Bemerkungen zu Säzten von K. Tandori

Von LÁSZLÓ LEINDLER (Szeged)

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Intervall (a, b) orthonormiertes Funktionensystem und $\{a_n\}$ eine Koeffizientenfolge mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$. K. TANDORI hat die folgenden Sätze bewiesen:

Satz A[1]). *Es sei $N(\geqq 1)$ eine beliebig angegebene natürliche Zahl. Mit $\{\mu_k\}$ wird die (wachsend angeordnete) Folge derjenigen natürlichen Zahlen bezeichnet, die in der Form $2^{\nu_1} \pm 2^{\nu_2} \pm \ldots \pm 2^{\nu_r}$ mit ganzzahligen Exponenten $\nu_1 > \ldots > \nu_r \geqq 0$ $(1 \leqq r \leqq N)$ geschrieben werden können. Sind die Bedingungen*

$$c_n \geqq c_{n+1} (>0) \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$$

und

$$a_n^2 = O(c_n^2)$$

erfüllt, und ist die Orthogonalreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

fast überall $(C, 1)$-summierbar, so konvergiert die Folge $\{s_{\mu_k}(x)\}$ fast überall, wobei $s_n(x)$ die n-te Partialsumme der Reihe (1) bezeichnet.

Satz B[2]). *Gibt es eine Indexfolge $\{n_k\} (n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots)$, für die*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min \{c_{n_k} \sqrt{n_{k+1} - n_k},\ c_{n_k}^2 (n_{k+1} - n_k) \log^2 k\} < \infty$$

mit einer positiven, monoton nichtwachsenden Koeffizientenfolge $\{c_n\}$ gilt, so ist die Orthogonalreihe (1) im Falle $a_n^2 = O(c_n^2)$ fast überall $(C, 1)$-summierbar.

---

1) K. TANDORI, Bemerkung zu einem Satz von A. N. KOLMOGOROFF, *Acta Sci. Math. Szeged* **22** (1961), 133–135.

2) K. TANDORI, Ein Summationssatz für Orthogonalreihen mit monotoner Koeffizientenfolge, *Acta Sci. Math. Szeged* **21** (1960), 15–18.

In dieser Note werden wir diese Sätze verallgemeinern. Diese Verallgemeinerungen lauten folgendermaßen

Satz I. *Gibt es eine Indexfolge* $\{m_k\}(m_1<m_2<\ldots<m_k<\ldots)$ *und eine positive Koeffizientenfolge* $\{c_k\}$, *für die*

$$a_n^2=O(c_k) \quad \textit{für} \quad n=m_k+1,\ldots,m_{k+1} \tag{2}$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(m_{k+1}-m_k)<\infty \tag{3}$$

bestehen, so gilt für beliebige Indexfolgen $\{v_l(k)\}$ *und* $\{p_k\}$, *für die*

$$\sum_{l=1}^{p_k} v_l(k)=O(m_{k+1}-m_k) \tag{4}$$

erfüllt sind, daß für jede l $(l\leqq p_k)$ *mit* $k\to\infty$

$$s_{m_k}(x)-s_{m_k+v_l(k)}(x)\to 0 \tag{5}$$

und

$$s_{m_{k+1}}(x)-s_{m_{k+1}-v_l(k)}(x)\to 0 \tag{6}$$

sind.

Aus diesem Satz ergibt sich der folgende

Satz II. *Gibt es eine fast überall konvergente Partialsummenfolge* $\{s_{m_k}(x)\}$ *der Orthogonalreihe* (1) *und eine positive Koeffizientenfolge* $\{c_k\}$ *mit Bedingungen* (2) *und* (3), *so ist die Reihe* (1) *fast überall* $(C, 1)$*-summierbar.*

Zur Konvergenz der Partialsummenfolge $\{s_{m_k}(x)\}$ *ist z. B. die Bedingung*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min\left\{\left(\sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} a_n^2\right)^{1/2}, \left(\sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} a_n^2\right)\log^2 k\right\}<\infty \tag{7}$$

hinreichend.

Es ist offensichtlich, daß die Bedingungen dieser Sätze schwächer als die Bedingungen der Tandorischen Sätze sind.

Beweis von Satz I. Wir setzen

$$\delta_k^2(x)=\sum_{l=1}^{p_k}\left(s_{m_k}(x)-s_{m_k+v_l(k)}(x)\right)^2 \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Auf Grund von (2) und (4) ergibt sich

$$\int_a^b \delta_k^2(x)\,dx=O(1)\sum_{l=1}^{p_k} c_k v_l(k)=O(1)\,c_k(m_{k+1}-m_k).$$

So ist nach (3)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b \delta_k^2(x)\,dx=O(1)\sum_{k=1}^{\infty} c_k(m_{k+1}-m_k)<\infty.$$

Daraus ergibt sich durch Anwendung des Satzes von B. LEVI, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^2(x)$$

fast überall konvergiert; also fast überall $\delta_k(x) \to 0$ besteht.

Wiederholen wir das Obenstehende mit

$$\bar{\delta}_k^2(x) = \sum_{l=1}^{p_k} (s_{m_{k+1}}(x) - s_{m_{k+1}-v_l(k)}(x))^2,$$

so ergibt sich fast überall $\bar{\delta}_k(x) \to 0$. Aus den naheliegenden Ungleichungen

$$|s_{m_k}(x) - s_{m_k+v_l(k)}(x)| \leqq \delta_k(x)$$

und

$$|s_{m_{k+1}}(x) - s_{m_{k+1}-v_l(k)}(x)| \leqq \bar{\delta}_k(x)$$

ergeben sich die Behauptungen (5) und (6).

Damit haben wir den Satz I bewiesen.

BEWEIS VON SATZ II. Wir wenden den Satz I mit $v_l(k) = 2^{[\log m_k]+l} - m_k$ und $p_k = [\log m_{k+1}] - [\log m_k]$ an[3]). Offenbar erfüllt sich die Bedingung (4) mit diesem Zahlen $v_l(k)$ und p_k, also gilt

$$s_{2^l}(x) - s_{m_k}(x) \to 0 \qquad (m_k < 2^l \leqq m_{k+1})$$

fast überall. Damit haben wir bewiesen, daß die Folge $\{s_{2^n}(x)\}$ fast überall konvergiert. Daraus folgt nach einem bekannten Satz von S. KACZMARZ[4]), daß die Reihe (1) fast überall $(C, 1)$-summierbar ist.

Um auch die Hinlänglichkeit der Bedingung (7) für die Konvergenz der Partialsummenfolge $\{s_{m_k}(x)\}$ zu beweisen, bezeichnen wir $i_1 < i_2 < \ldots < i_S < \ldots$ die Indizes k, für die

$$\min\left\{\left(\sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} a_n^2\right)^{1/2}, \left(\sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} a_n^2\right)\log^2 k\right\} = \left(\sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} a_n^2\right)^{1/2}$$

ist, und $j_1 < j_2 < \ldots < j_r < \ldots$ die übrigen Indizes. Auf Grund von (7) ist

$$\sum_{s=1}^{\infty} \int_a^b |s_{m_{i_s+1}}(x) - s_{m_{i_s}}(x)|\,dx \leqq \sqrt{b-a} \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{\int_a^b (s_{m_{i_s+1}}(x) - s_{m_{i_s}}(x))^2 dx} =$$

$$= \sqrt{b-a} \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{\sum_{n=m_{i_s}+1}^{m_{i_s+1}} a_n^2} < \infty,$$

---

[3]) In dieser Note wird der Logarithmus mit der Basis 2 verwendet, weiterhin bezeichnet $[\alpha]$ den ganzen Teil von α.

[4]) S. KACZMARZ, Über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Ann.* **96** (1927), 148–151.

daraus folgt mit Anwendung des Satzes von B. LEVI, daß die Reihe

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left(s_{m_{i_s+1}}(x)-s_{m_{i_s}}(x)\right) \tag{8}$$

fast überall konvergiert. Wir setzen

$$b_k=\begin{cases}(a^2_{m_k+1}+\dots+a^2_{m_{k+1}})^{1/2} & \text{für}\quad k=j_r\ (r=1,2,\dots),\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

und

$$\Phi_k(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b_k}\displaystyle\sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}}a_n\varphi_n(x) & \text{für}\quad b_k\neq 0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{m_{k+1}-m_k}}\displaystyle\sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}}\varphi_n(x) & \text{für}\quad b_k=0,\end{cases}\qquad (k=1,2,\dots).$$

Offenbar ist das System $\{\Phi_k(x)\}$ orthonormiert und die Koeffizientenfolge $\{b_k\}$ erfüllt nach (7) die Bedingung des Satzes von D. MENCHOFF und H. RADEMACHER[5]); so folgt, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k\Phi_k(x),$$

d. h. die Reihe

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(s_{m_{j_r+1}}(x)-s_{m_{j_r}}(x)\right) \tag{9}$$

fast überall konvergiert. Durch Addition von (8) und (9) ergibt sich, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(s_{m_{k+1}}(x)-s_{m_k}(x)\right)$$

und folglich die Folge $\{s_{m_k}(x)\}$ fast überall konvergiert.

Damit haben wir den Satz II vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 15. Januar 1962.)

---

[5]) D. MENCHOFF, Sur les séries de fonctions orthogonales (Premiere partie), *Fundamenta Math.*, **4** (1923), 82–105; H. RADEMACHER, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Ann.*, **87**, (1922), 112–138.