Über spurenverträgliche Algebren*

Von HANS-JÜRGEN HOEHNKE (Berlin)

1. Im folgenden werden nichtassoziative K-Algebren $\mathfrak{A}$ mit einem Einselement 1 betrachtet, die im allgemeinen weder kommutativ noch potenzassoziativ sind, die aber eine assoziative (bzw. assoziativ-symmetrische) Bilinearform (x, y) $(x, y \in \mathfrak{A})$ mit Werten im Grundkörper K und mit $(1, 1) = \alpha \neq 0$ besitzen. Gleichbedeutend damit ist die Eigenschaft, daß der von allen Differenzen $x(yz)-(xy)z$ (bzw. $xy-yx$ und $x(yz)-(xy)z;\ x, y, z \in \mathfrak{A}$) erzeugte lineare Teilraum von $\mathfrak{A}$ zu 1 fremd ist. Solche Algebren werden hier schwach assoziativ (bzw. schwach kommutativ-assoziativ) genannt. In diesen Algebren existiert eine additive direkte Zerlegung $\mathfrak{A} = K + \mathfrak{B}$, so daß die durch $g(\xi + x, \eta + y) = \xi\eta + g(x, y)$ $(\xi, \eta \in K;\ x, y \in \mathfrak{B})$, $xy = g(x, y) + x \cdot y$ $(g(x, y) \in K,\ x \cdot y \in \mathfrak{B})$ definierte Bilinearform g assoziativ-symmetrisch ist. $\mathfrak{B}$ ist eine Algebra bez. des Produkts $(\cdot)$, und $\mathfrak{A}$ ist durch $\{\mathfrak{B}(\cdot), g\}$ eindeutig festgelegt. — Wenn z. B. $g(x, y)$ auf $\mathfrak{B}$ identisch verschwindet, so kann man sich bekanntlich $\mathfrak{A}$ durch Adjunktion von 1 zu $\mathfrak{B}$ entstanden denken, wobei $\mathfrak{B}$ eine Teilalgebra von $\mathfrak{A}$ wird. — Bei gewissen, als spurenverträglich (vgl. Abschnitt 4) bezeichneten, schwach kommutativ assoziativen Algebren $\mathfrak{A}$ ist auch umgekehrt $\mathfrak{B}(\cdot)$ durch $\mathfrak{A}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Die assoziativen (bzw. kommutativ-assoziativen) Algebren bilden einen Spezialfall der hier betrachteten Algebren. Der assoziative Spezialfall wurde bereits von J. L. ZEMMER [7] untersucht, und zwar mit dem Ziel, bei vorgegebenen Eigenschaften von $\mathfrak{A}$ Aussagen über die Struktur von $\mathfrak{B}(\cdot)$ zu machen.[1]) Im Gegensatz dazu wird hier die Aufgabe gestellt, das Konstruktionsproblem für spurenverträgliche Algebren $\mathfrak{A}$ dadurch zu lösen, daß die Produktformel für die aus $\mathfrak{A}$ abgeleitete Algebra $\mathfrak{B}(\cdot)$ ermittelt wird, und zwar in der Weise, daß durch gewisse ursprünglich gegebene Formen, wie $g(x, y)$ bzw. die Koeffizienten $g_i(x)$ einer Minimalgleichung r-ten Grades (4. 1), andere, mit der Lösung der Aufgabe verbundene Formen, nämlich die Komponenten des Produkts $x \cdot y$ bez. einer K-Basis von $\mathfrak{B}(\cdot)$, ausgedrückt werden. Auf das vorgelegte algebrentheoretische Problem werden demnach formentheoretische Methoden angewandt.

Die in Abschnitt 4 erklärten spurenverträglichen Algebren bilden eine sehr umfangreiche Gattung nichtassoziativer Algebren. Der Vorteil der Anwendung formentheoretischer Methoden besteht darin, daß sie es gestatten, diese Algebren innerhalb ihrer Gattung nach einheitlichen Gesichtspunkten zu behandeln

---

* Ein kurzer Bericht über die Resultate dieser Arbeit erscheint unter dem Titel „Über nichtassoziative Algebren mit assoziativ-symmetrischer Bilinearform" in den *Monatsber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin.*

[1]) Den Hinweis auf die ZEMMERsche Untersuchung verdanke ich Herrn W. ROMBERG.

und zu klassifizieren. Von Abschnitt 7 an wird dieses Programm nicht mehr in voller Allgemeinheit, sondern nur im Hinblick auf spezielle Fragen durchgeführt. In Satz 5 und 6 werden auf diesem Wege berechnete Produktformeln für $r=3$ explizit angegeben. Gleichzeitig bilden die in Satz 6 beschriebenen $(n+1)$-dimensionalen kommutativen spurenverträglichen Algebren $\mathfrak{A}_{n+1,m}$ eine Familie von Gegenbeispielen für folgenden von T. A. Springer [6, p. 257, Satz 1] aufgestellten

Satz: Es sei $\mathfrak{A}$ eine kommutative nichtassoziative Algebra mit Einselement 1, der Dimension $n+1\geqq 3$ über einem Körper K mit von 2 und 3 verschiedener Charakteristik. Q_x sei eine nichtentartete quadratische Form auf $\mathfrak{A}$ und $(x, y)=Q_{x+y}-Q_x-Q_y$ die assoziierte Bilinearform. Wenn in $\mathfrak{A}$ die Bedingungen $Q_{x^2}=Q_x^2$ für $(x, 1)=0$, $(xy, z)=(x, yz)$ und $Q_1=1$ erfüllt sind, so ist $\mathfrak{A}$ eine (durch eine nichtentartete quadratische Form definierte) einfache Jordanalgebra.

Dieser Satz bedarf vielmehr zu seiner Gültigkeit noch der weiteren Bedingung $(x, x^2)=0$ für $(x, 1)=0$. In der Tat beruht ein Teil seines Beweises [6, p. 257] implizit auf dieser Beziehung.

2. Es sei K ein Körper und $\mathfrak{A}$ eine K-Algebra mit Einselement; es darf $K\subseteqq\mathfrak{A}$ angenommen werden. Zu einer K-Basis $\{e_0=1, e_1, \dots, e_n\}$ von $\mathfrak{A}$ $(\dim_K \mathfrak{A}=n+1)$ gehört die additive direkte Zerlegung $\mathfrak{A}=K+\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}=Ke_1+\dots+Ke_n$. Bez. der durch $xy=g(x, y)+x\cdot y$ $\big(g(x, y)\in K;\ x, y, x\cdot y\in\mathfrak{B}\big)$ definierten Verknüpfung $(\cdot)$ ist $\mathfrak{B}$ eine Algebra. Setzt man die Bilinearform $g(x, y)$ fort gemäß $g(\xi+x, \eta+y)=\xi\eta+g(x, y)$ $(\xi, \eta\in K;\ x, y\in\mathfrak{B})$, so wird $g(1, 1)=1$, und $\mathfrak{B}$ läßt sich charakterisieren als die Gesamtheit $K^\perp$ der zu 1 bez. der Form $g(\xi+x, \eta+y)$ *senkrechten* Elemente $z\in\mathfrak{A}$ $\big(g(1, z)=0$ oder $g(z, 1)=0\big)$. Aus

$$(2.1)\qquad (\xi+x)(\eta+y)=g(\xi+x, \eta+y)+\xi y+\eta x+x\cdot y\quad (\xi, \eta\in K;\ x, y\in\mathfrak{B})$$

ersieht man, daß $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}(\cdot)$ und $g(x, y)$ eindeutig bestimmt ist. Mit Rücksicht darauf wird $\mathfrak{A}$ die *assoziierte* Algebra von $\{\mathfrak{B}, g\}$ genannt. Für irgend drei Elemente $x, y, z\in\mathfrak{B}$ gilt

$$(2.2)\quad x(yz)-(xy)z=g(y, z)x-g(x, y)z+g(x, y\cdot z)-g(x\cdot y, z)+x\cdot(y\cdot z)-(x\cdot y)\cdot z.$$

Diese Identität legt es nahe, zwei Fälle näher zu untersuchen:

$$(2.3)\qquad x(yz)-(xy)z\in K\quad (x, y, z\in\mathfrak{A}),$$

$$(2.4)\qquad x(yz)-(xy)z\in K^\perp\quad (x, y, z\in\mathfrak{A}).$$

Man erkennt aus (2.2) und

$$(\xi+x)\big((\eta+y)(\zeta+z)\big)-\big((\xi+x)(\eta+y)\big)(\zeta+z)=x(yz)-(xy)z\quad (\xi, \eta, \zeta\in K;\ x, y, z\in\mathfrak{B}),$$

daß (2.3) gleichwertig ist mit

$$(2.5)\qquad x(yz)-(xy)z=g(x, y\cdot z)-g(x\cdot y, z)\quad (x, y, z\in\mathfrak{B})$$

bzw.

$$(2.6)\qquad x\cdot(y\cdot z)-(x\cdot y)\cdot z=-\big(g(y, z)x-g(x, y)z\big)\quad (x, y\in\mathfrak{B}).$$

Entsprechend ist (2.4) gleichwertig mit

$$(2.7)\qquad g(x\cdot y, z)=g(x, y\cdot z)\quad (x, y, z\in\mathfrak{B})$$

bzw.

$$(2.8)\qquad x(yz)-(xy)z=g(y,z)x-g(x,y)z+x\cdot(y\cdot z)-(x\cdot y)\cdot z \quad (x,y,z\in\mathfrak{B}).$$

Offenbar darf (2. 7) auch durch die in ganz $\mathfrak{A}$ gültige Assoziativbedingung

$$(2.9)\qquad g(xy,z)=g(x,yz)\quad (x,y,z\in\mathfrak{A})$$

ersetzt werden.

J. L. ZEMMER [7] hat den Fall untersucht, daß (2. 3) und (2. 4) gleichzeitig erfüllt sind, d. h. $\mathfrak{A}$ assoziativ und $\mathfrak{B}(\cdot)$ eine (durch (2. 6), (2. 7) charakterisierte) $\mathfrak{G}$-Algebra ist. Damit gleichwertig ist die Gültigkeit von (2. 4) für jedes $K^{\perp}$. Denn der Durchschnitt aller zu 1 fremden Teilräume von $\mathfrak{A}$ ist (0). Demgegenüber wird hier nur verlangt, daß der von allen Ausdrücken $x(yz)-(xy)z$ $(x,y,z\in\mathfrak{A})$ und deren Linearkombinationen bez. K gebildete Teilraum $\mathfrak{D}$ zu 1 fremd ist. Indem man in $\mathfrak{A}=K+\mathfrak{B}$ für $\mathfrak{B}$ einen zu 1 fremden n-dimensionalen Oberraum von $\mathfrak{D}$ wählt, findet man, daß (2. 4) mit speziellem $K^{\perp}=\mathfrak{B}$ erfüllt ist. In diesem Sinne sind die hier vorliegenden Verhältnisse bedeutend allgemeiner als in [7]. Es erscheint demnach gerechtfertigt, eine solche Algebra $\mathfrak{A}$ *schwach assoziativ* zu nennen. Auf $\mathfrak{A}$ existiert dann eine assoziative Bilinearform $g(x,y)$ mit $g(1,1)\neq 0$. Ist umgekehrt $\mathfrak{A}$ eine K-Algebra mit $K\subseteqq\mathfrak{A}$, in welcher eine Bilinearform (x,y) mit $(1,1)=\alpha\neq 0$ definiert ist, so kann $\mathfrak{A}$ entsprechend der Darstellung $x=\alpha^{-1}(x,1)+x'$ bekanntlich in $\mathfrak{A}=K+K^{\perp}$ zerlegt werden, wo $K^{\perp}=\{x\,|\,x\in\mathfrak{A},\ (x,1)=0\}$, $K\cap K^{\perp}=0$. Ist (x,y) überdies assoziativ (folglich $(x,1)=0$ äquivalent mit $(1,x)=0$), so ergibt sich aus (2, 1) für $\mathfrak{B}=K^{\perp}$, daß $g(x,y)=\alpha^{-1}(xy,1)=\alpha^{-1}(x,y)$ gilt, d. h., $\mathfrak{A}$ ist schwach assoziativ.

3. Ein wesentlicher Spezialfall einer schwach assoziativen Algebra ist eine Algebra $\mathfrak{A}$, in der alle Differenzen $xy-yx$, $x(yz)-(xy)z$ $(x,y,z\in\mathfrak{A})$ dem gleichen zu 1 fremden Teilraum angehören. Eine solche Algebra (mit Eins) soll *schwach kommutativ-assoziativ* heißen. Indem man die obigen Überlegungen in geeigneter Weise ergänzt, erhält man

Lemma 1. *Eine Algebra mit Eins ist genau dann schwach assoziativ (bzw. schwach kommutativ-assoziativ), wenn auf $\mathfrak{A}$ eine assoziative (bzw. assoziativ-symmetrische) Bilinearform (x,y) mit $(1,1)=\alpha\neq 0$ existiert.*

Folgendes Lemma kann als Verallgemeinerung eines entsprechenden Lemmas in [7, p. 52] über $\mathfrak{G}$- Algebren aufgefaßt und durch eine einfache Rechnung bestätigt werden,

Lemma 2. *Es sei $\mathfrak{B}(\cdot)$ eine Algebra mit assoziativer (bzw. assoziativ-symmetrischer) Bilinearform $g(x,y)$ (z. B. $\mathfrak{B}$ beliebig, $g\equiv 0$) und $\mathfrak{A}$ die Gesamtheit der Paare $\langle\xi,x\rangle$ $(\xi\in K,\ x\in\mathfrak{B})$. Wenn in $\mathfrak{A}$ durch $\langle\xi,x\rangle+\langle\eta,y\rangle=\langle\xi+\eta,x+y\rangle$ und $\langle\xi,x\rangle\langle\eta,y\rangle=$ $=\langle\xi\eta+g(x,y),\ \xi y+\eta x+x\cdot y\rangle$ Summe und Produkt definiert sind, so ist $\mathfrak{A}$ schwach assoziativ (schwach kommutativ-assoziativ) und isomorph zu der assoziierten Algebra von $\{\mathfrak{B},g\}$.*

Wenn man (unter der Voraussetzung char $K\neq 2$) in $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}(\cdot)$ als neue Verknüpfung das Produkt $x\circ y=\dfrac{1}{2}(xy+yx)(x,y\in\mathfrak{A})$ bzw. $x\odot y=\dfrac{1}{2}(x\cdot y+y\cdot x)(x,y\in\mathfrak{B})$

nimmt, so erhält man zwei kommutative Algebren $\mathfrak{A}(\circ)$ und $\mathfrak{B}(\odot)$. Aus (2. 1) ergibt sich die Produktformel

$$(3.\ 1)\qquad (\xi+x)\circ(\eta+y)=\tfrac{1}{2}\big(g(\xi+x,\eta+y)+g(\eta+y,\xi+x)\big)+\xi y+\eta x+x\odot y$$
$$(\xi,\eta\in K;\ x,y\in\mathfrak{B}).$$

Das Einselement von $\mathfrak{A}$ ist zugleich die Eins von $\mathfrak{A}(\circ)$. Ist $g(x,y)$ auf $\mathfrak{A}$ assoziativ-symmetrisch, so auch bez. $(\circ)$. Daher ist mit $\mathfrak{A}$ auch $\mathfrak{A}(\circ)$ schwach kommutativ-assoziativ.

4. Ist $\mathfrak{A}$ eine gegebene K-Algebra mit Einselement 1 und xy das Produkt zweier Elemente $x, y\in\mathfrak{A}$, so soll in der zugehörigen kommutativen Algebra $\mathfrak{A}(\circ)$ mit der Multiplikation $x\circ y=\frac{1}{2}(xy+yx)$ die ϱ-te Potenz $x^{(\varrho)}$ eines Elementes x rekursiv durch $x^{(0)}=1$, $x^{(\varrho)}=x^{(\varrho-1)}\circ x=x\circ x^{(\varrho-1)}$ definiert sein. Das mit $n+1$ Unbestimmten $\xi_0,\xi_1,\dots,\ \xi_n$ gebildete allgemeine Element $x=\xi_0+\xi_1e_1+\dots+\xi_ne_n\in\in\mathfrak{A}_{K(\xi_0,\dots,\ \xi_n)}$ bez. einer K-Basis $\{e_0=1, e_1,\dots, e_n\}$ von $\mathfrak{A}$ genügt einer Gleichung von möglichst niedrigem Grad r,

$$(4.\ 1)\qquad g_0(x)x^{(r)}-g_1(x)\,x^{(r-1)}+\dots+(-1)^r g_r(x)=0\qquad \big(g_0(x)\neq 0\big),$$

wo $g_i(x)$ eine Form $\in K[\xi_0,\dots,\ \xi_n]$ vom Grad $q+i$ $(q\geqq 0)$ bezeichnet. Man nennt r auch den *Grad* von $\mathfrak{A}$. Es werde vorausgesetzt, daß die Charakteristik char K kein Teiler von $2r$ ist. Außerdem werden folgende Annahmen gemacht:

(a) $q=0$. Dann ist $g_0(x)\in K$, und man darf $g_0(x)=1$ annehmen; $g_1(x)=S_x$ ist eine Linearform, die *Spur* von x.

(b) $(x,y)=\dfrac{\alpha}{r}\,S_{xy}$ $(0\neq\alpha\in K)$ ist eine assoziativ-symmetrische Bilinearform auf $\mathfrak{A}$.

Mit der Substitution $x+\xi=y$ $(\xi\in K)$ geht (4. 1) über in

$$(4.\ 2)\qquad \sum_{\sigma=0}^{r}(-1)^{r-\sigma}y^{(\sigma)}\sum_{\varrho=\sigma}^{r}\binom{\varrho}{\sigma}g_{r-\varrho}(x)\,\xi^{\varrho-\sigma}=0,$$

und es folgt

$$(4.\ 3)\qquad g_{r-\sigma}(x+\xi)=\sum_{\varrho=\sigma}^{r}\binom{\varrho}{\sigma}g_{r-\varrho}(x)\,\xi^{\varrho-\sigma},$$

und daraus insbesondere

$$(4.\ 4)\qquad g_\varrho(1)=\binom{r}{\varrho}$$

und

$$(4.\ 5)\qquad g_r(\xi-x)=\sum_{\varrho=0}^{r}(-1)^{r-\varrho}g_{r-\varrho}(x)\,\xi^{\varrho}.$$

Da zufolge (b) und (4. 4) gewiß $(1,1)=\alpha\neq 0$ ist, so is teine Algebra mit den Eigenschaften (a), (b) schwach kommutativ-assoziativ; sie soll kurz *spurenverträglich* heißen. (Dieser Begriff ist zu unterscheiden von „spurenzulässig" im Sinne von A. A. Albert [2].) Mit nichtentarteter Form (x, y) sind obige Annahmen außer in separabel-assoziativen Algebren z. B. auch in zentralen einfachen Jordanalgebren (N. JACOBSON [4, p. 183, Satz 3]) sowie in Cayley-Dickson-Algebren erfüllt.

Man hat $(x,y)=\frac{\alpha}{r}S_{x\circ y}$, und nach der am Schluß von Abschnitt 3 gemachten Bemerkung ist (x, y) auch assoziativ bez. $(\circ)$. Multipliziert man (4. 1) bez. $(\circ)$ mit x, die entstehende Gleichung wieder mit x, u. s. w., und bildet davon jeweils die Spur, so erhält man einen Teil des Newtonschen Formelsystems, nämlich

$$S_{x^{(i)}}-g_1(x)S_{x^{(i-1)}}+\ldots+(-1)^r g_r(x)S_{x^{(i-r)}}=0 \qquad (i\geqq r). \tag{4. 6}$$

Die übrigen Newtonschen Formeln ([3, p. 4, Formel (6), $i<\text{Grad}\,\mathfrak{A}$]) sind im allgemeinen nicht erfüllt.

5. Zerlegt man eine spurenverträgliche Algebra $\mathfrak{A}$ bez. $(x, y)=\frac{\alpha}{r}S_{xy}$ in $\mathfrak{A}=K+K^{\perp}$, so kann man für ein x mit $(x, 1)=0$ analog zu $x^{(\varrho)}$ die ϱ-te Potenz x^{ϱ} gemäß $x^{\varrho}=x^{\varrho-1}\odot x=x\odot x^{\varrho-1}$ $(\varrho\geqq 2)$ erklären. Der Zusammenhang zwischen beiden Potenzen läßt sich nach (3. 1) mit $g(x, y)=\alpha^{-1}(x, y)=r^{-1}S_{x\odot y}$ angeben, man findet

$$r(x^{(\varrho)}-x^{\varrho})=S_{x^{(\varrho)}}+\sum_{\sigma=1}^{\varrho-2}S_{x^{(\varrho-\sigma)}}x^{\sigma},\ (x, 1)=0. \tag{5. 1}$$

Eine entsprechende Umformung von (4. 1) ergibt

$$rx^r+\sum_{\sigma=1}^{r-2}\left(\sum_{\varrho=\sigma}^{r}(-1)^{r-\varrho}g_{r-\varrho}(x)S_{x^{(\varrho-\sigma)}}\right)x^{\sigma}=0, \qquad (x, 1)=0. \tag{5. 2}$$

Da umgekehrt aus (5. 2) wieder die Gleichung (4. 1) abgeleitet werden kann, besteht

Satz 1. *Genau die spurenverträglichen Algebren r-ten Grades $\mathfrak{A}$ haben eine Produktformel der Gestalt* (2. 1) *mit einer assoziativ-symmetrischen Bilinearform $g(x, y)=\alpha^{-1}(x, y)$ $(0\neq\alpha\in K)$, wobei $\mathfrak{B}=K^{\perp}$ bez. der aus $(\cdot)$ abgeleiteten Verknüpfung $(\odot)$ eine durch* (5. 2) *als Gleichung kleinsten Grades für das allgemeine Element x von $\mathfrak{B}$, mit $S_z=\frac{r}{\alpha}(z, 1)$, charakterisierte kommutative Algebra ist.*

6. Es sei $\tilde{\mathfrak{B}}(\cdot)$ eine zweite n-dimensionale Algebra, die eine zu (5. 2) analoge Beziehung mit $\tilde{g}_{r-\varrho}(x)$, $\tilde{S}_{x^{(\varrho-\sigma)}}$ erfüllt. Dann erhebt sich die Frage, unter welchen Bedingungen die zu $\{\mathfrak{B}(\cdot), g(x, y)\}$ und $\{\tilde{\mathfrak{B}}(\cdot), \tilde{g}(x, y)\}$ assoziierten Algebren $\mathfrak{A}$ und $\tilde{\mathfrak{A}}$ isomorph sind. Jeder Isomorphismus ist offenbar von der Form

$$\xi+x\to\xi+f_x+xT \qquad (\xi\in K,\ x\in\mathfrak{B}), \tag{6. 1}$$

wo f_x eine Linearform auf $\mathfrak{B}$ mit Werten in K und T eine umkehrbar eindeutige lineare Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf $\tilde{\mathfrak{B}}$ ist. Dabei müssen f_x und T den Bedingungen

$$g(x, y)+f_{x\cdot y}-f_x f_y=\tilde{g}(xT, yT) \qquad (x, y\in\mathfrak{B}) \tag{6. 2}$$

und

$$(x\cdot y)T=f_x yT+f_y xT+xT\cdot yT \qquad (x, y\in\mathfrak{B}) \tag{6. 3}$$

genügen. Die letzte Gleichung ergibt $x^{\varrho}T=f_x x^{\varrho-1}T+f_{x^{\varrho-1}}\, xT+xT\odot x^{\varrho-1}T$ $(\varrho\geqq 2)$; demnach ist $x^{\varrho}T=(xT)^{\varrho}+\varrho f_x\,(xT)^{\varrho-1}+\ldots$. Indem man dies berücksichtigt, auf die beiden Seiten von (5. 2) die Abbildung T anwendet und in der erhaltenen sowie der aus (5. 2) nach Ersetzen von x durch xT entstehenden Gleichung die Koeffizienten von x^{r-1} vergleicht, findet man $f_x=0$. Nach (6. 3), (6. 2) ist T daher ein Isomorphismus von $\mathfrak{B}(\cdot)$ auf $\tilde{\mathfrak{B}}(\cdot)$, so daß

$$g(x,y)=\tilde{g}(xT,yT)\qquad (x,y\in\mathfrak{B}). \tag{6. 4}$$

Damit hat man

Satz 2. *Wenn $\mathfrak{B}(\cdot)$ und $\tilde{\mathfrak{B}}(\cdot)$ zwei n-dimensionale Algebren sind, für welche je eine Minimalgleichung r-ten Grades der Gestalt* (5. 2) *erfüllt ist, so sind zwei zu $\{\mathfrak{B}(\cdot),g\}$ und $\{\tilde{\mathfrak{B}}(\cdot),\tilde{g}\}$ $(g(x,y)=r^{-1}S_{x\circ y},\ \tilde{g}(x,y)=r^{-1}\tilde{S}_{x\circ y})$ assoziierte spurenverträgliche Algebren $\mathfrak{A}$ und $\tilde{\mathfrak{A}}$ genau dann isomorph, wenn ein Isomorphismus $x\to xT$ von $\mathfrak{B}(\cdot)$ auf $\tilde{\mathfrak{B}}(\cdot)$ existiert, welcher gemäß* (6. 4) *$\tilde{g}$ in g transformiert.*

7. Setzt man $Q_x=\dfrac{1}{2}\,(x,x)$, so ist nach (b) $Q_x=\dfrac{\alpha}{2r}S_{x^{(2)}}$. Zwischen g_2 und Q_x soll folgende Beziehung angenommen werden,

$$g_2(x)=-\beta Q_x,\qquad \beta\in K,\ (x,1)=0. \tag{c}$$

Nach (4. 3) ist dann

$$g_2(\xi+x)=\binom{r}{2}\xi^2-\beta Q_x,\qquad (x,1)=0. \tag{7. 1}$$

Mit $\xi+x=y$ hat man $\xi=r^{-1}S_y=r^{-1}g_1(y)$ sowie

$$Q_{y-\xi}=Q_x=\frac{\alpha}{2r}\,S_{y^{(2)}-2\xi y+\xi^2}=\frac{\alpha}{2r}\,\{g_1(y^{(2)})-r^{-1}g_1^2(y)\},\qquad (x,1)=0.$$

Wird dieser Ausdruck für Q_x in (7. 1) eingesetzt, so erhält man die für ein allgemeines Element x von $\mathfrak{A}$ gültige Formel

$$g_2(x)=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\alpha\beta}{2}+\binom{r}{2}\right)g_1^2(x)-\frac{\alpha\beta}{2r}\,g_1(x^{(2)}), \tag{7. 2}$$

die genau für $\alpha\beta=r$ die Gestalt der Newtonschen Formel $2g_2(x)=g_1^2(x)-g_1(x^{(2)})$ annimmt, falls Q_x irreduzibel ist. Wie man sich jetzt leicht überlegen kann oder auch zufolge [6, p. 255, Z. 16 v. u.] gilt

Lemma 3. *Ist $\mathfrak{A}$ eine spurenverträgliche, streng potenzassoziative Algebra der Dimension $n\geqq 3$ und vom Grad $r\geqq 2$ und ist Q_x nichtentartet und* (c) *erfüllt, so ist $\alpha\beta=r$.*

8. Es sei $\mathfrak{A}$ eine spurenverträgliche, der Bedingung (c) genügende Algebra von der Dimension $n\geqq 2$ und vom Grad $r=2$ oder 3, wobei char $K\neq 2, 3$. Aus (4. 1) folgt

$$x^{(3)}-\beta Q_x x-D_x=0,\qquad (x,1)=0, \tag{8. 1}$$

wo $D_x = 0$ für $r = 2$. Die Formel (4. 6) ergibt für $i = r+1$ die Beziehung $S_{x^{(4)}} + g_2(x) S_{x^{(2)}} = 0$, $(x, 1) = 0$, die sich mit Rücksicht auf (c) in der Gestalt

$$Q_{x^{(2)}} = \beta Q_x^2, \qquad (x, 1) = 0, \tag{8. 2}$$

schreiben läßt. In (8. 1) und (8. 2) bedeutet x ein allgemeines Element von $\mathfrak{B}$. Nun sei umgekehrt eine schwach kommutativ-assoziative Algebra $\mathfrak{A}$ der Dimension $n \geqq 2$ gegeben. Die assoziativ-symmetrische Bilinearform (x, y) mit $(1, 1) = \alpha \neq 0$ sei nichtentartet, und für $Q_x = \frac{1}{2}(x, x)$ sei (8. 2) erfüllt. Dann muß sein

$$Q_{x^{(2)}} = \beta Q_x^2 + 2(x, 1) D_x, \tag{8. 3}$$

mit einer geeigneten kubischen Form D_x. Hierbei ist x ein allgemeines Element von $\mathfrak{A}$. Indem man x durch $x+y$ ersetzt, die kubischen Glieder in x auf beiden Seiten der neuen Gleichung (8. 3) vergleicht und beachtet, daß (x, y) bez. $(\circ)$ assoziativ-symmetrisch ist, findet man analog zu [6, p. 255]

$$(x^{(3)}, y) = \beta Q_x(x, y) + D_x(y, 1), \qquad (x, 1) = 0,$$

bzw., da (x, y) nichtentartet ist, wieder (8. 1). Folglich ist $\mathfrak{B}$ eine der Bedingung (c) genügende, spurenverträgliche Algebra vom Grad 2 oder 3. Wegen char $K \neq 2, 3$ genügt es, (8. 2) nur für die Elemente x von $\mathfrak{B}$ zu fordern (d. h., x ist nicht ein allgemeines Element, sondern eine Variable auf $\mathfrak{B}$). Denn da K wenigstens 5 Elemente enthält, ist die Eigenschaft (8. 2) gegenüber Grundkörpererweiterung von $\mathfrak{A}$ (insbesondere bei Adjunktion von Unbestimmten zu K) invariant. Somit besteht

Lemma 4. *Eine schwach kommutativ-assoziative Algebra $\mathfrak{A}$ der Dimension $n \geqq 2$ mit einer nichtentarteten assoziativ-symmetrischen Bilinearform (x, y) $((1, 1) = \alpha \neq 0)$ ist genau dann eine spurenverträgliche, der Bedingung* (c) *genügende Algebra vom Grad $r = 2$ oder 3, wenn* (8. 2) *für alle Elemente x von $\mathfrak{B}$ mit $Q_x = \frac{1}{2}(x, x)$ erfüllt ist.*

Aus diesem Lemma geht hervor, daß durch die von T. A. Springer angegebenen Bedingungen [6, p. 254, (1), (2)] die kommutativen, spurenverträglichen, der Bedingung (c) mit $\beta = 1$ (und einer nichtentarteten quadratischen Form Q_x) genügenden Algebren vom Grad 2 und 3 gekennzeichnet werden. Die daran anschließende Strukturuntersuchung enthält dort allerdings eine den Fall $\alpha\beta = 2$ betreffende Lücke (vgl. die Bemerkung am Schluß von Abschnitt 1).

9. Aus Satz 1 ergibt sich im Hinblick auf (c)

Satz 3. *Genau die spurenverträglichen, der Bedingung* (c) *genügenden Algebren $\mathfrak{A}$ vom Grad* 2 *bzw.* 3 *haben eine Produktformel der Gestalt* (2. 1) *mit einer assoziativ-symmetrischen Bilinearform $g(x, y) = \alpha^{-1}(x, y)$ $(0 \neq \alpha \in K)$, wobei $\mathfrak{B} = K^{\perp}$ bez. der Verknüpfung $(\odot)$ eine kommutative Algebra ist, deren allgemeines Element der Gleichung*

$$x^2 = 0 \qquad (r = 2) \tag{9. 1}$$

bzw.

$$x^3 = \left(\frac{\alpha\beta}{2} - 1\right) g(x, x)\, x \qquad (r = 3) \tag{9. 2}$$

aber keiner Gleichung kleineren Grades genügt.

Die Struktur von $\mathfrak{B}(\odot)$ wird hier nur im Fall $r=3$, $\alpha\beta=2$ eingehender studiert. Dabei bleibt die Frage nach der Struktur von $\mathfrak{B}(\cdot)$ im allgemeinen offen. Daher soll von jetzt ab $\mathfrak{B}(\cdot)$ selbst (und damit auch $\mathfrak{A}$) schon als kommutativ, d. h. $\mathfrak{B}(\cdot)=\mathfrak{B}(\odot)$ vorausgesetzt werden. Dann handelt es sich darum, alle kommutativen Algebren $\mathfrak{B}(\cdot)$ mit $x^3=0$ und einer assoziativ-symmetrischen Bilinearform (x, y) zu bestimmen.

Die Lösung dieses Problems ließe sich mit den bei G. PICKERT [5] angegebenen Methoden in Angriff nehmen. Hier wird dagegen auf direktem Wege eine Familie von Lösungen mit speziellen Eigenschaften konstruiert.

10. Einige Angaben über die Struktur der Algebra $\mathfrak{B}=Ke_1+\ldots+Ke_n$ ($n=\dim_K \mathfrak{B}$) lassen sich mit Hilfe der allgemeinen Theorie der nichtassoziativen Systeme gewinnen. Bildet man mit den Produktkonstanten $\omega^i_{jk}\in K$ $(i, j, k, =1, \ldots, n)$ von $e_je_k=\sum_{i=1}^{n}\omega^i_{jk}e_i$ die Matrix $\Omega_{\mathfrak{B}}(x)=\left(\sum_{j=1}^{n}\omega^i_{jk}\xi_j\right)$, so folgt aus der mit $x^3=0$ (unter Beachtung der Voraussetzung bez. char K) äquivalenten trilinearen Relation

$$(10.1)\qquad x\cdot(y\cdot z)+y\cdot(z\cdot x)+z\cdot(x\cdot y)=0 \qquad (x, y, z\in\mathfrak{B})$$

die Gleichung

$$(10.2)\qquad \Omega_{\mathfrak{B}}(x)\Omega_{\mathfrak{B}}(y)+\Omega_{\mathfrak{B}}(y)\Omega_{\mathfrak{B}}(x)+\Omega_{\mathfrak{B}}(x\cdot y)=0,$$

wonach $\mathfrak{B}$ (wie die assoziativen und die LIEschen Algebren) eine ‚shrinkable' Algebra vom Index 1 im Sinne von A. A. ALBERT [1, p. 548] ist. Wird im Bereich $\mathfrak{B}^\Omega$ der Matrizen $\Omega_{\mathfrak{B}}$ das Jordanprodukt

$$\Omega_{\mathfrak{B}}(x)\circ\Omega_{\mathfrak{B}}(y)=\tfrac{1}{2}\{\Omega_{\mathfrak{B}}(x)\Omega_{\mathfrak{B}}(y)+\Omega_{\mathfrak{B}}(y)\Omega_{\mathfrak{B}}(x)\}$$

eingeführt, so erweist sich die Zuordnung $x\to-2\Omega_{\mathfrak{B}}(x)$ als eine (spezielle) Darstellung von $\mathfrak{B}$ in der speziellen Jordanalgebra $\mathfrak{B}^\Omega$. Mit

$$-\tfrac{1}{2}\Omega_{\mathfrak{B}}(x\cdot x)=\Omega_{\mathfrak{B}}(x)\circ\Omega_{\mathfrak{B}}(x)=\Omega_{\mathfrak{B}}(x)\Omega_{\mathfrak{B}}(x)=\Omega^2_{\mathfrak{B}}(x),\ \tfrac{1}{4}\Omega_{\mathfrak{B}}\big(x\cdot(x\cdot x)\big)=\Omega^3_{\mathfrak{B}}(x)$$

und unter Beachtung von $x^3=0$ wird daher $\Omega^3_{\mathfrak{B}}(x)=0$. Wegen

$$-2\Omega^3_{\mathfrak{B}}(x)\mathfrak{y}=-2\Omega^2_{\mathfrak{B}}(x)\Omega_{\mathfrak{B}}(x)\mathfrak{y}=\Omega_{\mathfrak{B}}(x\cdot x)\mathfrak{z}\ \ (z=x\cdot y),\ \ \Omega^3_{\mathfrak{B}}(x)\mathfrak{y}=0,\text{[2]}$$

ist $(x\cdot x)\cdot(x\cdot y)=0$. Andererseits folgt aus (10.1) für $z=x\cdot x$ die Gleichung $x\cdot\big(y\cdot(x\cdot x)\big)+(x\cdot x)\cdot(x\cdot y)=0$, so daß $x\cdot\big(y\cdot(x\cdot x)\big)=(x\cdot y)\cdot(x\cdot y)=0$. Daraus erkennt man, daß $\mathfrak{B}$ eine Jordanalgebra sein muß. Da in $\mathfrak{B}$ wegen $x^3=0$ jedes Element nilpotent ist, so ist $\mathfrak{B}$ selbst nach [1, Satz 2 und 3] streng nilpotent (d. h. für eine feste Zahl k verschwindet jedes Produkt von k Elementen). Ebenso ist der von $\mathfrak{B}^\Omega$ erzeugte assoziative Matrizenring $\mathfrak{B}^*$ nilpotent.

---

[2]) $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ bezeichen die Spaltenvektoren der Komponenten von x, y und z bez. der Basis e_i.

11. Weitergehende Aussagen über $\mathfrak{B}$ ermöglicht die Untersuchung der Teilalgebra $\mathfrak{B}^2$. Da $\mathfrak{B}$ streng nilpotent ist, so gilt sicher $\dim_K \mathfrak{B}^2 < n$. Es sei

$$\mathfrak{B}^2 \subseteqq \mathfrak{C} = Ks^{(1)} + \dots + Ks^{(m)}, \tag{11.1}$$

mit $s^{(h)} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{hi} e_i$, wo (σ_{hi}) eine Matrix vom Rang $m < n$ über K ist. Weil $\mathfrak{B}$ kommutativ ist, so sind die Koeffizienten $g_h(x, y) \in K$ in

$$x \cdot y = \sum_{h=1}^{m} g_h(x, y) s^{(h)} \qquad (x, y \in \mathfrak{B}) \tag{11.2}$$

symmetrische Bilinearformen. Mit der Abkürzung

$$x_y = y_x = g(x, y) \qquad (x, y \in \mathfrak{B}) \tag{11.3}$$

besteht wegen der Assoziativität von $g(x, y)$ die Gleichung

$$x_{y \cdot z} = z_{x \cdot y} \qquad (x, y, z \in \mathfrak{B}) \tag{11.4}$$

Aus (11.2), (11.4) folgt

$$\sum g_k(y, z) s_x^{(k)} = \sum g_l(x, z)\, s_y^{(l)} = \sum g_h(x, y) s_z^{(h)} \qquad \left(s_x^{(k)} = y_x|_{y = s^{(k)}}\right). \tag{11.5}$$

Nimmt man weiter an, daß $g(x, y)$ nichtentartet ist, so wird $\left(\sum_i g(e_i, e_j)\sigma_{hi}\right)$ eine Matrix vom Rang m, und dann besitzt das Gleichungssystem

$$s_{z_k}^{(h)} = \sum_{i,j} g(e_i, e_j) \sigma_{hi} \zeta_{kj} = \delta_{hk} \qquad (h = 1, \dots, m) \tag{11.6}$$

für jedes k $(1, \dots, m)$ ein Lösungssystem $\zeta_{k1}, \dots, \zeta_{kn}$, das die Komponenten eines gewissen Elementes z_k bez. der Basis e_i darstellen möge. Damit ergeben sich auf Grund von (11.5) nacheinander die Gleichungen

$$\sum g_k(y, z_h) s_x^{(k)} = \sum g_l(x, z_h) s_y^{(l)} = g_h(x, y), \tag{11.7}$$

$$\sum g_l(z_h, z_k) s_y^{(l)} = g_k(z_h, y) \tag{11.8}$$

und

$$g_h(x, y) = \sum \psi_{hkl} s_x^{(k)} s_y^{(l)}, \tag{11.9}$$

mit

$$\psi_{hkl} = g_l(z_h, z_k). \tag{11.10}$$

Nach (11.8), (11.10) gelten die Relationen

$$\psi_{hkl} = \psi_{lkh} = \psi_{lhk}. \tag{11.11}$$

Man hat somit

Satz 4. *Es sei $x_y = g(x, y)$ eine nichtentartete symmetrische Bilinearform. Wenn $\mathfrak{B}$ eine kommutative Algebra mit* (11.1), (11.4) *ist, so besteht die Produktformel* (11.2) *mit* (11.9.), (11.11). *Ist umgekehrt eine Matrix (σ_{hi}) vom Rang m und eine bilineare Matrix (ψ_{hkl}) mit* (11.11) *gegeben und wird in $\mathfrak{B}$ durch die Produktformel* (11.2) *mit* (11.9) *eine kommutative Verknüpfung* $(\cdot)$ *eingeführt, so ist $g(x, y)$ assoziativ auf $\mathfrak{B}$, und $\mathfrak{B}^2 \subseteqq \mathfrak{C}$.*

Da es um das Konstruktionsproblem geht, müssen $\mathfrak{B}^2$ und $\mathfrak{C}$ zunächst weiter nebeneinander betrachtet und entsprechend $\dim_K \mathfrak{B}^2$ und $m(=\dim_K \mathfrak{C})$ unterschieden werden. Bedingungen, unter denen $\mathfrak{B}^2=\mathfrak{C}$ wird, finden sich in Abschnitt 13.

12. Die bilineare Substitution (11. 9) kann in der Form

$$\begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ \vdots \\ g_m(x,y) \end{pmatrix} = \Psi_x \mathfrak{s}_y = \Psi_y \mathfrak{s}_x \tag{12. 1}$$

geschrieben werden, wo

$$\begin{pmatrix} s_x^{(1)} \\ \vdots \\ s_x^{(m)} \end{pmatrix} = \mathfrak{s}_x = SG\mathfrak{x},$$

mit $S=(\sigma_{hi})$, $G=\big(g(e_i,e_j)\big)$, und wo Ψ_x die $(m\times m)$-Matrix

$$\Psi_x = \Big(\sum_k \psi_{hkl} s_x^{(k)}\Big) \tag{12. 2}$$

bedeutet. Da zwischen den Spaltenvektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^s$ der Komponenten eines Elementes $x=\Sigma\xi_i e_i$ von $\mathfrak{C}$ bez. der Basis e_i bzw. $s^{(h)}$ der Zusammenhang $\mathfrak{x}=S\mathfrak{x}^s$ besteht, so erhält man die Gleichung

$$\mathfrak{s}_x = SG\mathfrak{x} = SG\dot{S}\mathfrak{x}^s \qquad (x\in\mathfrak{C}). \tag{12. 3}$$

Mit Benutzung der Formel (12. 1) für den Komponentenvektor des Produktes $x\cdot y$ bez. der Basis $s^{(h)}$ ergibt (12. 3) die Beziehung

$$\mathfrak{s}_{x\cdot y} = SG\dot{S}\Psi_x \mathfrak{s}_y = SG\dot{S}\Psi_y \mathfrak{s}_x. \tag{12. 4}$$

Indem man wiederum (12. 1) anwendet, bekommt man

$$\Psi_{x\cdot y}\mathfrak{s}_z = \Psi_z SG\dot{S}\Psi_x \mathfrak{s}_y = \Psi_z SG\dot{S}\Psi_y \mathfrak{s}_x, \tag{12. 5}$$

woraus durch Vertauschung von y und z bzw. x und z

$$\Psi_{x\cdot z}\mathfrak{s}_y = \Psi_y SG\dot{S}\Psi_x \mathfrak{s}_z,\quad \Psi_{z\cdot y}\mathfrak{s}_x = \Psi_x SG\dot{S}\Psi_y \mathfrak{s}_z \tag{12. 6}$$

entsteht. Wenn man (11. 6) berücksichtigt, findet man aus (12. 6) die mit (10. 1) äquivalente Beziehung

$$\Psi_{x\cdot y} + \Psi_x SG\dot{S}\Psi_y + \Psi_y SG\dot{S}\Psi_x = 0. \tag{12. 7}$$

Da sowohl $\Psi_x=0$ wie $\Omega_{\mathfrak{B}}(x)=0$ gleichbedeutend ist mit $x\cdot y=0$ für alle $y\in\mathfrak{B}$, so ist die Zuordnung $\Omega_{\mathfrak{B}}(x)\to\Psi_x (x\in\mathfrak{B})$ eineindeutig. Außerdem folgt aus (10. 2), (12. 7), daß diese Zuordnung ein Isomorphismus wird, wenn man im Bereich $\mathfrak{B}^\Psi$ der Matrizen $\Psi_x (x\in\mathfrak{B})$ gemäß

$$\Psi_x \times \Psi_y = \tfrac{1}{2}(\Psi_x SG\dot{S}\Psi_y + \Psi_y SG\dot{S}\Psi_x) \tag{12. 8}$$

eine Verknüpfung ($\times$) definiert. $\mathfrak{B}^\Psi$ ist somit isomorph zu der speziellen Jordanalgebra $\mathfrak{B}^\Omega$ der Matrizen $\Omega_{\mathfrak{B}}(x)$.

13. Das folgende Lemma enthält ein allgemeines Kriterium für das Eintreten von $\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{C}$.

Lemma 5. *$\mathfrak{B}^2$ und $\mathfrak{C}$ stimmen genau dann überein, wenn die quadratischen Formen $g_h(x, x)$ linear unabhängig bez. K sind, m. a. W., wenn also die Abbildung $\mathfrak{t} = (\tau_1, \ldots, \tau_m) \to (\sum_h \psi_{hkl}\tau_h)$ eindeutig, d. h. der Rang von $(\sum_h \Psi_{hkl}\tau_h)$ für $\mathfrak{t} \neq 0$ stets $\geqq 1$ ist.*

Beweis. Wenn die durch (11. 2) definierten quadratischen Formen $g_h(x, x)$ einer nichttrivialen linearen Relation $\sum \tau_h g_h(x, x) = 0$ genügen, so folgt

$$\sum \tau_h g_h(x, y) = \tfrac{1}{2} \sum \tau_h \{g_h(x+y, x+y) - g_h(x, x) - g_h(y, y)\} = 0.$$

Ist etwa $\tau_1 = -1$, so findet man $g_1(x, y) = \sum_{h>1} \tau_h g_h(x, y)$ und

$$x \cdot y = \sum_{h>1} g_h(x, y)(\tau_h s^{(1)} + s^{(h)}),$$

so daß $\dim_K \mathfrak{B}^2 < m$ ist. Wenn umgekehrt $\dim_K \mathfrak{B}^2 < m$, so müssen die Komponenten aller Elemente von $\mathfrak{B}^2$ (bez. der Basis $s^{(h)}$) bekanntlich wenigstens einer nichttrivialen linearen Relation genügen; das gilt insbesondere auch für die Komponenten $g_h(x, y)$ von $x \cdot y$.

Lemma 6. *Wenn $|\Psi_x| \neq 0$, so ist $x \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{B}^2 = \mathfrak{C}$ und umgekehrt.*

Beweis. Nach (12. 1) ist $x \cdot y = z$ äquivalent mit $\mathfrak{z}^s = \Psi_x SG\mathfrak{y}$, falls $\mathfrak{z}^s$ der Komponentenvektor von z bez. $s^{(h)}$ ist. Da Ψ_x und G nichtsingulär sind, haben S, $\Psi_x SG$ und auch die um die Spalte $\mathfrak{z}^s$ erweiterte Matrix $(\Psi_x SG, \mathfrak{z}^s)$ den Höchstrang m. Somit existiert zu gegebenem $z \in \mathfrak{C}$ bei festem x stets eine Lösung $\mathfrak{y}$. Wenn umgekehrt ein Element x in $\mathfrak{B}$ vorhanden ist, mit $x \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, so kann der Rang von $\Psi_x SG$ und damit auch von Ψ_x nicht kleiner als m sein.

14. In diesem Abschnitt soll untersucht werden, welche Folgerungen sich aus der Annahme ziehen lassen, daß die Matrix $\Psi_x = (\psi_{hl})$ den Rang 1 hat. Dann muß ein Index q mit $\psi_{qq} \neq 0$ existieren, während andererseits stets $\psi_{hl}\psi_{qq} - \psi_{hq}\psi_{ql}$ Null ist. Somit wird $\psi_{hl} = \psi_{hq}\psi_{ql}\psi_{qq}^{-1}$ und insbesondere $\psi_{hh} = (\psi_{hq})^2\psi_{qq}^{-1}$, folglich, da die Elemente ψ_{hl} Linearformen in x sind, $\psi_{hq} = \tau_h\psi_{qq}$, mit von x unabhängigen Faktoren τ_h, und

$$\psi_{hl} = \tau_h \tau_l \psi_{qq}. \tag{14. 1}$$

Nach (11. 11) und (14. 1) ist außerdem

$$\psi_{hkl} = \tau_h \tau_l \psi_{qkq} = \tau_k \tau_l \psi_{qhq}$$

und

$$\psi_{qkq} = a\tau_k \ \ (a = \tau_q \psi_{qqq}), \ \ \psi_{qq} = a \sum \tau_k s_x^{(k)}.$$

Danach nimmt die Produktformel (11. 2) folgende Gestalt an,

$$x \cdot y = a \sum \tau_k s_x^{(k)} \sum \tau_l s_y^{(l)} \sum \tau_h s^{(h)}. \tag{14. 2}$$

Umgekehrt bedeutet $\dim_K \mathfrak{B}^2 = 1$, daß

$$x \cdot y = \sum g_h(x, y) s^{(h)} = g(x, y) \sum \lambda_h s^{(h)},$$

mit von x und y unabhängigen Faktoren $\lambda_h \in K$, sein muß. Es folgt $g_h(x, y) = \lambda_h g(x, y)$, d. h., Ψ_x ist vom Rang 1. Somit besteht

Lemma 7. *In einer kommutativen Algebra* $\mathfrak{B}$ *mit* (11. 4) *gilt genau dann* $\dim_K \mathfrak{B}^2 = 1$, *wenn* Ψ_x *den Rang* 1 *hat.*

15. Wenn $\mathfrak{B}$ der Bedingung $x^3 = 0$ genügen soll, so muß

$$(x \cdot x) \cdot x = \sum g_j(x, x) g_h(s^{(j)}, x) s^{(h)} \tag{15. 1}$$

verschwinden. Man hat also die Gleichungen

$$\sum_j g_j(x, x) g_h(s^{(j)}, x) = 0. \tag{15. 2}$$

Da der Fall $\mathfrak{B}^2 = 0$ (bzw. die dazu äquivalente Identität $x \cdot x = 0$) hier ausgeschlossen wird, muß die Determinante der in (15. 2) als Koeffizienten auftretenden Linearformen $g_h(s^{(j)}, x)$ Null sein. Wie der aus (11. 9) sich ergebende Ausdruck

$$g_h(s^{(j)}, x) = \sum \psi_{hkl} s_x^{(k)} s_{s^{(j)}}^{(l)} \tag{15. 3}$$

zeigt, ist

$$\big(g_h(s^{(j)}, x)\big) = \Psi_x S G \dot{S}. \tag{15. 4}$$

Diese Formel kann auch so hergeleitet werden, daß man zuerst mittels (12. 1) die Gleichung $\big(g_h(s^{(j)}, x)\big) = \Psi_x(\mathfrak{s}_{s^{(1)}}, \ldots, \mathfrak{s}_{s^{(m)}})$ bestätigt und anschließend verifiziert, daß nach (12. 3) $(\mathfrak{s}_{s^{(1)}}, \ldots, \mathfrak{s}_{s^{(m)}}) = SG\dot{S}E = SG\dot{S}$ ist. Demnach gilt

Lemma 8. *Eine notwendige Bedingung dafür, daß in einer kommutativen Algebra mit* (11. 1), (11. 4) *stets* $(x \cdot x) \cdot x = 0$ *ist, lautet: Es ist*

$$|SG\dot{S}| = 0 \tag{α}$$

oder

$$|\Psi_x| = 0 \quad \textit{für alle} \quad x \in \mathfrak{B}. \tag{β}$$

Im assoziativen Spezialfall lässt sich diese Bedingung noch verschärfen (vgl. Satz 5).

16. Wie aus (10. 1) hervorgeht, ist eine kommutative Algebra $\mathfrak{B}$ mit $x^3 = 0$ (und (11. 1), (11. 4)) genau dann assoziativ, wenn $(x \cdot y) \cdot z = 0$ $(x, y, z \in \mathfrak{B})$. Gleichbedeutend damit ist $\Omega_{\mathfrak{B}}(x \cdot y) = 0$. Im assoziativen Fall ist also stets

$$\Omega_{\mathfrak{B}}(x) \circ \Omega_{\mathfrak{B}}(y) = 0, \ \Psi_x \times \Psi_y = 0;$$

wegen $\Omega_{\mathfrak{B}}(x \cdot y) = \Omega_{\mathfrak{B}}(x) \Omega_{\mathfrak{B}}(y)$ und (12. 6) mit $\Psi_{z \cdot y} = 0$ wird dann sogar

$$\Omega_{\mathfrak{B}}(x) \Omega_{\mathfrak{B}}(y) = 0, \ \Psi_x S G \dot{S} \Psi_y = 0. \tag{16. 1}$$

Umgekehrt folgt aus (12. 5), (15. 1_2) wieder $(x \cdot y) \cdot z = 0$. Zieht man noch Satz 4 und Lemma 6 in Betracht, so findet man (unter der Voraussetzung char $K \neq 2, 3$)

Satz 5. *Vorausgesetzt sei* $|G| \neq 0$ *und* $|\Psi_{x'}| \neq 0$ *(für geeignetes* x'*). Dann haben genau die kommutativ-assoziativen Algebren* $\mathfrak{B}_{n,m}$ *mit* $\dim_K \mathfrak{B}_{n,m} = n$, $\dim_K \mathfrak{B}_{n,m}^2 = m = \dim_K \mathfrak{C}$, $x^3 = 0$ *und* (11. 4), *die Produktformel*

$$x \cdot y = \sum_{h,k,l,} \psi_{hkl} s_x^{(k)} s_y^{(l)} s^{(h)} \qquad \Big(s_x^{(k)} = \sum g(e_i, e_j) \sigma_{ki} \xi_j\Big), \tag{16. 2}$$

mit Faktoren ψ_{hkl}, die bez. aller drei Indizes symmetrisch sind, und zugleich die Eigenschaft, daß

$$SG\dot{S}=(\sum_{i,j} g(e_i, e_j)\sigma_{ki}\sigma_{lj})=0. \tag{16. 3}$$

In diesen Algebren gilt ferner $\mathfrak{B}_{n,m}^2=x'\cdot\mathfrak{B}_{n,m}$ sowie $\mathfrak{B}_{n,m}^3=(0)$.

Der Spezialfall $m=1$ dieses Satzes ist zugleich eine spezielle Folgerung von (14. 2) (bzw. Lemma 7) und Lemma 8, wobei die Assoziativität von $\mathfrak{B}_{n,1}$ nicht in die Voraussetzungen aufgenommen zu werden braucht, sondern als weitere Folgerung erscheint.

Aus den Sätzen 3 und 5 ergibt sich

Satz 6. *Eine Familie von $(n+1)$-dimensionalen kommutativen Algebren $\mathfrak{A}_{n+1,m}$, die für $g(x,x)=x_0^2+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i x_i^2$ $(\gamma_1\dots\gamma_n\neq 0)$ den in Satz 3 angegebenen Bedingungen mit $\alpha\in K$, $\beta=2\alpha^{-1}$ $(r=3)$ genügen, erhält man, wenn folgende Produktformel postuliert wird,*

$$xy=\xi_0\eta_0+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\xi_i\eta_i+\xi_0\sum_{j=1}^{n}\eta_j e_j+\eta_0\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k+\sum_{i=1}^{n}\sum_{h,k,l=1}^{m}\psi_{hkl}s_x^{(k)}s_y^{(l)}\sigma_{hi}e_i, \tag{16. 4}$$

$$s_x^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\sigma_{ki}\xi_i,$$

wobei (ψ_{hkl}) eine $(m\times m\times m)$-Matrix mit (11. 11), $|\sum_k\psi_{hkl}s_{x'}^{(k)}|\neq 0$ (für mindestens ein x' mit $\xi_0'=0$), $S=(\sigma_{hi})$ eine $(m\times n)$-Matrix vom Rang m und $S\,\mathrm{diag}\,(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\dot{S}=0$. Da

$$D_x=\sum_{h,k,l}\Psi_{hkl}s_x^{(h)}s_x^{(k)}s_x^{(l)}(\neq 0) \quad \textit{für} \quad \xi_0=0, \tag{16. 5}$$

sind diese Algebren nicht potenzassoziativ.

Hierin bedeutet $\mathrm{diag}\,(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ die Diagonalmatrix mit der Diagonalen $\gamma_1,\dots,\gamma_n$.

Literatur

[1] A. A. Albert, A structure theory for Jordan algebras, *Ann. of Math.* (2) **48** (1947), 546—567.

[2] A. A. Albert, A theory of trace-admissible algebras, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **35** (1949), 317—322.

[3] H.-J. Hoehnke, Über komponierbare Formen und konkordante hyperkomplexe Größen, *Math. Z.* **70** (1958), 1—12.

[4] N. Jacobson, Some groups of transformations defined by Jordan algebras. I, *J. Reine Angew. Math.* **201** (1959), 178—195.

[5] G. Pickert, Neue Methoden in der Strukturtheorie der kommutativ-assoziativen Algebren, *Math. Ann.* **116** (1939), 217—280.

[6] T. A. Springer, On a class of Jordan algebras, *Indag. Math.* **21** (1959), 254—264.

[7] J. L. Zemmer, Some $\mathfrak{S}$ division algebras, *Canad. J. Math.* **11** (1959), 51—58.

(Received Januar 18, 1962.)