n-1} + 1,\ c_1 = 1,\ c_2 = 2 \tag{11}$$

bestimmt ist, d. h. $c_3 = 4$, $c_4 = 7$, $c_5 = 12$, $c_6 = 20$, $c_7 = 33, \ldots$. Wegen $m \leqq c_m$ haben wir daher einen Widerspruch zu (10).

Daß $f(x)$ schließlich die Eigenschaft 2° nicht besitzt, sehen wir, wenn wir beispielsweise für x_0 einen Randpunkt eines Intervalls J_n von M und für y_0 den Mittelpunkt desselben Intervalls wählen. Dann ist 2° für $\varepsilon = |x_0 - y_0|$ nicht erfüllt. Damit ist gezeigt, daß die Eigenschaft 2° keine Folgerung aus 1° ist.

3. Festlegung einer Gruppe durch eine irrationale Iterierte. In der Arbeit [3] wurde gezeigt, daß man jeder Funktion $f(x)$, die mit $\alpha(x)$ vertauschbar ist und die die Eigenschaft 1° besitzt, eine *eindeutig bestimmte Iterationsordnung* s so zuordnen kann, daß aus

$$f^p(\alpha^q(x)) < f^m(\alpha^n(x)) \tag{12}$$

stets $sp + q < sm + n$ folgt und umgekehrt. Dabei ist s irrational und p, q, m, n sind beliebige ganze Zahlen. Für die zuvor konstruierte Funktion $f(x)$ findet man

$$s = \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{5}), \tag{13}$$

wenn man zuvor an Hand des Schemas (6) feststellt, daß beispielsweise für die durch (11) definierten Zahlen c_n

$$\alpha^{c_n}(x) < f^{c_{n+2}}(x) < \alpha^{c_n + 1}(x)$$

gilt und somit nach der in [3] angegebenen Formel

$$s = \lim_{n \to \infty} \frac{c_n}{c_{n+2}}.$$

Aus (11) folg aber zunächst für den positiven Grenzwert $c = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{c_n}{c_{n+1}}$ die Gleichung $\dfrac{1}{c} = 1 + c$, d. h. $c = \dfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, und schließlich aus $s = c^2$ die Behauptung (13).

Wollen wir jetzt zu der Funktion $f(x)$ mit der durch (13) festgelegten Iterationsordnung s eine monotone Iterationsgruppe konstruieren, so können wir etwa folgendermaßen vorgehen. Wir *definieren*

$$f(x, t) = \inf_{sp + q > t} f^p(\alpha^q(x)) \tag{14}$$

und zeigen, daß diese Funktion der Translationsgleichung (1) *genügt.* Sind u, v, und x gegeben, so betrachten wir zunächst beliebige ganze Zahlen p_1, q_1, p_2, q_2 mit

$$sp_1+q_1>u,\ sp_2+q_2>v. \tag{15}$$

Aus

$$f^{p_1}\big(\alpha^{q_1}\big[f^{p_2}\big(\alpha^{q_2}(x)\big)\big]\big)=f^{p_1+p_2}\big(\alpha^{q_1+q_2}(x)\big) \tag{16}$$

folgt dann, wenn wir die Zahlen p_i, q_i auf der rechten Seite festhalten und auf der linken Seite zunächst p_2, q_2 und danach p_1, q_1 unter Beibehaltung von (15) variieren lassen,

$$f\big(f(x,v),u\big)\leqq f^{p_1}\big(\alpha^{q_1}\big(f(x,v)\big)\big)\leqq f^{p_1+p_2}\big(\alpha^{q_1+q_2}(x)\big).$$

Bilden wir jetzt auf der rechten Seite die untere Grenze für alle p_i, q_i mit $s(p_1+p_2)+q_1+p_2>u+v$, so erhalten wir die Ungleichung

$$f\big(f(x,v),u\big)\leqq f(x,u+v). \tag{17}$$

Andererseits können wir in (16) zunächst auf der rechten Seite die untere Grenze bilden und danach schrittweise auf der linken Seite. Dann ergibt sich

$$f^{p_1}\big(\alpha^{q_1}\big[f^{p_2}\big(\alpha^{q_2}(x)\big)\big]\big)\geqq f(x,u+v).$$

$$f^{p_1}\big(\alpha^{q_1}\big(f(x,v)\big)\big)\geqq f(x,u+v)$$

und schließlich

$$f\big(f(x,v),u\big)\geqq f(x,u+v).$$

Zusammen mit (17) ist damit die Behauptung bewiesen.

Wie aus (12) hervorgeht, ist die durch (14) definierte Funktion in bezug auf t und in bezug auf x monoton. Da aber die Eigenschaft 2° nicht erfüllt ist, kann $f(x, t)$ in bezug auf t nicht stetig sein und somit nach [2] auch nicht in bezug auf x. Weiterhin können die Beziehungen

$$f(x,0)=x,\ f(x,1)=x+1,\ f(x,s)=f(x) \tag{18}$$

nicht für alle x erfüllt sein, da unstetige, monotone Funktionen kein durchweg erklärtes Inverses besitzen und die Translationsgleichung (1) erfüllt ist (vgl. auch Punkt **4**). Genauer sieht man an Hand der Abb. 1, daß $f(x, 0)$ *eine Treppenfunktion* ist, die in einem Intervall J_n von M gleich dem rechten Endpunkt dieses Intervalls ist. Daraus geht hervor, daß zwischen zwei konstanten Stufen dieser Funktion stets unendlich viele andere Stufen liegen, und daß $f(x, 0)$ in jedem Teilintervall der x-Achse ein konstantes Stück besitzt. Offenbar läßt sich zu jeder Funktion $f(x, 0)$ mit dieser Eigenschaft eine Iterationsgruppe konstruieren. Man könnte zwar denken, daß sich die Bedingungen (18) erzwingen lassen, wenn man in (14) das Gleichheitszeichen zuläßt, jedoch kann man dann nicht mehr die Translationsgleichung beweisen, wenn u und v irrational sind, aber $u+v$ rational ist. Dagegen kann man natürlich eine ganz analoge Gruppe konstruieren, wenn man in (14) die untere Grenze durch die obere Grenze über $sp+q<t$ ersetzt. Nebenbei sei erwähnt, daß man sich auf analoge Weise auch eine bezüglich s stetige, monotone Iterationsgruppe konstruieren kann, wenn man bei der Konstruktion der irrationalen Iterierten $f(x)$ die Intervalle J_n auf Punkte zusammenschrumpfen läßt.

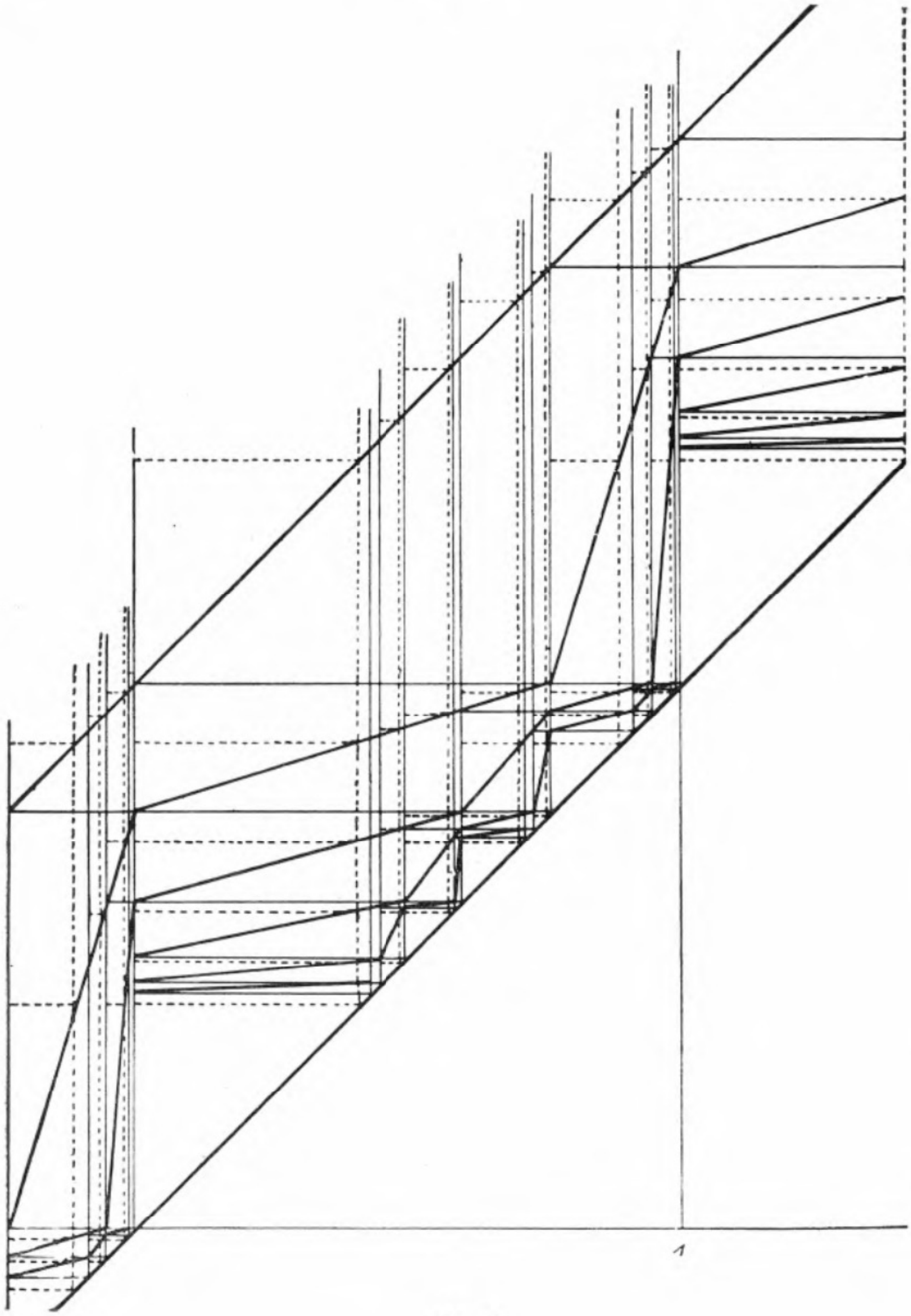

Abb. 2

4. Festlegung einer Gruppe durch rationale Iterierte. Zu unstetigen, monotonen Iterationsgruppen kann man auch auf eine andere Weise gelangen, die etwas übersichtlicher ist. In [3] wurde bereits bewiesen, daß eine stetige, monotone Iterationsgruppe durch unendlich viele rationale Iterierte festgelegt ist, wenn die Iterationsordnungen mod. 1 einen Häufungspunkt besitzen. Wir wollen jetzt zeigen, daß hiervon nicht die Umkehrung gilt, d. h., daß *unendlich viele mod. 1 verschiedene, untereinander vertauschbare, rationale Iterierte keine stetige, monotone Iterationsgruppe zu bestimmen brauchen.* Wie ebenfalls schon in [3] gezeigt wurde, sind rationale in x monotone Iterierte stets auch monoton in s. Wir konstruieren uns jetzt zu der Funktion $\alpha(x)=x+1$ Iterierte der Ordnungen $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \frac{1}{2^n}, \dots$, aber so, daß die monoton fallende Folge der Funktionswerte dieser Iterierten für $x=0$ nicht gegen Null strebt (Abb. 2). Diese Iterierten erzeugen eine Iterationsgruppe $f(x, r)$, wobei die Zahlen r die Form $r=\dfrac{k}{2^m}$ haben mit beliebigen ganzen Zahlen k und $m (m \geqq 0)$. Diese Gruppe kann offenbar nicht in eine stetige, monotone Iterationsgruppe eingebettet werden.

Man kann jedoch ähnlich wie zuvor für beliebige reelle s

$$F(x, s)=\inf_{r>s} f(x, r) \tag{19}$$

mit $r=\dfrac{k}{2^m}$ definieren, wobei das Gleichheitszeichen wieder ausgeschlossen werden muß. Daß die in dieser Weise *definierte Funktion $F(x, s)$ der Translationsgleichung* (1) *genügt*, sehen wir wie im vorhergehenden Fall, wenn wir in der Gleichung

$$f(f(x, r_1), r_2)=f(x, r_1+r_2) \tag{20}$$

mit $r_1>u, r_2>v$ auf den einzelnen Seiten getrennt in verschiedener Reihenfolge das inf bilden.

Da die Funktionen $f(x, r)$ bezüglich x stark monoton sind, ist $F(x, s)$ zumindest schwach monoton. Weiterhin folgt aus (19) $F(x, r) \geqq f(x, r)$. Außerdem sind die Funktionen $F(x, s)$ und $f(x, r)$ miteinander vertauschbar, denn wir brauchen nur in der Gleichung

$$f(f(x, r_1), r_2)=f(f(x, r_2), r_1)$$

das inf für $r_1>s$ zu bilden. Wegen dieser Vertauschbarkeit kann man sich an Hand der Abb. 2 leicht überlegen, daß zunächst $F(x, 0)$ wieder eine Treppenfunktion von dem im vorhergehenden Punkt beschriebenen Typ ist. Aus

$$F(x, s)=F(F(x, 0), s)$$

folgt dann aber, daß *jede Funktion $F(x, s)$ eine solche Treppenfunktion* ist. Über die Treppenstufen kann man noch folgendes aussagen: Aus $F(\xi, 0)=\eta>\xi$ und der Translationsgleichung folgt $F(\eta, 0)=F(\xi, 0)=\eta$, somit gilt wegen der Monotonie $F(x, 0)=\eta$ für $\xi \leqq x \leqq \eta$. Dies bedeutet, daß die rechten Endpunkte der Stufen wie in Punkt **3** mit zur Funktion gehören und auf der Geraden $y=x$ liegen. Hieraus folgt nochmals, daß $F(x, 0)$ Sprungstellen hat. Andererseits folgt aus (19) für $s=0$ wegen der Monotonie und der Stetigkeit der $f(x, r)$, daß auch die linken Endpunkte der Stufen mit zur Funktion $F(x, 0)$ gehören. Bei festem x ist $F(x, s)$ jedoch in bezug auf die zweite Veränderliche streng monoton, da $f(x, r)$ diese Eigenschaft besitzt. Schließlich erhalten wir noch einen Zusammenhang zwischen den Funktionen $F(x, r)$ und $f(x, r)$, wenn wir in (20) bei festem $r_1 = r$ das inf nur über $r_2 > 0$ bilden,

$$F(x, r) = f(F(x, 0), r), \tag{21}$$

so daß wir in Abb. 2 aus den Funktionen $f(x, \frac{1}{2^n})$ die Funktionen $F(x, \frac{1}{2^n})$ erhalten, indem wir die stark ausgezeichneten Linien durch die darüberliegenden waagerechten, punktierten Linien ersetzen.

Aus (21) folgt für $r = 1$, daß die *Iterationsgruppe* $F(x, s)$ *die Funktion* $\alpha(x)$ *nicht enthält*, obwohl wir bei der Konstruktion der Gruppe von $\alpha(x)$ ausgegangen waren (vgl. auch (18)). Allgemein kann man noch folgendes feststellen: Kommt in einer bezüglich x monotonen Iterationsgruppe $f(x, s)$ mindestens eine Funktion vor, die in bezug auf x unstetig ist, so sind alle Funktionen dieser Gruppe unstetig. Besitzt nämlich die Funktion $f(x, s_0)$ eine Sprungstelle, so hat jede andere Funktion wegen

$$f(x, s) = f(f(x, s_0), s - s_0)$$

ebenfalls eine Sprungstelle, und andere Unstetigkeiten kommen bei monotonen Funktionen nicht vor. Folglich kann es zu einer gegebenen stetigen, monotonen Funktion $\alpha(x)$ keine bezüglich x monotone Iterationsgruppe $f(x, s)$ mit $f(x, 1) = \alpha(x)$ geben, die mindestens eine unstetige Funktion enthält.

Literatur

[1] J. Aczél, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, *Berlin*, 1961.
[2] J. Aczél – L. Kalmár – J. G. Mikusiński, Sur l'équation de translation, *Studia Math.* **12** (1951), 112–116.
[3] H. Michel, Untersuchungen über stetige, monotone Iterationsgruppen reeller Funktionen ohne Differenzierbarkeitsvoraussetzungen, *Publ. Math. Debrecen* **9** (1962), 13–46.
[4] L. Berg, Iterationen von beliebiger Ordnung, *Z. Angew. Math. Mech.* **40**, (1960), 215–229.

(Eingegangen am 9. Oktober 1961.)