# Über Tensoren von rekurrenter kovarianter Ableitung

Von A. MOÓR (Szeged)

## § 1. Einleitung

Ein sehr wesentlicher Begriff der Theorie der geometrischen Objekte ist der Begriff der kovarianten Ableitung (vgl. etwa [1] Kapitel IV.). In Bezug auf die Tensoren spielt dieser Begriff auch in den verschiedenen differentialgeometrischen Räumen eine sehr wichtige Rolle, da die Übertragungstheorie und die Krümmung mit Hilfe der kovarianten Ableitung entwickelt wird. Wir wollen uns in diesem Aufsatz mit solcher kovarianten Ableitung der Vektoren bzw. Tensoren befassen, die der Relation

$$\nabla_\nu T^{\alpha_1 \dots \alpha_j}_{\beta_1 \dots \beta_k} = k_\nu T^{\alpha_1 \dots \alpha_j}_{\beta_1 \dots \beta_k} \tag{1. 1}$$

genügen, wo $\nabla_\nu$ die kovariante Ableitung nach $x^\nu$, $T^{\alpha_1 \dots \alpha_j}_{\beta_1 \dots \beta_k}$ ein bestimmtes Tensorfeld und $k_\nu$ ein kovariantes Vektorfeld bedeutet. Offenbar müssen wir $T^{\alpha_1 \dots \alpha_j}_{\beta_1 \dots \beta_k} \not\equiv 0$ voraussetzen, da $T^{\alpha_1 \dots \alpha_j}_{\beta_1 \dots \beta_k} \equiv 0$ der Relation (1. 1) immer genügt. Von den Komponenten des betrachteten Tensorfeldes wollen wir immer annehmen, daß sie in den Veränderlichen $x^\nu$ stetig und hinreichend oft differenzierbar sind.

Wenn die durch die symmetrischen Übertragungsparameter $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma(x_1, \dots, x_n)$ bestimmte kovariante Ableitung für ein gewisses Tensorfeld $T^{\alpha_1 \dots \alpha_j}_{\beta_1 \dots \beta_k}$ der Relation (1. 1) genügt, so wollen wir diese kovariante Ableitung *eine rekurrente kovariante Ableitung nennen*, und der Tensor $T^{\alpha_1 \dots \alpha_j}_{\beta_1 \dots \beta_k}$ *ist ein Tensor von rekurrenter kovarianter Ableitung*.

In der Geometrie haben unter anderen H. S. RUSE und A. G. WALKER solche Riemannsche Räume eingehend untersucht, für deren Krümmungstensor (1. 1) gültig ist (vgl. [4] und [5]). Wir werden jetzt allgemeiner untersuchen, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, um die Gültigkeit einer Relation von der Form (1. 1) zu sichern. In preziserer Formulierung wollen wir die folgenden Probleme untersuchen:

1) *Sind* $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma(x^1, \dots, x^n)$ *die symmetrischen affinen Übetragungsparameter in einem Punktraum, und ist* $k_\nu(x^1, \dots, x^n)$ *ein kovariantes Vektorfeld, was sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines Vektorfeldes bzw. eines Tensorfeldes zweiter Stufe, für das* (1. 1) *gilt.*

Nach einigen geometrischen Interpretationen untersuchen wir unser zweites Problem:

2) *Wie kann zu einem kovarianten symmetrischen Tensorfeld zweiter Stufe ein symmetrischer Übertragungsparameter* $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}(x)$ *konstruiert werden so, daß* (1. 1) *erfüllt sei.*

Es wird sich zeigen, daß unser Problem 2) mit der konformen Veränderung der Metrik eines Riemannschen Raumes in Zusammenhang steht (vgl. [3], Formel (2. 6)). Zuletzt werden wir als drittes Problem:

3) *die der Bedingung* (1. 1) *genügende kovariante Ableitungen untersuchen, in denen der Vektor* $k_{\nu}$ *ein Gradientvektor*[1]) *ist.*

Bezüglich des Problems 3) werden wir hinreichende, bzw. notwendige und hinreichende Bedingungen bestimmen, dafür, daß $k_{\nu}$ ein Gradientvektor sei. Es wird sich zeigen, daß gewisse hinreichende Bedingungen einfacher sind und in der Geometrie eine wichtigere Rolle spielen, als die notwendigen und hinreichenden Bedingungen.

## § 2. Über die Existenz von Tensoren mit rekurrenter kovarianter Ableitung

Im $n$-dimensionalen Punktraum sei durch die symmetrischen affinen Übertragungsparameter $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}(x)$ eine kovariante Ableitung definiert. Außer $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ sei ein kovariantes Vektorfeld $k_{\nu}(x)$ angegeben. Wir wollen jetzt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz gewisser speziellen Tensoren bestimmen, die der Relation (1. 1) genügen.

Erstens betrachten wir den Fall der Vektoren. Statt (1. 1) hat man jetzt:

$$\nabla_{\nu} T^{\alpha} = k_{\nu} T^{\alpha} \qquad (T^{\alpha} \neq 0). \tag{2. 1}$$

Auf Grund der Identität

$$\partial^2_{[\nu\mu]} T^{\alpha_1 \dots \alpha_j}_{\beta_1 \dots \beta_k} \equiv \nabla_{[\nu} \nabla_{\mu]} T^{\alpha_1 \dots \alpha_j}_{\beta_1 \dots \beta_k} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} R_{\beta_i}{}^{\varrho}{}_{\mu\nu} T^{\alpha_1 \dots \dots \dots \dots \dots \alpha_j}_{\beta_1 \dots \beta_{i-1} \varrho \beta_{i+1} \dots \beta_k} - \tag{2. 2}$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{j} R_{\varrho}{}^{\alpha_i}{}_{\mu\nu} T^{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \varrho \alpha_{i+1} \dots \alpha_j}_{\beta_1 \dots \dots \dots \dots \dots \beta_k},$$

wo $R_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\mu\nu}$ den zu $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ gehörigen Krümmungstensor bedeutet, werden die Integrabilitätsbedingungen von (2. 1) durch die Gleichungen

$$\left(\tfrac{1}{2} R_{\varrho}{}^{\alpha}{}_{\mu\nu} - \nabla_{[\nu} k_{\mu]} \delta^{\alpha}_{\varrho}\right) T^{\varrho} = 0 \tag{2. 3a}$$

festgelegt.[2]) Ist (2. 3a) eine Identität, d. h. ist

$$R_{\varrho}{}^{\alpha}{}_{\mu\nu} \equiv 2 \nabla_{[\nu} k_{\mu]} \delta^{\alpha}_{\varrho},$$

so existieren $n$ linear unabhängige Vektorfelder, für die (2. 1) besteht. Ist (2. 3a) keine Identität, so müssen wir die weiteren Integrabilitätsbedingungen nach dem

---

[1]) Statt Vektorfeld bzw. Tensorfeld werden wir oft nur die Benennung Vektor, bzw. Tensor benützen. Wie wir schon bemerkt haben, werden wir die affinen Übertragungsparameter $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ der kovarianten Ableitung immer als symmetrisch voraussetzen.

[2]) Die Formel (2.2) ist die Ricci Identität, (vgl. [2] Formel (4.5)), falls $\partial^2_{[\nu\mu]} T^{\alpha_1 \dots \alpha_j}_{\beta_1 \dots \beta_k} = 0$.

THOMAS—VEBLENschen Verfahren bestimmen (vgl. [5], § 7.). Nach den weiteren kovarianten Ableitungen von (2. 3a) bekommen wir in Hinblick auf die Relation (2. 1):

$$(\tfrac{1}{2}\nabla_{\sigma_1} R_{\varrho\ \mu\nu}^{\ \alpha} - \nabla_{\sigma_1}\nabla_{[\nu}k_{\mu]}\delta_\varrho^\alpha)T^\varrho = 0, \tag{2. 3b}$$

$$(\tfrac{1}{2}\nabla_{\sigma_2}\nabla_{\sigma_1} R_{\varrho\ \mu\nu}^{\ \alpha} - \nabla_{\sigma_2}\nabla_{\sigma_1}\nabla_{[\nu}k_{\mu]}\delta_\varrho^\alpha)T^\varrho = 0, \tag{2. 3c}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nach dem Satz über die Integrabilität der partiellen Differentialgleichungen von der Form (2. 1) besteht der folgende

**Satz 1.** *Notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit von* (2. 1) *ist die Existenz einer Zahl* $N(\leqq n)$ *derart, daß die* $N$ *ersten Gleichungsketten, die aus* (2. 3a), (2. 3b), (2. 3c), ... *bestehen, ein verträgliches System bilden, und jede Lösung die* $(N+1)$*-te Gleichungskette identisch befriedigt.*

Ist nun $k_\nu$ ein Gradientvektor, so ist wegen der Symmetrie von $\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}$ in $\alpha$, $\gamma$:

$$\nabla_{[\nu}k_{\mu]} = 0.$$

Die Integrabilitätsbedingungen von (2. 1) stimmen in diesem Falle nach (2. 3a), (2. 3b), ... mit den Integrabilitätsbedingungen von

$$\nabla_\nu T^\alpha = 0 \tag{2. 4}$$

überein. Ist aber für einen Vektor (2. 4) gültig, so ist $T^\alpha$ längs jeder Kurve $x^\alpha = x^\alpha(t)$ parallel verschiebbar d. h. absolut parallel (vgl. [2] § 9.). Es ist also der folgende Satz gültig:

**Satz 2.** *Ist in dem durch* $\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}$ *bestimmten affinen Raum das Differentialgleichungssystem* (2. 4) *bezüglich* $T^\alpha$ *lösbar, so ist auch* (2. 1) *mit* $k_\nu = \partial_\nu k$ *lösbar, und umgekehrt.*

In einer anderen Fassung lautet dieser Satz wie folgt:

**Satz 2*.** *Existiert in dem durch* $\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}$ *bestimmten affinen Raum ein Vektorfeld mit rekurrenter kovarianter Ableitung, das mit einem Gradientvektor gebildet wurde, so existiert auch ein absolut paralleles Vektorfeld, und umgekehrt.*

Für ein kovariantes Vektorfeld $T_\alpha$, welches eine rekurrente kovariante Ableitung hat, können ähnliche Sätze bewiesen werden. Wir geben aber auch eine von dem Analogon des Satzes 1 verschiedene Bedingung für die Gültigkeit der Relation

$$\nabla_\beta T_\alpha - k_\beta T_\alpha = 0. \tag{2. 5}$$

**Satz 3.** *Ist* $T_\alpha \not\equiv 0$ $(\alpha = 1, ..., n)$, *so sind für das Bestehen der Relation* (2. 5) *die Relationen*

$$\frac{T_\alpha}{T_\beta} = \frac{\partial_\alpha \log |T_\beta| - k_\alpha}{\partial_\beta \log |T_\alpha| - k_\beta} \tag{2. 6a}$$

$$\nabla_{(\beta}T_{\alpha)} - k_{(\beta}T_{\alpha)} = 0 \tag{2. 6b}$$

*notwendig und hinreichend.*

(2. 6b)

*notwendig und hinreichend.*

BEWEIS. Aus (2. 5) folgt wegen der Symmetrie von $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ in $\alpha, \gamma$, daß

$$(\partial_\beta T_\alpha - k_\beta T_\alpha) - (\partial_\alpha T_\beta - k_\alpha T_\beta) = 0 \tag{2. 7}$$

ist. Diese Gleichung können wir in der Form

$$T_\alpha(\partial_\beta \log |T_\alpha| - k_\beta) - T_\beta(\partial_\alpha \log |T_\beta| - k_\alpha) = 0 \tag{2. 8}$$

schreiben, woraus (2. 6a) unmittelbar folgt. Aus (2. 5) folgt offenbar auch (2. 6b).

Nehmen wir jetzt an, daß (2. 6a) und (2. 6b) bestehen. Aus (2. 6a) bekommt man (2. 8), und aus (2. 8) die Relation (2. 7). Die Relation (2. 7) drückt aber aus, daß

$$\partial_{[\beta} T_{\alpha]} - k_{[\beta} T_{\alpha]} = 0$$

ist. Diese letzte Relation kann noch in der Form

$$\nabla_{[\beta} T_{\alpha]} - k_{[\beta} T_{\alpha]} = 0 \tag{2. 9}$$

angegeben werden. Aus (2. 9) und (2. 6b) folgt dann unmittelbar (2. 5), w. z. b. w.

Jetzt wollen wir den Fall der rein kovarianten Tensoren zweiter Stufe untersuchen. Aus (1. 1) wird jetzt

$$\nabla_\nu T_{\alpha\beta} = k_\nu T_{\alpha\beta}. \tag{2. 10}$$

Auf Grund der allgemeinen Formel (2. 2) bekommen wir die Integrabilitätsbedingungen von (2. 10) in der Form:

$$\left(\tfrac{1}{2} R_{\alpha}{}^{\varrho}{}_{\mu\nu}\delta^{\sigma}_{\beta} + \tfrac{1}{2} R_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\mu\nu}\delta^{\varrho}_{\alpha} + \nabla_{[\nu}k_{\mu]}\delta^{\varrho}_{\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta}\right) T_{\varrho\sigma} = 0. \tag{2. 11a}$$

Ist (2. 11a) nicht eine Identität, so bekommen wir die weiteren Integrabilitätsbedingungen von (2. 10) durch die Bildung der kovarianten Ableitungen von (2. 11a). Es wird in Hinblick auf (2. 10)

$$T_{\varrho\sigma}\nabla_{\varkappa_1}\left[\tfrac{1}{2} R_{\alpha}{}^{\varrho}{}_{\mu\nu}\delta^{\sigma}_{\beta} + \tfrac{1}{2} R_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\mu\nu}\delta^{\varrho}_{\alpha} - \nabla_{[\nu}k_{\mu]}\delta^{\varrho}_{\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta}\right] = 0, \tag{2. 11b}$$

$$T_{\varrho\sigma}\nabla_{\varkappa_2}\nabla_{\varkappa_1}\left[\tfrac{1}{2} R_{\alpha}{}^{\varrho}{}_{\mu\nu}\delta^{\sigma}_{\beta} + \tfrac{1}{2} R_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\mu\nu}\delta^{\varrho}_{\alpha} - \nabla_{[\nu}k_{\mu]}\delta^{\varrho}_{\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta}\right] = 0, \tag{2. 11c}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Lösbarkeit von (2. 10) sind analog zu denen im Satz 1, man muß nur an Stelle der Gleichungen (2. 1), (2. 3a), (2. 3b), (2. 3c), … die Gleichungen (2. 10), (2. 11a), (2. 11b), (2. 11c), … setzen.

In vollständig analoger Weise kann man die Integrabilitätsbedingungen der allgemeinen Formel (1. 1) bestimmen. Setzen wir in der Formel (2. 2)

$$\partial^2_{[\nu\mu]} T^{\alpha_1\ldots\alpha_j}_{\beta_1\ldots\beta_k} = 0,$$

so bekommt man die erste Gleichungskette der Integrabilitätsbedingungen von (1. 1). Durch die Bildung der kovarianten Ableitungen der so erhaltenen Relationen bekommt man unter Beachtung der Formel (1. 1) selbst alle Integrabilitätsbedingungen der Fundamentalgleichung (1. 1).

## § 3. Geometrische Interpretationen der Vektoren von rekurrenter kovarianter Ableitung

$T^\alpha(x)$ soll im folgenden immer ein Vektorfeld von rekurrenter kovarianter Ableitung bedeuten, d. h. es soll immer die Relation (2. 1) gültig sein. Nehmen wir jetzt an, daß der Vektor $k_\nu$, der in der Formel (2. 1) vorkommt, ein Normalvektor einer Kurve

$$C:\ x^\nu = x^\nu(t)$$

ist, d. h.:

$$k_\nu(x(t))\frac{dx^\nu}{dt} = 0 \tag{3. 1}$$

besteht. Es kann aus (2. 1) und (3. 1) unmittelbar verifiziert werden, daß *wenn für das Vektorfeld $T^\alpha(x)$ die Relation* (2. 1) *gültig ist, so ist $T^\alpha$ längs der Kurve $C$ parallel verschoben.* Das charakteristische Differentialgleichungssystem der Parallelverschiebung der Vektoren ist nämlich:

$$\frac{DT^\alpha}{dt} \equiv \nabla_\nu T^\alpha \frac{dx^\nu}{dt} = 0, \tag{3. 2}$$

woraus unsere Behauptung auf Grund der Formeln (2. 1) und (3. 1) unmittelbar folgt.

Wir wollen noch bemerken, daß die Relation (3. 1) in den affinen Räumen eben die pseudo-Orthogonalität der ko- und kontravarianten Vektoren (in (3. 1) ist nämlich $\frac{dx^\nu}{dt}$ ein kontravarianter Vektor) definiert (vgl. [2] § 11.)[3]).

Wir beweisen jetzt den folgenden

**Satz 4.** *Ist $T^\alpha(x)$ ein Vektorfeld von rekurrenter kovarianter Ableitung, und ist in der für $T^\alpha$ gültige Relation* (2. 1) *das Vektorfeld $k_\nu$ ein Gradientvektorfeld, so geht durch jeden Punkt $\underset{(0)}{x^\kappa}$ eine Hyperfläche $\mathfrak{F}_0$, längs der $T^\alpha$ absolut parallel ist.*

**Bemerkung.** Wir nennen einen Vektorfeld $T^\alpha$ längs einer Hyperfläche $\mathfrak{F}_0$ absolut parallel, falls $T_\alpha$ längs jeder Kurve $C$ von $\mathfrak{F}_0$ parallel verschiebbar ist.

Der Satz 4 ist gewissermaßen zu Satz 2* ähnlich; im Satz 2* ist aber das absolut parallele Vektorfeld nicht mit $T^\alpha$ identisch.

Beweis des Satzes 4. Nach unserer Annahme ist das Vektorfeld $k_\nu$ ein Gradientvektorfeld, d. h. es existiert ein Skalarfeld $k(x)$ so, daß $k_\nu = \partial_\nu k$ ist. Betrachten wir jetzt die Hyperfläche

$$\mathfrak{F}_0:\quad k(x^1, x^2, \ldots, x^n) - k(\underset{(0)}{x^1}, \underset{(0)}{x^2}, \ldots, \underset{(0)}{x^n}) = 0.$$

Wir zeigen, daß diese Hyperfläche den Bedingungen des Satzes genügt. Offenbar liegt der Punkt $\underset{(0)}{x^\kappa}$ auf $\mathfrak{F}_0$. Liegt nun eine Kurve $x_\nu = x_\nu(t)$ $(t_0 \leqq t \leqq t_1)$ auf $\mathfrak{F}_0$,

[3]) Die pseudo-Orthogonalität ist im metrischen Fall mit der Orthogonalität identisch.

so ist

$$k\left(x^1(t), \ldots, x^n(t)\right) - k(\underset{(0)}{x^1}, \ldots, \underset{(0)}{x^n}) \equiv 0,$$

falls $t_0 \leqq t \leqq t_1$ ist. Differenziert man unsere letzte Gleichung nach $t$, so bekommt man unmittelbar die Gleichung (3. 1) mit $k_\nu = \partial_\nu k(x)$. Aus (3. 1) folgt aber auf Grund von (2. 1) die Relation (3. 2), und das drückt eben den Satz 4 aus.

Die Umkehrung dieses Satzes ist im allgemeinen nicht gültig; (vgl. die Bemerkung am Ende von § 3); es besteht aber der

**Satz 5.** *Existiert in jedem Punkt $\underset{(0)}{x^\varkappa}$ des Raumes eine Hyperfläche $\mathfrak{F}_0$, so daß längs $\mathfrak{F}_0$ ein vorgegebenes Vektorfeld $T^\alpha(x)$ absolut parallel ist, so hat die kovariante Ableitung von $T^\alpha$ die Form*

$$\nabla_\nu T^\alpha = k_\nu t^\alpha, \tag{3. 3}$$

*wo $k_\nu$ den kovarianten Normalvektor von $\mathfrak{F}_0$, bzw. $t^\alpha$ ein kontravariantes Vektorfeld bedeutet. Ist $t^\alpha = \varphi T^\alpha$, so hat $T^\alpha$ rekurrente kovariante Ableitung. ($\varphi$ bedeutet einen Skalar.)*

Beweis. Es sei $k_\nu$ der Normalvektor von $\mathfrak{F}_0$. Da zu jedem Punkte $x^\beta$ des Raumes eine Fläche gehört, längs der $T^\alpha(x)$ parallel verschiebbar ist, ist in jedem Punkte $x^\beta$ des Raumes der Vektor $k_\nu$ definiert. Ergänzen wir das Vektorfeld $k_\nu(x)$ durch die linear unabhängingigen Vektoren $\underset{(i)}{e_\alpha}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ [4]) zu einem kovarianten $n$-Beinfeld, wobei $\underset{(n)}{e_\alpha} = k_\alpha$ gesetzt wurde. Durch die Gleichungen

$$\underset{(\varrho)}{e^\varkappa}\underset{(\sigma)}{e_\varkappa} = \delta_{\varrho\sigma} \tag{3. 4}$$

($\delta_{\varrho\sigma}$ bedeutet das Kronecker-$\delta$) ist zu $\underset{(\sigma)}{e_\varkappa}$ das adjungierte kontravariante $n$-Beinfeld definiert. Setzen wir in (3. 4) $\sigma = n$, so sieht man, daß die Vektoren $\underset{(1)}{e^\varkappa}, \ldots, \underset{(n-1)}{e^\varkappa}$ Tangentenvektoren von $\mathfrak{F}_0$ sind.

Nehmen wir nun an, daß die Gleichung der Hyperfläche $\mathfrak{F}_0$ durch

$$\mathfrak{F}_0\colon\ k(x^1, x^2, \ldots, x^n) = 0$$

angegeben ist. Der Normalvektor von $\mathfrak{F}_0$ ist dann durch

$$\underset{(n)}{e_\nu} \equiv k_\nu = \partial_\nu k(x^1, \ldots, x^n) \tag{3. 5}$$

angegeben. Ist nun $C\colon x^\nu = x^\nu(t)$ eine Kurve auf $\mathfrak{F}_0$, so besteht längs $C$ offenbar die Relation (3. 1). Da $\dfrac{dx^\nu}{dt}$ in einem Punkte von $\mathfrak{F}_0$ ein beliebiger Tangentenvektor sein kann, wird neben (3. 1) in jedem Punkte von $\mathfrak{F}_0$ auch

$$k_\alpha \underset{(i)}{e^\alpha} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

[4]) Die lateinischen Indizes werden in diesem Paragraphen immer die Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$ durchlaufen. Die griechischen Indizes bedeuten — wie vorher — die Zahlen $1, 2, \ldots, n$.

bestehen, da die $\underset{(i)}{e^\alpha}$ — wie das schon bemerkt wurde — Tangentenvektoren von $\mathfrak{F}_0$ sind.

Nach der Annahme des Satzes ist

$$\nabla_\nu T^\alpha \frac{dx^\nu}{dt} = 0, \tag{3.6}$$

wenn $\frac{dx^\nu}{dt}$ ein beliebiger Tangentenvektor von $\mathfrak{F}_0$ ist. Wählen wir für $\frac{dx^\nu}{dt}$ der Reihe nach die Vektoren $\underset{(i)}{e^\nu}$, so wird nach (3. 6)

$$\nabla_\nu T^\alpha \underset{(i)}{e^\nu} = 0, \qquad (i = 1, \ldots, n-1). \tag{3.7}$$

Die Beindarstellung von $\nabla_\nu T^\alpha$ sei:

$$\nabla_\nu T^\alpha = t_{\varrho\sigma} \underset{(\varrho)}{e^\alpha} \underset{(\sigma)}{e_\nu}\ ^{5)}, \tag{3.8}$$

wo die Größen $t_{\varrho\sigma}$ skalare Funktionen bedeuten.

Eine Kontraktion von (3. 8) mit $\underset{(i)}{e^\nu}$ gibt wegen der Formeln (3. 4) und (3. 7):

$$t_{\varrho i} \underset{(\varrho)}{e^\alpha} = 0. \tag{3.9}$$

Nach der Bezeichnung

$$t^\alpha \overset{\text{def}}{=} t_{\varrho n} \underset{(\varrho)}{e^\alpha}$$

bekommt man aus (3. 8) wegen (3. 9)

$$\nabla_\nu T^\alpha = t^\alpha \underset{(n)}{e_\nu};$$

diese Formel ist aber wegen der Formel (3. 5) eben mit (3. 3) identisch, w. z. b. w.

Bemerkung. Die Formel (3. 3) zeigt, daß der Satz 4 nicht umkehrbar ist, widrigenfalls müsste nämlich $t^\alpha = T^\alpha$ bestehen. Sind aber $T^\alpha$, $k_\nu = \partial_\nu k$ und $t^\alpha \neq T^\alpha$ vorgegeben, so können aus den $n^2$ Gleichungen (3. 3) solche Übertragungsparameter $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ bestimmt werden, für die die Relation (3. 3) mit $t^\alpha \neq T^\alpha$ gilt.

## § 4. Konstruktion der Übertragungsparameter

In diesem Paragraphen wollen wir unser zweites Problem untersuchen. $T_{\alpha\beta}(x)$ sei ein in $\alpha, \beta$ symmetrisches Tensorfeld zweiter Stufe,

*es sollen solche in $\alpha, \gamma$ symmetrische Übertragungsparameter $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ konstruiert werden, daß $T_{\alpha\beta}$ bezüglich $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ eine rekurrente kovariante Ableitung habe.*

Bezüglich des Tensors $T_{\alpha\beta}$ nehmen wir noch an, daß

$$\text{Det.}\,(T_{\alpha\beta}) \neq 0 \tag{4.1}$$

---

[5]) Auf die Indizes $\varrho, \sigma$ soll selbstverständlich summiert werden.

ist, und das Vektorfeld $k_\nu$ in der Formel

$$\nabla_\nu T_{\alpha\beta} = k_\nu T_{\alpha\beta} \tag{4. 2}$$

sei vorgegeben.

Aus (4. 2) bekommt man für $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ das Gleichungssystem:

$$\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\nu} T_{\sigma\beta} + \Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\nu} T_{\alpha\sigma} = \partial_\nu T_{\alpha\beta} - k_\nu T_{\alpha\beta}. \tag{4. 3}$$

Durch zyklische Permutation der Indizes $\alpha, \beta, \gamma$ bekommt man zwei weitere Gleichungen. Addiert man die ersten beide, und subtrahiert man die letzte, so wird in Hinblick auf die Symmetrie von $\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta}$ und $T_{\alpha\beta}$ in $\alpha, \beta$:

$$\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\nu} T_{\sigma\beta} = \tfrac{1}{2}(\partial_\nu T_{\alpha\beta} + \partial_\alpha T_{\beta\nu} - \partial_\beta T_{\nu\alpha}) - \tfrac{1}{2}(k_\nu T_{\alpha\beta} + k_\alpha T_{\beta\nu} - k_\beta T_{\nu\alpha}). \tag{4. 4}$$

Das Gleichungssystem

$$T_{\sigma\beta} T^{\gamma\beta} = \delta_\sigma^\gamma \tag{4. 5}$$

ist wegen (4. 1) bezüglich $T^{\gamma\beta}$ eindeutig auflösbar. Aus der Gleichung (4. 4) bekommt man somit nach einer Überschiebung mit $T^{\beta\gamma}$:

$$\Gamma_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\nu} = \tfrac{1}{2} T^{\varrho\gamma}(\partial_\nu T_{\alpha\varrho} + \partial_\alpha T_{\varrho\nu} - \partial_\varrho T_{\nu\alpha}) - \tfrac{1}{2}(k_\nu \delta_\alpha^\gamma + k_\alpha \delta_\nu^\gamma - k_\varrho T^{\varrho\gamma} T_{\nu\alpha}). \tag{4. 6}$$

*Die Formel (4. 6) bestimmt diejenigen affinen Übertragungsparameter, die eine solc*

$$\Gamma_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\nu} = \tfrac{1}{2} T^{\varrho\gamma}(\partial_\nu T_{\alpha\varrho} + \partial_\alpha T_{\varrho\nu} - \partial_\varrho T_{\nu\alpha}) - \tfrac{1}{2}(k_\nu \delta_\alpha^\gamma + k_\alpha \delta_\nu^\gamma - k_\varrho T^{\varrho\gamma} T_{\nu\alpha}). \tag{4. 6}$$

*Die Formel* (4. 6) *bestimmt diejenigen affinen Übertragungsparameter, die eine*

*es sollen solche in $\alpha, \gamma$ symmetrische Übertragungsparameter $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ bestimmt werden, daß der symmetrische Tensor $T^{\alpha\beta}$ bezüglich $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ eine rekurrente kovariante Ableitung habe.*

Es wird sich zeigen, daß die durch (4. 6) bestimmten symmetrischen affinen Übertragungsparameter auch im kontravarianten Fall für $T^{\alpha\beta}$ rekurrente kovariante Ableitung bestimmen. Es soll also

$$\nabla_\nu T^{\alpha\beta} = k_\nu^* T^{\alpha\beta} \tag{4. 7}$$

bestehen, wo $k_\nu^*$ ein kovariantes Vektorfeld bedeutet. Wir nehmen an, daß

$$\operatorname{Det}(T^{\alpha\beta}) \neq 0$$

besteht; somit werden durch die Gleichung (4. 5) die $T_{\alpha\beta}$ eindeutig bestimmt. Bilden wir jetzt die Übertragungsparameter mit Hilfe von $T_{\alpha\beta}$ und $T^{\alpha\beta}$ durch die Formel (4. 6), so wird für $T_{\alpha\beta}$ (4. 2) bestehen, d. h. $T_{\alpha\beta}$ wird ein Tensor von rekurrenter kovarianter Ableitung sein.

Differenzieren wir jetzt beide Seiten der Gleichung (4. 5) kovariant nach $x^\nu$, so wird nach einer Überschiebung mit $T^{\alpha\sigma}$ in Hinsicht auf (4. 5):

$$\nabla_\nu T^{\gamma\alpha} = -T^{\gamma\beta} T^{\alpha\sigma} \nabla_\nu T_{\sigma\beta}.$$

Beachten wir jetzt, daß für $T_{\alpha\beta}$ die Relation (4. 2) gültig ist, so bekommt man aus unserer letzten Formel:

$$\nabla_\nu T^{\gamma\alpha} = -k_\nu T^{\gamma\alpha}. \tag{4.8}$$

Mit der Bezeichnung $k_\nu^* \overset{\text{def}}{=} -k_\nu$ geht die letzte Formel eben in (4. 7) über.

Wir haben damit die Gültigkeit des folgenden Satzes gezeigt:

**Satz 6.** *Die Formel* (4. 6) *bestimmt solche affine Übertragungsparameter, daß bezüglich dieser Übertragungsparameter sowohl* $T_{\alpha\beta}$, *wie auch* $T^{\alpha\beta}$ *Tensoren von rekurrenter kovarianter Ableitung von der Form* (4. 2) *bzw.* (4. 8) *sind, falls* (4. 1) *und* (4. 5) *bestehen.*

## § 5. Geometrische Interpretationen bezüglich der konformen und projektiven Veränderung der $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$

Ist $g_{\alpha\beta}$ der metrische Grundtensor eines Riemannschen Raumes und $\left\{{}_\alpha{}^\beta{}_\gamma\right\}$ das zu $g_{\alpha\beta}$ gehörige Christoffelsche Symbol, so ist nach einer konformen Veränderung $\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{2\sigma} g_{\alpha\beta}$ durch

$$\widetilde{\left\{{}_\alpha{}^\beta{}_\gamma\right\}} \overset{\text{def}}{=} \left\{{}_\alpha{}^\beta{}_\gamma\right\} + \sigma_\gamma \delta_\alpha^\beta + \sigma_\alpha \delta_\gamma^\beta - \sigma_\varrho g^{\varrho\beta} g_{\alpha\gamma}, \qquad \sigma_\alpha \overset{\text{def}}{=} \partial_\alpha \sigma \tag{5.1}$$

das zu $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ gehörige Christoffelsche Symbol bestimmt. (Vgl. [3] (2. 6) und (2. 3a)).

Vergleichen wir die Formeln (4. 6) und (5. 1), so sieht man, daß beide denselben Charakter haben. Setzen wir nämlich in (4. 6):

$$T_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}, \quad k_\nu = -2\sigma_\nu, \quad \Gamma_\alpha{}^\gamma{}_\nu = \widetilde{\left\{{}_\alpha{}^\gamma{}_\nu\right\}},$$

so geht die Formel (4. 6) eben in (5. 1) über. Daraus folgt der folgende

**Satz 6.** *Die konforme Verändureng der Christoffelschen Symbole bestimmt solche Übertragungsparameter, in Bezug auf welche der ursprüngliche metrische Grundtensor eine rekurrente kovariante Ableitung hat.*

Wir wollen jetzt die projektive Veränderung

$$\hat{\Gamma}_\alpha{}^\beta{}_\gamma \overset{\text{def}}{=} \Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma + \delta_\alpha^\beta \psi_\gamma + \delta_\gamma^\beta \psi_\alpha \tag{5.2}$$

bezüglich eines Vektors von rekurrenter kovarianter Ableitung untersuchen. Wir bezeichnen die mit $\hat{\Gamma}_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ gebildete kovariante Ableitung mit $\hat{\nabla}_\nu$. Es entsteht das Problem: Kann die Relation

$$\text{(a)}\quad \hat{\nabla}_\nu T^\alpha \overset{\text{def}}{=} \partial_\nu T^\alpha + \hat{\Gamma}_\varrho{}^\alpha{}_\nu T^\varrho, \quad \text{(b)}\quad \hat{\nabla}_\nu T^\alpha = 0 \tag{5.3}$$

bestehen, falls für den Vektor $T^\alpha$ die Relation (2. 1) besteht? Die Antwort gibt der folgende

**Satz 7.** *Ist* $T^\alpha$ *ein Vektorfeld welches bezüglich der durch* $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ *bestimmten kovarianten Ableitung von rekurrenter kovarianter Ableitung ist, so ist für das Bestehen der Relation* (5. 3) *notwendig und hinreichend, daß* $k_\varrho T^\varrho = 0$ *gültig sei, wo* $k_\varrho$ *den in* (2. 1) *vorkommenden Vektor bedeutet. Es wird dann* $\psi_\nu = -k_\nu$ *sein.*

Beweis. Erstens zeigen wir, daß die Bedingungen hinreichend sind. Nach (5. 2) bekommt man aus (5. 3) (a):

$$\hat{\nabla}_\nu T^\alpha = \nabla_\nu T^\alpha + T^\alpha \psi_\nu + \delta^\alpha_\nu \psi_\varrho T^\varrho. \tag{5. 4}$$

Beachten wir jetzt die Bedingungen

$$\psi_\varrho = -k_\varrho, \quad k_\varrho T^\varrho = 0,$$

so wird die Formel (5. 4) in Hinsicht auf (2. 1) in die Formel (5. 3) (b) übergehen. Die Bedingungen sind also hinreichend.

Nehmen wir jetzt an, daß neben (2. 1) auch die Gleichung (5. 3) (b) gültig ist. Wegen (2. 1) und (5. 2) reduziert sich (5. 3) (b) auf

$$k_\nu T^\alpha + (\delta^\alpha_\varrho \psi_\nu + \delta^\alpha_\nu \psi_\varrho) T^\varrho = 0. \tag{5. 5}$$

Eine Überschiebung dieser Gleichung mit $\psi_\alpha$ gibt:

$$(k_\nu + 2\psi_\nu)\psi_\varrho T^\varrho = 0.$$

Es ist also entweder 1) $\psi_\varrho T^\varrho = 0$, oder 2) $\psi_\nu = -\frac{1}{2} k_\nu$.

Im Falle 1) ist nach (5. 5)

$$(k_\nu + \psi_\nu) T^\alpha = 0,$$

woraus wegen $T_\alpha \not\equiv 0$ die Relation $\psi_\nu = -k_\nu$ folgt. Das beweist eben den Satz.

Wir zeigen, daß 2) nicht möglich ist. Wäre nämlich $\psi_\nu = -\frac{1}{2} k_\nu$, so würde nach (5. 5) und nach Multiplikation duch 2:

$$k_\nu T^\alpha - \delta^\alpha_\nu k_\varrho T^\varrho = 0 \tag{5. 6}$$

bestehen. Eine Verjüngung bezüglich $\alpha, \nu$ ergibt

$$(1-n) k_\varrho T^\varrho = 0,$$

d. h. die Gleichung (5. 6) geht in

$$k_\nu T^\alpha = 0$$

über, was nicht möglich ist. Damit haben wir den Beweis von Satz 7 vollständig beendet.

## § 6. Der Fall $k_\nu = \mathrm{Grad}_\nu k$

Wir werden in diesem Paragraphen diejenigen Tensoren untersuchen, für die die Relation (1. 1) gilt, d. h. die rekurrente kovariante Ableitung haben, und für die $k_\nu = \partial_\nu k$ besteht, wo $k(x)$ ein Skalarfeld bedeutet. Im Paragraphen 3 haben wir schon gezeigt, daß eben dieser Fall wichtige geometrische Bedeutung hat, aber außer unseren geometrischen Interpretationen spielt die rekurrente kovariante Ableitung in einem Teilgebiet der Theorie der Riemannschen Räume, nämlich in der Theorie der Räume von rekurrenter Krümmung auch eine wichtige Rolle. In diesen

Räumen gilt für den Krümmungstensor $R_{\iota\varkappa\lambda\mu}$ die Relation

$$\nabla_\nu R_{\iota\varkappa\lambda\mu} = k_\nu R_{\iota\varkappa\lambda\mu},$$

und $k_\nu$ ist immer ein Gradientvektor (vgl. [4] und [6]).

Wir beweisen erstens den folgenden

**Satz 8.** *Stimmen für einen Tensor die Zahlen der ko- und der kontravarianten Indizes überein, und hat dieser Tensor rekurrente kovariante Ableitung, so kann das Vektorfeld, welches in der Formel der kovarianten Ableitung vorkommt, nur ein Gradientvektorfeld sein.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß falls in der Formel (1. 1) $j=k$ ist, dann besteht:

$$k_\nu(x) = \partial_\nu k(x), \qquad k(x): \textit{Skalar}. \tag{6. 1}$$

Ist aber $j=k$, so bekommt man aus der Formel (1. 1) nach $k$-maliger Verjüngung:

$$\nabla_\nu T = k_\nu T, \quad T \overset{\text{def}}{=} T^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}, \tag{6. 2}$$

wo $T$ ein Skalarfeld bedeutet. Für ein Skalarfeld ist aber die kovariante Ableitung mit der partiellen Ableitung identisch, somit geht die Formel (6. 2) in

$$k_\nu = \partial_\nu \log |T|$$

über, was die Behauptung des Satzes beweist.

Im folgenden nehmen wir an, daß in der Formel (1. 1) $j \neq k$ ist. In diesem Falle kann durch Verjüngung immer erreicht werden, daß in (1. 1) statt des Tensors $T^{\alpha_1\ldots\alpha_j}_{\beta_1\ldots\beta_k}$ ein rein kontra-, oder ein rein kovarianter Tensor steht. Z. B. wenn $j<k$ ist, so folgt aus der Formel (1. 1)

$$\nabla_\nu t_{\gamma_1\ldots\gamma_l} = k_\nu t_{\gamma_1\ldots\gamma_l}, \tag{6. 3}$$

wo

$$t_{\gamma_1\ldots\gamma_l} \overset{\text{def}}{=} T^{\alpha_1\ldots\alpha_j}_{\alpha_1\ldots\alpha_j\gamma_1\ldots\gamma_l}, \qquad (l=k-j).$$

Der folgende Satz ist gültig:

**Satz 9.** *Ist in der Formel* (6. 3) $l=pr$, *und existiert ferner ein Tensor* $v^{\alpha_1\ldots\alpha_p}$, *der der Relation*

$$\nabla_\nu v^{\alpha_1\ldots\alpha_p} = 0 \tag{6. 4}$$

*genügt, so ist in der Formel* (6. 3) $k_\nu$ *ein Gradientvektor.*

Beweis. Es ist

$$t \overset{\text{def}}{=} t_{\gamma_1\ldots\gamma_p\gamma_{p+1}\ldots\gamma_{2p}\ldots\gamma_{(r-1)p+1}\ldots\gamma_{rp}} v^{\gamma_1\ldots\gamma_p} v^{\gamma_{p+1}\ldots\gamma_{2p}} \ldots v^{\gamma_{(r-1)p+1}\ldots\gamma_{rp}}$$

ein Skalar. Eine Kontraktion von (6. 3) mit

$$v^{\gamma_1\ldots\gamma_p} v^{\gamma_{p+1}\ldots\gamma_{2p}} \ldots v^{\gamma_{(r-1)p+1}\ldots\gamma_{rp}}$$

gibt wegen der Bedingung (6. 4) die Gleichung

$$\nabla_\nu t = k_\nu t.$$

Dividieren wir diese Gleichung mit $t$, und beachten wir, daß für einen Skalar $\nabla_\nu t = \partial_\nu t$ ist, so wird

$$k_\nu = \partial_\nu \log |t|,$$

und das beweist den Satz.

Dieser Satz ist die Verallgemeinerung eines bekannten Satzes der Riemannschen Räume von rekurrenter Krümmung. Im Riemannschen Fall besteht — wie das schon bemerkt wurde — für den Krümmungstensor die Relation:

$$\nabla_\nu R_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta} = k_\nu R_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta},$$

falls der Raum von rekurrenter Krümmung ist.

Setzen wir $\delta=\beta$, so wird nach Summation auf $\beta$

$$\nabla_\nu R_{\alpha\gamma} = k_\nu R_{\alpha\gamma}, \quad R_{\alpha\gamma} \overset{\text{def}}{=} R_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\beta}$$

und das ist eben das Analogon der Gleichung (6. 3). Der Tensor, der der Bedingungsgleichung (6. 4) genügt, ist jetzt der metrische Fundamentaltensor $g^{\alpha\gamma}$ (vgl. [6]).

Am Ende geben wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß in der Formel (1. 1) das Vektorfeld $k_\nu$ ein Gradientvektorfeld sei.

**Satz 10.** *Ist für das Vektorfeld $T^{\alpha_1\ldots\alpha_j}_{\beta_1\ldots\beta_k}$ die Relation* (1. 1) *gültig, so ist die Relation*

$$\text{(6. 5)} \qquad \sum_{i=1}^{k} R_{\beta_i}{}^{\varrho}{}_{\mu\nu} T^{\alpha_1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\alpha_j}_{\beta_1\ldots\beta_{i-1}\varrho\beta_{i+1}\ldots\beta_k} = \sum_{i=1}^{j} R_{\varrho}{}^{\alpha_i}{}_{\mu\nu} T^{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}\varrho\alpha_{i+1}\ldots\alpha_j}_{\beta_1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\beta_k}$$

*notwendig und hinreichend dafür, daß in* (1. 1) *$k_\nu$ ein Gradientvektor sei. Der Tensor $R_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta}$ in der Bedingungsgleichung* (6. 5) *ist der zu $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ gehörige Krümmungstensor.*

Beweis. Auf Grund der Formel (2. 2) werden die Integrabilitätsbedingungen der Gleichung (1. 1):

$$\text{(6. 6)} \quad \nabla_{[\nu}k_{\mu]} T^{\alpha_1\ldots\alpha_j}_{\beta_1\ldots\beta_k} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} R_{\beta_i}{}^{\varrho}{}_{\mu\nu} T^{\alpha_1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\alpha_j}_{\beta_1\ldots\beta_{i-1}\varrho\beta_{i+1}\ldots\beta_k} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{j} R_{\varrho}{}^{\alpha_i}{}_{\mu\nu} T^{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}\varrho\alpha_{i+1}\ldots\alpha_j}_{\beta_1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\beta_k} = 0.$$

Ist $k_\nu$ ein Gradientvektor, so geht (6. 6) eben in (6. 5) über, da $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ in $\alpha$, $\gamma$ symmetrisch vorausgesetzt wurde. Die Bedingung (6. 5) ist also notwendig.

Nehmen wir nun an, daß die Relation (6. 5) besteht. Die Integrabilitätsbedingungen (6. 6) von (1. 1) reduzieren sich in diesem Falle auf

$$\nabla_{[\nu}k_{\mu]} T^{\alpha_1\ldots\alpha_j}_{\beta_1\ldots\beta_k} = 0.$$

Da $T^{\alpha_1\ldots\alpha_j}_{\beta_1\ldots\beta_k}$ nicht ein Nulltensor sein kann, muß

$$\nabla_{[\nu}k_{\mu]} = 0$$

bestehen, woraus

$$\partial_{[\nu}k_{\mu]} = 0$$

folgt. Das beweist aber, daß $k_\nu$ ein Gradientvektorfeld ist.

## Literatur

[1] J. Aczél und S. Gołąb, Funktionalgleichungen der Theorie der Geometrischen Objekte, *(Polska Akad. Nauk. Monografie Mat.* **39**), *Warszawa,* 1960.
[2] L. P. Eisenhart, Non-Riemannian Geometry, *(Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* VIII) *New York,* 1927.
[3] A. Moór, Über die konform-kovariante Ableitung der Vektoren, *Publ. Math. Debrecen* **8** (1961), 117–127.
[4] H. S. Ruse, A classification of $K^*$-spaces, *Proc. London Math. Soc.* (2), **53** (1951), 212–229.
[5] O. Veblen and J. M. Thomas, Projective invariants of affine geometry of paths, *Annals of Math.* (2), **27** (1926), 279–296.
[6] A. G. Walker, On Ruse's spaces of recurrent curvature, *Proc. London. Math. Soc.* (2), **52** (1951), 36–64.

*(Eingegangen am 15. Dezember 1961.)*