

## Über die Konstruktion überall stetiger, nirgends differenzierbarer Funktionen I

Von S. KÁNTOR (Debrecen)

### § 1. Einleitung

In der Theorie der reellen Funktionen wurden auch noch in der letzten Zeit mehrere reelle Funktionen konstruiert<sup>1)</sup>, die überall stetig und nirgends differenzierbar sind. Bei jeder der so konstruierten Funktionen  $f(x)$  ergibt sich, daß der Unterschied  $\theta_f(x)$  zwischen der größten und der kleinsten unter den Dirichletschen Ableitungszahlen in jedem Punkte  $x$  größer als eine gegebene Zahl bleibt.

Solche Funktionen werden wir stetige und stark nicht-differenzierbare Funktionen nennen.

Wir werden in dieser Arbeit eine Konstruktion geben, wodurch jede stetige und stark nicht-differenzierbare Funktion mit passend gewählten Parametern darstellbar ist.

Wir haben den Grundgedanken aus der Untersuchung der auch historisch interessanten<sup>2)</sup> Funktion von ZOÁRD GEŐCZE gewonnen [1]. GEŐCZE konstruierte schon im Jahre 1905 eine Funktion, von der er bewies, daß sie in einem gegebenen Intervall stetig ist, wobei es jedoch keinen rektifizierbaren Teilbogen ihres graphischen Bildes gibt. Im § 2. beweisen wir, daß diese Funktion nirgends differenzierbar ist [2]. So bekommt die Funktion von GEŐCZE unter den überall stetigen und nirgends differenzierbaren Funktionen einen vornehmen Platz, denn sie kommt in Hinsicht auf Einfachheit jeder verwandten Konstruktion gleich und indem GEŐCZE mit allgemeinen Parametern arbeitet, hebt er das wesentliche hervor und gibt auch ein einfaches Beispiel für eine nicht-rektifizierbare Kurve.

Die hier behandelte Klasse der stetigen und stark nicht-differenzierbaren Funktionen ist enger, als die Klasse der stetigen und nicht-differenzierbaren Funktionen. Ich möchte mich mit den Problemen der letzteren Klasse und mit der Konstruktion der betreffenden Funktionen in dem zweiten Teil dieser Abhandlung beschäftigen.

Wir wollen die Funktionen — ohne Beschränkung der Allgemeinheit — in dem Intervall<sup>3)</sup>  $[0, 1]$  definieren.

<sup>1)</sup> S. die Literatur von [3].

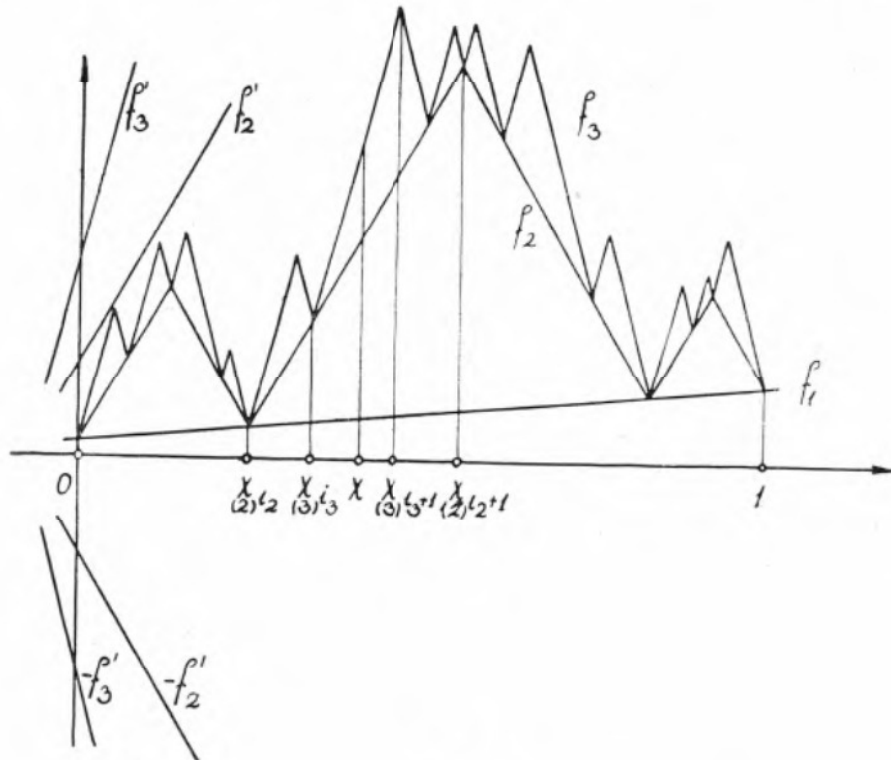
<sup>2)</sup> Auf diese Funktion hat mich Herr DR. B. SZÉNÁSSY aufmerksam gemacht, wofür ich ihm meinen herzlichen Dank aussprechen möchte.

<sup>3)</sup> Die offenen und die abgeschlossenen Intervalle werden — wie gewöhnlich — mit runden, bzw. mit eckigen Klammern bezeichnet.

## § 2. Über die Funktion von Geöcze

GEÖCZE definierte seine Funktion folgenderweise:<sup>4)</sup> (Figur 1).

„Es sei  $z=f_1$  linear und mit  $x$  monoton wachsend, und in  $[0, 1]$  sei ihre Länge  $G$ .  $z=f_2$  besitze dieselben Eigenschaften, sie soll aber die Länge  $2G$  haben. Ist  $\delta$  gegeben, so sieht man leicht ein, daß es eine solche Funktion  $z=f_2$  gibt, deren geometrisches Bild ein aus einer geraden Anzahl von Strecken bestehender Linienzug ist, dessen gerade Strecken abwechselnd mit den Geraden  $z=f_2$  und  $z=-f_2$



Figur 1

parallel laufen und jede zweite Bruchstelle des Polygonzuges (von  $x=0$  bis  $x=1$ ) auf der Geraden  $f_1$  liegt.

Die Abszissen der Bruchstellen seien

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{2r} = 1.$$

Dabei kann  $0 \leq f_2 - f_1 < \delta$  sein, wenn nur  $r$  genügend groß und  $[x_i, x_{i+1}]$  genügend klein ist. Ebenso wie  $f_2$  zu  $f_1$  in  $[0, 1]$ , gibt es zu  $f_2$  in jedem  $[x_i, x_{i+1}]$  ein  $f_3$ , dessen gerade Strecken mit der steigenden, bzw. sinkenden, in  $[0, 1]$   $4G$  langen Geraden  $z=f_3$ ,  $z=-f_3$  parallel laufen, wobei im ganzen Intervall  $[0, 1]$   $0 \leq f_3 - f_2 < \frac{\delta}{2}$

<sup>4)</sup> Wir zitieren – abgesehen von unwesentlichen Änderungen – den Originaltext von GEÖCZE in deutscher Übersetzung. Vgl. [1] und [5].

gilt. Man bildet ähnlicherweise  $f_4$ , usw.

$$f = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i."$$

Die Funktion  $f(x)$  ist stetig und die Länge der von ihr definierten Kurve ist in jedem noch so kleinen Intervall unendlich.

Wir wollen die Beweise wegen ihrer Einfachheit und der Vollständigkeit halber mitteilen.

Offensichtlich ist für jedes  $i$  die Funktion  $f_i(x)$  stetig und aus den Bedingungen

$$(1) \quad 0 \leq f_{i+1}(x) - f_i(x) < \frac{\delta}{2^{i-1}}$$

folgt, daß die Folge  $f_i(x)$  gleichmäßig konvergiert und so  $f(x)$  stetig ist.

Das Bild von  $f_i(x)$  besteht aus Geradenstücken, die entweder mit der Geraden  $y = f'_i(x)$ , oder mit  $y = -f'_i(x)$  parallel sind. Die Länge dieser Strecken und so die Länge des Bildes von  $f_i(x)$  beträgt in jedem Teilintervall  $[u, v]$  des Intervalles  $[0, 1]$   $(v - u) 2^{i-1} G$ .

Das Bild von  $f(x)$  ist also in keinem einzigen Intervall  $[u, v]$  rektifizierbar, weil die Länge eines eingeschriebenen Polygons des Bildes von  $f_i(x)$  für genügend große  $i$  größer als jede konstante Zahl ausfällt.

Die Tatsache, daß eine gewisse Funktion nicht differenzierbar ist, werden wir in dieser Arbeit immer mit Hilfe des folgenden, im Wesentlichen, wenn auch nicht in dieser Form, bekannten<sup>5)</sup> Lemma beweisen:

**Lemma.** Die Funktion  $f(x)$  ist in dem Punkt  $x_0$  nicht differenzierbar, wenn es eine Zahl  $\varepsilon > 0$  gibt, so daß zu jeder beliebigen Zahl  $\eta > 0$  die Zahlen  $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$  existieren, die den Bedingungen

$$\alpha \leq x_0 \leq \beta, \quad \alpha' \leq x_0 \leq \beta', \quad \beta - \alpha \leq \eta, \quad \beta' - \alpha' \leq \eta,$$

$$\left| \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} - \frac{f(\alpha') - f(\beta')}{\alpha' - \beta'} \right| \geq \varepsilon$$

genügen. Dann gilt  $\vartheta_f(x_0) \geq \varepsilon$ .

Das Lemma drückt folgendes aus: wenn der Unterschied der Differenzenquotienten in einer beliebig kleinen Umgebung des Punktes  $x_0$  über eine positive Schranke bleibt, dann ist  $\vartheta_f(x_0)$  positiv.

Nun beweisen wir, daß die Funktion von GEÖCZE nicht differenzierbar ist. Es sein die Abszissen der Bruchstellen von  $y = f_i(x)$

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{s_i} = 1.$$

(i)      (i)                      (i)

Es gilt für beliebiges  $x_0 \in [0, 1]$

$$(2) \quad 0 = x_{k_1} \leq x_{k_2} \leq \dots \leq x_0 \leq \dots \leq x_{k_2+1} \leq x_{k_1+1} = 1.$$

(1)      (2)                      (2)                      (1)

Wir werden unter diesen Abszissenwerten die Zahlen  $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$  wählen. Die Rich-

<sup>5)</sup> Vgl. [4].

tungstangente der Geraden  $y = f'_i(x)$  ist  $m_i = \sqrt{(2^{i-1}G)^2 - 1}$ . Aus den Ungleichungen

$$2m_i = \sqrt{(2^i G)^2 - 4} < \sqrt{(2^i G)^2 - 1}$$

folgt

$$(3) \quad m_1 \leq m_{i-1} < m_i - m_{i-1}$$

und nach (1) bekommt man:

$$\frac{\delta}{2^{i-1}} > \left| \frac{x_{k_{i+1}} - x_{k_i}}{(i)} \right| (m_i - m_{i-1})$$

Es ist also

$$\left| \frac{x_{k_{i+1}} - x_{k_i}}{(i)} \right| < \frac{\delta}{2^{i-1} m_1},$$

das heißt

$$(4) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \left( \frac{x_{k_{i+1}} - x_{k_i}}{(i)} \right) = 0.$$

Es gibt also für jedes  $\eta > 0$  ein von  $\eta$  abhängiges  $n$ , wofür

$$(5) \quad \left| \frac{x_{k_{n+1}} - x_{k_n}}{(n)} \right| < \eta$$

besteht.

Die Zahlen

$$\alpha = \frac{x_{k_n}}{(n)}, \quad \beta = \frac{x_{k_{n+1}}}{(n)}, \quad \alpha' = \frac{x_{k_{n+1}}}{(n+1)}, \quad \beta' = \frac{x_{k_{n+1}+1}}{(n+1)}, \quad \varepsilon = m_1$$

genügen — wegen (3) und (5) — den Bedingungen des Lemmas. Also gilt der

**Satz 1.** Die Funktion von Geöcze ist überall stetig und nirgends differenzierbar.

### § 3. Konstruktion für alle steige und stark nicht-differenzierbare Funktionen

**Definitionen.** Es wird die Funktion  $f(x)$  eine *stark nicht-differenzierbare* Funktion genannt, wenn es eine Zahl  $\lambda > 0$  existiert, so daß für jedes  $x$   $\vartheta_f(x) \cong \lambda$  gilt, wo  $\vartheta_f(x)$  die Differenz der größten und kleinsten Dinischen Ableitungszahlen im Punkt  $x$  bezeichnet.

Die *Polygonfunktion* der nach wachsenden Abszissenwerten geordneten Punkte  $P_i(p_i, p'_i) (i = 1, 2, \dots, n)$  wird als

$$\Theta(x) = \frac{p'_i - p'_{i+1}}{p_i - p_{i+1}} (x - p_i) + p'_i, \quad p_i \leq x \leq p_{i+1}$$

definiert. Die Punkte  $P_i$  sind die *Eckpunkte*, die Strecken  $\overline{P_i P_{i+1}}$  heißen die Strecken der Polygonfunktion.

Ist  $t_i(x)$  eine Polygonfunktion und ist jede ihrer Eckpunkte auch ein Eckpunkt von  $t_{i+1}(x)$ , so wird die Funktion

$$t(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} t_i(x)$$

eine *Polygongrenzfunktion* genannt.

Die Funktion  $t(x)$  wird eine Polygongrenzfunktion mit den Parametern  $\lambda, \varrho_i$  genannt, wenn sie den folgenden Bedingungen genügt:

$$1^\circ \quad t(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} t_i(x) \quad \text{ist für } x \in [0, 1]$$

eine Polygongrenzfunktion;

2° es gilt

$$|t_{i+1}(x) - t_i(x)| < \varrho_i \quad (i = 1, 2, \dots),$$

und  $\sum \varrho_i$  ist konvergent;

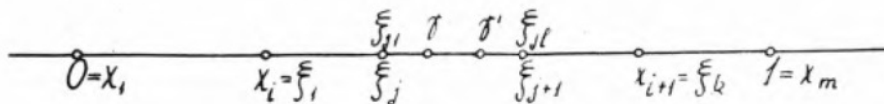
3° ist die orthogonale Projektion einer Strecke  $\overline{AB}$  von  $t_{i+1}(x)$  auf die  $x$ -Achse ein (nicht unbedingt echtes) Teilintervall der Projektion der Strecke  $\overline{A'B'}$  von  $t_i(x)$ , so fällt die Differenz der Richtungstangenten von  $\overline{AB}$  und  $\overline{A'B'}$  für jedes  $i$  nicht kleiner als  $\lambda > 0$  aus. Wir werden die Richtungstangenten der Geradenstrecken  $((u, t(u)), (v, t(v)))$  und  $UV$  mit  $\text{tg}_t(u, v)$ , bzw.  $\text{tg } UV$  bezeichnen.

Die Funktion von GEÖCZE ist ebenfalls eine Polygongrenzfunktion mit den Parametern  $\lambda = m_1, \varrho_i = \frac{\delta}{2^{i-1}}$ .

Wir könnten die Eigenschaft der Funktion von GEÖCZE, daß sämtliche Eckpunkte von  $f_{i+1}(x)$  auf dem Bilde von  $f_i(x)$  liegen, bei der allgemeinen Konstruktion nicht behalten. Es ist aber unnötig statt Polygonfunktionen kompliziertere stetige Funktionen zu verwenden,<sup>6)</sup> denn im Raum der stetiger Funktionen bilden die Polygonfunktionen eine überall dichte Menge.

**Satz 2.** Die Polygongrenzfunktion  $t(x)$  mit den Parametern  $\lambda, \varrho_i$  ist stetig und stark nicht-differenzierbar.

BEWEIS. Es ist  $t_i(x)$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) offenbar stetig und so konvergiert wegen 2° die Folge  $t_i(x)$  gleichmäßig, also ist  $t(x)$  eine stetige Funktion.



Figur 2

Wir verwenden auch für die Abszissenwerte der Eckpunkte von  $t_i(x)$  die Bezeichnungen

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{s_i} = 1.$$

So bleibt (2) für beliebiges  $x_0 \in [0, 1]$  gültig. Wegen 3° und 2° galten die Rela-

<sup>6)</sup> Vgl. [3] und [4].

tionen

$$\begin{aligned} \lambda &\cong \left| \frac{t_i \left( \begin{smallmatrix} x_{k_i+1} \\ (i) \end{smallmatrix} \right) - t_i \left( \begin{smallmatrix} x_{k_i} \\ (i) \end{smallmatrix} \right)}{x_{k_i+1} - x_{k_i}} - \frac{t_{i+1} \left( \begin{smallmatrix} x_{k_{i+1}+1} \\ (i+1) \end{smallmatrix} \right) - t_{i+1} \left( \begin{smallmatrix} x_{k_{i+1}} \\ (i+1) \end{smallmatrix} \right)}{x_{k_{i+1}+1} - x_{k_{i+1}}} \right| = \\ &= \left| \frac{t_i \left( \begin{smallmatrix} x_{k_{i+1}+1} \\ (i+1) \end{smallmatrix} \right) - t_i \left( \begin{smallmatrix} x_{k_{i+1}} \\ (i+1) \end{smallmatrix} \right)}{x_{k_{i+1}+1} - x_{k_{i+1}}} - \frac{t_{i+1} \left( \begin{smallmatrix} x_{k_{i+1}+1} \\ (i+1) \end{smallmatrix} \right) - t_{i+1} \left( \begin{smallmatrix} x_{k_{i+1}} \\ (i+1) \end{smallmatrix} \right)}{x_{k_{i+1}+1} - x_{k_{i+1}}} \right| \cong \\ &\cong \frac{\left| t_i \left( \begin{smallmatrix} x_{k_{i+1}+1} \\ (i+1) \end{smallmatrix} \right) - t_{i+1} \left( \begin{smallmatrix} x_{k_{i+1}+1} \\ (i+1) \end{smallmatrix} \right) \right| + \left| t_i \left( \begin{smallmatrix} x_{k_{i+1}} \\ (i+1) \end{smallmatrix} \right) - t_{i+1} \left( \begin{smallmatrix} x_{k_{i+1}} \\ (i+1) \end{smallmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{smallmatrix} x_{k_{i+1}+1} \\ (i+1) \end{smallmatrix} \right| - \left| \begin{smallmatrix} x_{k_{i+1}} \\ (i+1) \end{smallmatrix} \right|}} \cong \frac{2q_i}{\left| \begin{smallmatrix} x_{k_{i+1}+1} \\ (i+1) \end{smallmatrix} \right| - \left| \begin{smallmatrix} x_{k_{i+1}} \\ (i+1) \end{smallmatrix} \right|}}. \end{aligned}$$

Also besteht auch (4) und so genügen die Werte

$$\alpha = x_{k_n}, \quad \beta = x_{k_{n+1}}, \quad \alpha' = x_{k_{n+1}}, \quad \beta' = x_{k_{n+1}+1}, \quad \lambda = \varepsilon$$

offensichtlich den Bedingungen des Lemmas, d. h.  $t(x)$  ist eine stark nicht-differenzierbare Funktion.

Auf grund des folgenden Satzes werden wir mit der Konstruktion von  $t(x)$  die Klasse der stetigen und Stark nicht-differenzierbaren Funktionen charakterisieren.

**Satz 3.** *Ist  $t(x)$  eine stetige und stark nicht-differenzierbare Funktion und  $\Sigma q_i$  eine beliebige konvergente Reihe mit positiven Gliedern, so ist  $t(x)$  eine Poliongrenzfunktion mit den Parametern  $\lambda = \frac{\inf \vartheta_i(x)}{10}, q_i$ .*

Es bezeichne  $H$  die Menge der Punkte  $x$ , in denen die Differenz der Dinischen linksseitigen Ableitungszahlen, sowie diejenige der rechtsseitigen, nicht kleiner als  $10\lambda$  ist. Es gilt also

$$x \in H, \text{ wenn } D_t^-(x) - d_t^-(x) \cong 10\lambda \text{ und } D_t^+(x) - d_t^+(x) \cong 10\lambda$$

ist (0 und 1 werden zu  $H$  gerechnet).

Es folgt jetzt aus dem Satz von DENJOY – YOUNG – SAKS, daß fast alle Punkte des Intervalls  $[0, 1]$  in  $H$  liegen, also ist  $H$  überall dicht in  $[0, 1]$ . Wir werden die Abszissenwerte der Eckpunkte der in der Konstruktion auftretenden Polygonfunktionen aus  $H$  wählen.

Die Eigenschaft 2° wird dadurch gesichert, daß bei der Konstruktion von  $t_i(x)$  die Bedingung  $|t(x) - t_i(x)| < q_i$  befriedigt wird, damit wird nämlich auch die Ungleichung  $|t_i(x) - t_{i+1}(x)| < q_i$  bestehen, wenn nur die Eckpunkte von  $t_{i+1}(x)$  auf dem Bild von  $t(x)$  gewählt werden.

Das Erfülltsein der Eigenschaft 3° werden wir so erreichen, daß wir solche Sehnen auf dem Bild von  $t(x)$  nehmen, denen Projektionen auf die  $x$ -Achse das Intervall  $[0, 1]$  bedecken und deren Richtungstangenten von den Richtungstangenten der Strecken von  $t_{i-1}(x)$  mindestens um  $3\lambda$  abweichen. Daraus wird durch Anwendung eines Hilfssatzes folgen, dass  $t_i(x)$  mit der Eigenschaft 3° existiert.

Es sei  $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1$  eine solche Teilmenge von  $H$ , dass die Differenz des Maximums und des Minimums von  $t(x)$  in  $[x_i, x_{i+1}]$  ( $i = 1, 2, \dots, m-1$ ) kleiner als  $\varrho_1$  ist. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $t(x)$  existieren solche Werte  $x_i$ . Die Polygonfunktion der Punkte  $(x_i, t(x_i))$  ist  $t_1(x)$ . Offensichtlich gilt  $|t(x) - t_1(x)| < \varrho_1$ . Es sei  $x_i = \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n = x_{i+1}$  (Figur 2.) eine Teilmenge von  $H$ , für welche die Differenz des Minimums und des Maximums von  $t(x)$  in  $[\xi_j, \xi_{j+1}]$  ( $j = 1, 2, \dots, n-1$ ) kleiner als  $\varrho_2$  ist. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $t(x)$  gibt es solche Werte  $\xi_j$ . Wir können – wie wir es beweisen werden – aus  $H$  zu jedem Wert  $j$  in dem Intervall  $[\xi_j, \xi_{j+1}]$  solche Werte

$$\xi_j = \xi_{j1} < \xi_{j2} < \dots < \xi_{jl} = \xi_{j+1}$$

bestimmen, für die

$$(6) \quad |\text{tg}_t(\xi_{jh}, \xi_{j,h+1}) - \text{tg}_t(x_i, x_{i+1})| \cong \lambda$$

ist.

Die Polygonfunktion der in den Teilintervallen  $[\xi_j, \xi_{j+1}]$  aller Intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  liegenden sämtlichen Werten  $\xi_{jh}$  entsprechenden Punkte  $(\xi_{jh}, t(\xi_{jh}))$  ist  $t_2(x)$ . Wegen der Definition von  $\xi_j$  ist  $|t(x) - t_2(x)| < \varrho_2$  und es ist wegen der Definition von  $\xi_{jh}$  nach (6) die Eigenschaft 3° für  $i=1$  gültig. Wir wählen jetzt in  $[\xi_{jh}, \xi_{j,h+1}]$  solche Elemente

$$\xi_{jh} = \zeta_1 < \zeta_2 < \dots < \zeta_s = \xi_{j,h+1}$$

von  $H$ , für welche die Differenz des Maximums und des Minimums von  $t(x)$  in  $[\zeta_i, \zeta_{i+1}]$  kleiner als  $\varrho_3$  ist, und wir nehmen in  $[\zeta_i, \zeta_{i+1}]$  solche Elemente

$$\zeta_i = \zeta_{i1} < \zeta_{i2} < \dots < \zeta_{ir} = \zeta_{i+1}$$

von  $H$ , für die

$$(7) \quad |\text{tg}_t(\zeta_{ig} - \zeta_{i,g+1}) - \text{tg}_t(\xi_{jh}, \xi_{j,h+1})| \cong \lambda$$

gilt. Die Polygonfunktion der zu sämtlichen  $\zeta_{ig}$  gehörigen Punkte  $(\zeta_{ig}, t(\zeta_{ig}))$  ist  $t_3(x)$ . Nach der Definition von  $\zeta_i$  ist  $|t(x) - t_3(x)| < \varrho_3$  und es gilt nach der Definition von  $\zeta_{ig}$  wegen (7) die Eigenschaft 3° für  $i=2$ .

Auf derselben Weise, wie  $t_2(x)$  zu  $t_1(x)$  mit  $\varrho_2$  und  $t_3(x)$  zu  $t_2(x)$  mit  $\varrho_3$  definiert wurden, wird zu  $t_i(x)$  mit  $\varrho_{i+1}$  die Funktion  $t_{i+1}(x)$  definiert. Es ist eine evidente Folge dieses Verfahrens, dass die Funktion  $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i(x)$  eine Polygongrenzfunktion mit den Parametern  $\lambda, \varrho_i$  ist. Sie ist nach dem Satz 2 stetig und stimmt mit der stetigen Funktionen  $t(x)$  in den Abszissen der Eckpunkte der einzelnen  $t_i(x)$ , d. h. auf einer überall dichten Menge überein. Sie ist deshalb identisch mit  $t(x)$ .

Es fehlt noch zum Beweis des Satzes 3 die Bestätigung der Existenz der Punkte  $\xi_{jh}$ . Zu dieser Bestätigung fixieren wir zuerst in  $(\xi_j, \xi_{j+1})$  zwei Elemente  $\gamma$  und  $\gamma'$  von  $H$  mit  $\xi_j < \gamma < \gamma' < \xi_{j+1}$ , für die die Ungleichungen

$$|\text{tg}_t(\xi_j, \gamma) - \text{tg}_t(x_i, x_{i+1})| \cong 3\lambda \quad \text{und} \quad |\text{tg}_t(\gamma', \xi_{j+1}) - \text{tg}_t(x_i, x_{i+1})| \cong 3\lambda$$

gelten. Dies ist nach der Definition von  $H$  und wegen  $\xi_j, \xi_{j+1} \in H$  möglich. Man

kann jeden Punkt  $x$  in  $[\gamma, \gamma']$  mit einem Intervall  $(\gamma_x, \gamma'_x)$  bedecken, für das die Relationen

$$\gamma_x \in H, \gamma'_x \in H, \xi_j \leq \gamma_x < \gamma'_x \leq \xi_{j+1}$$

und

$$(8) \quad |\text{tg}_t(\gamma_x, \gamma'_x) - \text{tg}_t(x_i, x_{i+1})| \cong 3\lambda$$

bestehen. Es ist nämlich  $t(x)$  stark nicht-differenzierbar, also existiert zu  $x \in [\gamma, \gamma']$  ein Wertepaar

$$x', x'' \in [\xi_j, \xi_{j+1}] \quad (x' \neq x, x'' \neq x), \quad \text{für welches}$$

$$(9) \quad |\text{tg}_t(x, x') - \text{tg}_t(x, x'')| > 10\lambda - \lambda = 9\lambda$$

ist. Es besteht wenigstens eine der Ungleichungen

$$(10) \quad |\text{tg}_t(x, x') - \text{tg}_t(x_i, x_{i+1})| > 4\lambda$$

$$(11) \quad |\text{tg}_t(x, x'') - \text{tg}_t(x_i, x_{i+1})| > 4\lambda$$

denn sonst bekämen wir aus

$$|\text{tg}_t(x, x') - \text{tg}_t(x_i, x_{i+1})| \cong 4\lambda$$

$$|\text{tg}_t(x, x'') - \text{tg}_t(x_i, x_{i+1})| \cong 4\lambda$$

durch Addieren ein Resultat, das der Ungleichung (9) widerspricht.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß (10) besteht, und daß  $x < x'$  gilt. Man kann wegen der Stetigkeit von  $t(x)$  eine Zahl  $\delta$  mit

$$0 < \delta < \min(\gamma - \xi_j, \xi_{j+1} - \gamma')$$

so finden, dass sich die linke Seite von (10) nur wenig ändert statt  $x$  und  $x'$  die Werte  $\gamma_x \in (x - \delta, x)$  und  $\gamma'_x \in (x, x' + \delta)$  genommen werden, also wird dann (8) gültig sein.

Da die Menge  $H$  im Intervall  $[0, 1]$  überall dicht ist, sind  $\gamma_x \in H, \gamma'_x \in H$  erfüllbar. Nach dem Borelschen Satz wird das Intervall  $[\gamma, \gamma']$  von endlich vielen der Intervalle  $(\gamma_x, \gamma'_x)$  bedeckt. Zur Bedeckung des Intervalls  $[\xi_j, \xi_{j+1}]$  benötigen wir noch höchstens die Intervalle  $[\xi_j, \gamma]$  und  $[\gamma', \xi_{j+1}]$ . So wird  $[\xi_j, \xi_{j+1}]$  durch endlich viele Intervalle bedeckt.

Wählt man die bedeckenden abgeschlossenen Intervalle  $[\gamma_r, \gamma'_r]$  ( $r = 1, 2, \dots, s$ ) so, daß die Zahl  $s$  möglichst klein wird, so gelten

$$(12) \quad \xi_j = \gamma_1 < \gamma_2 \leq \gamma'_1 < \gamma_3 \leq \dots < \gamma_{s-1} \leq \gamma'_{s-2} < \gamma_s \leq \gamma'_{s-1} < \gamma'_s = \xi_{j+1}$$

und

$$(13) \quad |\text{tg}_t(\gamma_r, \gamma'_r) - \text{tg}_t(x_i, x_{i+1})| \cong 3\lambda.$$

Wir verwenden noch den folgenden

**Hilfssatz.** Es seien die Punkte  $A_i(a_i, a'_i)$  und  $B_i(b_i, b'_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) so gegeben, daß die Beziehungen

$$(14) \quad a_i < a_{i+1} \leq b_i < a_{i+2} \leq b_{i+1} < b_{i+2} \quad (i = 1, 2, \dots, n-2)$$



gelten, ferner, daß für ein gegebenes  $d$

$$(15) \quad \left| \frac{b'_i - a'_i}{b_i - a_i} - d \right| \cong \varkappa$$

mit gegebenem  $\varkappa > 0$  besteht. Dann können die Punkte  $C_j(c_j, c'_j)$  ( $j=1, 2, \dots, m \cong 2n$ ) aus den Punkten  $A_i, B_i$  so gewählt werden, daß

$$(16) \quad \left| \frac{c'_{j+1} - c'_j}{c_{j+1} - c_j} - d \right| \cong \frac{\varkappa}{3}$$

und  $A_1 = C_1, B_n = C_m, c_j < c_{j+1}$  gelten.

Wir können diesen Hilfssatz auf die Punkte

$$A_i = (\gamma_i, t(\gamma_i)), B_i = (\gamma'_i, t(\gamma'_i)) \quad \text{mit} \quad d = \text{tg}_t(x_i, x_{i+1}), \quad \varkappa = 3\lambda$$

anwenden, da so wegen (12), (13) auch (14) und (15) gültig sein werden. Wir bekommen solche Punkte  $C_h = (\xi_{jh}, t(\xi_{jh}))$ , die wegen (16) der Bedingung (6) genügen.

Der Hilfssatz wird mit vollständiger Induktion bewiesen. Er gilt für  $n=1$ , da  $C_1 = A_1$  und  $C_2 = B_1$  eine Lösung bedeuten. Nehmen wir an, daß die Behauptung für  $1, 2, \dots, n$  ( $n \cong 2$ ) richtig ist.

Es genügt den Fall zu erledigen, wenn

$$(17) \quad |\text{tg } A_1 A_i - d| \cong \frac{\varkappa}{3} \quad (i=2, 3, \dots, n)$$

gilt. Im entgegengesetzten Fall ist für ein  $l$   $|\text{tg } A_1 A_l - d| > \frac{\varkappa}{3}$ , und dann befriedigen die aus den Punkten

$$A_l, A_{l+1}, \dots, A_n, B_l, B_{l+1}, \dots, B_n$$

auf Grund der Induktionsannahme gewonnenen Punkte zusammen mit  $A_1$  die Bedingungen des Hilfssatzes.

Es wird genügen uns mit dem Fall

$$(18) \quad \text{tg } A_1 B_1 \cong d$$

zu beschäftigen, da — wie man es aus dem Beweise sehen wird — der Fall  $\text{tg } A_1 B_1 \cong d$  in ähnlicher Weise behandelt werden kann.

Ebenfalls mit vollständiger Induktion werden wir beweisen, daß es genügt uns mit dem Fall zu beschäftigen, wenn für  $i \cong n-1$  die folgenden Behauptungen gelten:

$$1_i \quad \text{tg } A_i B_i \cong d.$$

2<sub>i</sub> Wir bezeichnen mit  $h$  bzw. mit  $g$  die Halbgeraden mit den Richtungstangenten  $d$  bzw.  $d - \frac{\varkappa}{3}$ , die in der Richtung der wachsenden  $x$  von dem Punkt  $A_1$  hinausgehen, und ebenso mit  $e_i$  die aus  $B_i$  gezogene Halbgerade mit Richtungstangente  $d + \frac{\varkappa}{3}$  (Figur 3). Der Schnittpunkt von  $g$  und  $e_i$  sei  $P_i(x_i, y_i)$  ( $P_0 = A_1$ ).

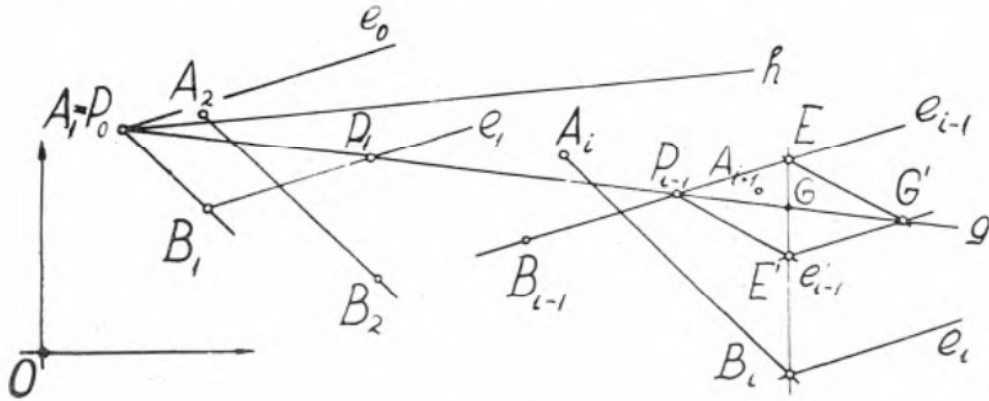
Behauptung: der Punkt  $A_{i+1}$  liegt in dem Winkel, der für Scheitelpunkt  $P_{i-1}$ , für Schenkel die Halbgeraden  $g$  und  $e_{i-1}$  hat.

$$3_i \quad b_i \cong x_{i-1}.$$

$$4_i \quad b'_i \cong (d - \varkappa)(b_i - x_{i-1}) + y_{i-1}.$$

$3_i$  und  $4_i$  drücken anschaulich aus, daß der Punkt  $B_i$  unter der aus  $P_{i-1}$  mit Richtungstangente  $d - \varkappa$  ausgehenden Geraden  $e'_{i-1}$  liegt.

Wir betrachten zuerst den Fall  $i=1$ . Nach (18) stellten wir fest, daß es genügt uns mit dem in  $1_1$  vorausgesetzten Fall zu beschäftigen. Es ist  $2_1$  die Ungleichung



Figur 3

(17) für  $i=2$ .  $3_1$  folgt aus der Bedingung (14) des Hilfssatzes.  $4_1$  ist eine triviale Folge von  $1_1$  und von der Bedingung (15).

Nehmen wir an, dass  $1_j - 2_j - 3_j - 4_j$  für  $j=1, 2, 3, \dots, i$  gültig sind.

Besteht  $\text{tg } A_{i+1}B_{i+1} > d$ , so folgt nach (17)  $|\text{tg } A_1A_{i+1} - d| \cong \frac{\varkappa}{3}$ , und so liegt  $A_{i+1}$  über (oder an) der Geraden  $g$ , und es liegt  $B_i$  nach  $3_i$  und  $4_i$  unter (oder an) dieser Geraden, also ist

$$\text{tg } A_{i+1}B_{i+1} \cong \text{tg } B_iB_{i+1},$$

d. h. (vgl. (15))

$$\varkappa \cong \text{tg } A_{i+1}B_{i+1} - d \cong \text{tg } B_iB_{i+1} - d.$$

Dies bedeutet zusammen mit der aus  $4_i$  herleitbaren Ungleichung

$$|\text{tg } A_1B_i - d| \cong \frac{\varkappa}{3},$$

daß die aus den Punkten

$$B_i, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots, A_n, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3}, \dots, B_n$$

nach der Induktionsannahme gewonnenen Punkte zusammen mit  $A_1$  die Forderung des Hilfssatzes befriedigende Punkte ergeben. Es genügt also uns mit dem Fall zu beschäftigen, wo  $1_{i+1}$  gilt.

Nach  $4_i$  existiert der Punkt  $P_i$ .

Gilt  $2_{i+1}$  nicht, so liegt  $A_{i+2}$  unter der Halbgeraden  $A_1P_i$ , oder über der Halbgeraden  $B_iP_i$  (natürlich schließen sich diese Fälle nicht aus). Im ersten Falle wäre

$|\text{tg } A_1A_{i+2} - d| > \frac{\varkappa}{3}$ , im Gegensatz zu (17.). Im zweiten Fall ist  $|\text{tg } B_iA_{i+2} - d| > \frac{\varkappa}{3}$ ,

und dies bedeutet, dass die aus den Punkten

$$A_{i+2}, A_{i+3}, \dots, A_n, B_{i+2}, B_{i+3}, \dots, B_n$$

nach der Induktionsannahme aus gewählten Punkte mit den Punkten  $A_1$  und  $B_i$  wegen der aus  $4_i$  herleitbaren Ungleichung  $|\operatorname{tg} A_1 B_i - d| \cong \frac{\varkappa}{3}$  den Forderungen des Hilfssatzes genügen.

Wegen  $2_{i+1}$  ist  $a_{i+2} \cong x_i$ , aber es ist  $b_{i+1} \cong a_{i+2}$ , also gilt  $b_{i+1} \cong x_i$ , d. h. es besteht  $3_{i+1}$ .

Die Gerade  $b_i = x$  schneidet die Geraden  $g, e_{i-1}$ , und  $e'_{i-1}$  in den — wegen  $3_i$  existierenden — Punkten  $G, E, E'$ . Infolge der Bedingungen, die den Richtungstangenten der Geraden  $g, e_{i-1}, e'_{i-1}$  auferlegt wurden, wird die Strecke  $\overline{EE'}$  vom Punkt  $G$  halbiert.

Deshalb liegt der Schnittpunkt  $G'(g_1, g_2)$  der durch  $E$  mit  $P_{i-1}E'$ , bzw. durch  $E'$  mit  $P_{i-1}E$  parallel gezogenen Geraden an der Geraden  $g$  ( $P_{i-1}EG'E'$  ist ein Parallelogramm).

Der Punkt  $A_{i+1}$  liegt wegen  $2_i$  im Inneren (oder an der Grenze) des Dreiecks  $P_{i-1}GE$ , und so liegt  $B_{i+1}$  — infolge der Ungleichung  $d - \operatorname{tg} A_{i+1}B_{i+1} \cong \varkappa -$  unter (oder an) der von  $E$  herausgehenden Halbgeraden  $EG'$ .

Nach  $4_i$  ist die Ordinate des Punktes  $E'$  nicht kleiner als  $b'_i$ , und deshalb ist  $x_i \cong g_1$ . Daraus folgt (wegen  $3_{i+1}$ )  $g_1 \cong b_{i+1}$ . Liegt also  $B_{i+1}$  unter (oder an) der Halbgeraden  $EG'$ , so ist er umsomehr unter (oder an) der Halbgeraden  $e'_i$ , d. h. es gilt  $4_{i+1}$ .

Somit haben wir die Behauptungen für  $i \leq n-1$  bewiesen. Der vorige Beweis von  $1_{i+1}$  gilt auch noch für  $i = n-1$ , und so besteht  $1_n$ . Verwendet man ferner die vorigen Beziehungen für  $i = n-1$ , so liegt  $A_n$  wegen  $2_{n-1}$  in dem Dreieck  $P_{n-2}GE$ , und  $B_n$  ist — infolge von  $1_n$  und (15) — unter der Geraden  $EG'$ . Liegt  $B_n$  unter der Geraden  $GG'$ , so ist  $|\operatorname{tg} A_1 B_n - d| \cong \frac{\varkappa}{3}$  und somit bedeuten  $C_1 = A_1, C_2 = B_n$  den Beweis des Hilfssatzes. Liegt  $B_n$  über der Geraden  $GG'$ , so ist er umsomehr über  $E'G'$ , und so ist  $|\operatorname{tg} B_{n-1} B_n - d| \cong \frac{\varkappa}{3}$ , also bedeutet  $C_1 = A_1, C_2 = B_{n-1}$  und  $C_3 = B_n$  den Beweis des Hilfssatzes.

### Literatur

- [1] Z. GEÖCZE, Folytonos rendszert képező síkgörbék ivhosszáról, *Az Ungvári Állami Reáliskola 1904/5 évi Értésítője*, 1—32.
- [2] S. KÁNTOR, Über die Funktion von Z. Geöcze, *Mat. Lapok*, 8 (1957), 264—268 (ungarisch).
- [3] M. MIKOLÁS, Constructions des familles de fonctions partout continues non dérivables, *Acta Sci. Math. Szeged*, 17 (1956), 49—62.
- [4] P. SZÁSZ, Einfache Herstellung einer Klasse von nirgends differenzierbaren stetigen Funktionen auf Grund eines elementaren Satzes der analytischen Geometrie, *Publ. Math. Debrecen* 7 (1960), 1—19.
- [5] B. SZÉNÁSSY, Geöcze Zoárd matematikai munkássága és a felszínmérés újabb eredményei, *A Szt. István Akadémia Értésítője* 28 (1943), 118—142.

(Eingegangen am 15. Januar 1962.)