Eine allgemeinere Methode in der Theorie der Funktionalgleichungen, I

Von E. VINCZE (Miskolc)

§ 1. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wollen wir eine allgemeinere Methode skizzieren, mit der eine wichtige und oft vorkommende Klasse von Funktionalgleichungen leicht und gut übersichtlich auflösbar bzw. auf einfachere Funktionalgleichungen zurückführbar ist. Wie diese Methode angewendet wird, werden wir auf einigen typischen, teils schon bekannten Beispielen zeigen. Diese Methode und einige Beispiele wurden schon früher auch in [19] behandelt.

1. Wir betrachten die folgenden aus (reellen oder) komplexen Funktionen $F_\nu(z)$ $(\nu=1, 2, \dots, n)$ bestehenden Funktionendeterminanten

$$\begin{vmatrix} F_1(z_1) & F_2(z_1) \dots F_n(z_1) \\ F_1(z_2) & F_2(z_2) \dots F_n(z_2) \\ \dots & \dots \\ F_1(z_n) & F_2(z_n) \dots F_n(z_n) \end{vmatrix},$$

die wir kurz mit

$$\Delta[F_1(z_1), F_2(z_2), \dots, F_n(z_n)]$$

(also nur die in der Hauptdiagonalen stehenden Elemente ausgeschrieben), oder noch kürzer mit

$$\Delta(F_1, F_2, \dots, F_n)$$

bezeichnen. Bei dieser letzteren Bezeichnung setzen wir immer voraus, daß *verschiedene Veränderliche z_ν und nur diese* in den Reihen der Determinanten stehen. Der Definitionsbereich der Funktionen $F_\nu(z)$ $(\nu=1, 2, \dots, n)$ sei vorläufig eine ganz beliebige (nicht-leere) Menge Q'. Wir bemerken, daß *alle unsere Betrachtungen auch für Funktionen gültig bleiben, deren Werte in beliebigen kommutativen Ringen liegen, wo man Determinanten bilden kann.*

Es seien μ und ν $(\mu\neq\nu;\ 1\leqq\mu,\nu\leqq n)$ beliebige Indizes und es sei α eine beliebige komplexe Konstante. Auf Grund der wohlbekannten Eigenschaften der Determinanten ist die Richtigkeit der folgenden Identitäten offenbar:

$$(1.1)\qquad \Delta(F_1, \dots, \underset{\smile}{\underset{\mu}{F_\mu}}, \dots, \underset{\smile}{\underset{\nu}{F_\nu}}, \dots, F_n) = -\Delta(F_1, \dots, \underset{\smile}{\underset{\mu}{F_\nu}}, \dots, \underset{\smile}{\underset{\nu}{F_\mu}}, \dots, F_n);$$

$$(1.2)\qquad \Delta(F_1, \dots, F_\mu, \dots, F_\nu, \dots, F_n) = \Delta(F_1, \dots, F_\mu+\alpha F_\nu, \dots, F_\nu, \dots, F_n);$$

$$(1.3)\qquad \Delta(F_1, \dots, \alpha F_\mu, \dots, F_\nu, \dots, F_n) = \alpha\Delta(F_1, \dots, F_\mu, \dots, F_\nu, \dots, F_n) = \\ = \Delta(F_1, \dots, F_\mu, \dots, \alpha F_\nu, \dots, F_n);$$

$$(1.4)\qquad \textit{aus}\quad F_\mu(z) = \alpha F_\nu(z)\quad \textit{folgt}\quad \Delta(F_1, \dots, F_\mu, \dots, F_\nu, \dots, F_n) = 0;$$

$$(1.5)\qquad \Delta(F_1, \dots, F_{\mu-1}, F_\mu, F_{\mu+1}, \dots, F_n) + \Delta(F_1, \dots, F_{\mu-1}, F_\nu, F_{\mu+1}, \dots, F_n) = \\ = \Delta(F_1, \dots, F_{\mu-1}, F_\mu + F_\nu, F_{\mu+1}, \dots, F_n);$$

$$(1.6)\qquad \Delta[F_1(z_1), \dots, F_{n-1}(z_{n-1}), F_n(z_n)] = (-1)^{n-1}\{F_n(z_1)\Delta[F_1(z_2), \dots, F_{n-1}(z_n)] - \\ - F_n(z_2)\Delta[F_1(z_1), F_2(z_3), \dots, F_{n-1}(z_n)] + \dots - \dots + \\ + (-1)^{n-1}F_n(z_n)\Delta[F_1(z_1), \dots, F_{n-1}(z_{n-1})]\};$$

bzw.

$$(1.6')\qquad \Delta[F_1(z_1), \dots, F_n(z_n)] = (-1)^{n-1}\{F_1(z_n)\Delta[F_2(z_1), F_3(z_2), \dots, F_n(z_{n-1})] - \\ - F_2(z_n)\Delta[F_1(z_1), F_3(z_2), \dots, F_n(z_{n-1})] + \dots - \dots + \\ + (-1)^{n-1}F_n(z_n)\Delta[F_1(z_1), F_2(z_2), \dots, F_{n-1})]\}.$$

2. Es gilt das folgende

Lemma. *Es sei $F_\mu(z)(z \in Q')$ eine beliebige komplexe Funktion. Genügen die Funktionen $F_1(z), \dots, F_{kn+n}(z)$ $(z \in Q')$ für alle $z_1, z_2, \dots, z_n \in Q'$ der Gleichung*

$$(1.7)\qquad \sum_{\nu=0}^{k} \Delta[F_{\nu n+1}(z_1), F_{\nu n+2}(z_2), \dots, F_{\nu n+n}(z_n)] = 0,$$

dann ist auch die Gleichung

$$(1.8)\qquad \sum_{\nu=0}^{k} \Delta[F_{\nu n+1}(z_1), F_{\nu n+2}(z_2), \dots, F_{\nu n+n}(z_n), F_\mu(z_{n+1})] = 0$$

für alle $z_1, z_2, \dots, z_{n+1} \in Q'$ erfüllt.

Beweis. Auf Grund von (1. 6) gilt für alle $\nu = 0, 1, 2, \dots, k$

$$\Delta[F_{\nu n+1}(z_1), F_{\nu n+2}(z_2), \dots, F_{\nu n+n}(z_n), F_\mu(z_{n+1})] = \\ = (-1)^n\{F_\mu(z_1)\Delta[F_{\nu n+1}(z_2), F_{\nu n+2}(z_3), \dots, F_{\nu n+n}(z_{n+1})] - \\ - F_\mu(z_2)\Delta[F_{\nu n+1}(z_1), F_{\nu n+2}(z_3), \dots, F_{\nu n+n}(z_{n+1})] + \dots - \dots + \\ + (-1)^n F_\mu(z_{n+1})\Delta[F_{\nu n+1}(z_1), F_{\nu n+2}(z_2), \dots, F_{\nu n+n}(z_n)]\}.$$

Wegen (1. 7) ist also

$$\sum_{\nu=0}^{k} \Delta[F_{\nu n+1}(z_1), F_{\nu n+2}(z_2), \dots, F_{\nu n+n}(z_n), F_\mu(z_{n+1})] = \\ = (-1)^n\{F_\mu(z_1)\sum_{\nu=0}^{k}\Delta[F_{\nu n+1}(z_2), F_{\nu n+2}(z_3), \dots, F_{\nu n+n}(z_{n+1})] - \\ - F_\mu(z_2)\sum_{\nu=0}^{k}\Delta[F_{\nu n+1}(z_1), F_{\nu n+2}(z_3), \dots, F_{\nu n+n}(z_{n+1})] + \dots - \dots + \\ + (-1)^n F_\mu(z_{n+1})\sum_{\nu=0}^{k}\Delta[F_{\nu n+1}(z_1), F_{\nu n+2}(z_2), \dots, F_{\nu n+n}(z_n)]\} = 0$$

w. z. b. w.

Im folgenden nennen wir die Gleichung (1. 8) „*die Erweiterung der Gleichung* (1. 7)".

3. Bezüglich der Abhängigkeit der Funktionen $F_1(z), F_2(z), \ldots, F_n(z)$ auf Q' ist die folgende Definition wohlbekannt:

Definition. *Auf Q' sind die komplexen Funktionen $F_1(z), F_2(z), \ldots, F_n(z)$ voneinander linear abhängig, wenn komplexe Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ existieren, so daß*

$$\alpha_1 F_1(z) + \alpha_2 F_2(z) + \ldots + \alpha_n F_n(z) \equiv 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu| > 0 \tag{1.9}$$

für alle $z \in Q'$ gilt.

T. Popoviciu [14] (vgl. auch H. Kiesewetter [10]) hat den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. *Wenn die komplexen Funktionen $F_\nu(z)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ für alle $z \in Q'$ der Gleichung*

$$\Delta[F_1(z_1), F_2(z_2), \ldots, F_n(z_n)] = 0 \tag{1.10}$$

genügen, dann und nur dann sind diese Funktionen auf Q' linear abhängig, d. h. es gilt (1. 9).

Der Vollständigkeit halber werden wir auch hier den Beweis geben.

Beweis. Setzen wir voraus, daß Q' mindestens n verschiedene Elemente hat (sonst ist die Aussage trivial), dann folgt (1. 10) aus (1. 9). Setzen wir nämlich in (1. 9) $z = z_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 F_1(z_1) + \ldots + \alpha_n F_n(z_1) = 0, \\ \alpha_1 F_1(z_2) + \ldots + \alpha_n F_n(z_2) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1 F_1(z_n) + \ldots + \alpha_n F_n(z_n) = 0 \end{array}\right\} \quad (z_\nu \neq z_\mu).$$

Da laut Voraussetzung dieses Gleichungssystem ein nichttriviales Lösungssystem α_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, n)$ hat, muß ihre Determinante verschwinden, also gilt (1. 10).

Jetzt beweisen wir, daß aus der Gleichung (1. 10) das Bestehen von (1. 9) folgt. Für den Fall $n = 1$ ist

$$\Delta[F_1(z_1)] = F_1(z_1) = 0,$$

also tatsächlich gilt $\alpha_1 F_1(z) = 0$ $(\alpha_1 \neq 0)$. Nunmehr nehmen wir an, daß die Behauptung schon für $n-1$ bewiesen ist und auch (1. 10) gilt, dann beweisen wir, daß (1. 9) auch für n gültig bleibt.

Wenn

$$\Delta[F_1(z_1), F_2(z_2), \ldots, F_{n-1}(z_{n-1})] = 0 \tag{1.11}$$

ist, dann folgt aus der Induktionsvoraussetzung

$$\alpha_1 F_1(z) + \alpha_2 F_2(z) + \ldots + \alpha_{n-1} F_{n-1}(z) \equiv 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{n-1} |\alpha_\nu| > 0$$

und somit

$$\alpha_1 F_1(z) + \ldots + \alpha_{n-1} F_{n-1}(z) + \alpha_n F_n(z) \equiv 0$$

für $\alpha_n=0$ bei beliebigem $F_n(z)$. Wenn dagegen (1. 11) nicht besteht, dann existieren konstante Elemente $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1} (\in Q')$, für die

$$\alpha_n=(-1)^{n-1}\Delta[F_1(\xi_1), F_2(\xi_2), \ldots, F_{n-1}(\xi_{n-1})]\neq 0$$

gilt. Nach unserer Voraussetzung gilt (1. 10), also ist auch speziell

$$\Delta[F_1(\xi_1), \ldots, F_{n-1}(\xi_{n-1}), F_n(z)]=0 \qquad (z\in Q')$$

gültig. Wegen (1. 6′) folgt also

$$F_1(z)\Delta[F_2(\xi_1), \ldots, F_n(\xi_{n-1})]-F_2(z)\Delta[F_1(\xi_1), F_3(\xi_2), \ldots, F_n(\xi_{n-1})]+\ldots-\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1}F_n(z)\Delta[F_1(\xi_1), \ldots, F_{n-1}(\xi_{n-1})]=\alpha_1F_1(z)+\alpha_2F_2(z)+\ldots+\alpha_nF_n(z)\equiv 0,$$

und da die Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nicht alle verschwinden ($\alpha_n\neq 0$), ist der Beweis vollendet.

4. (1. 9) spaltet sich auf die folgenden Unterfälle:

$$F_n(z)\equiv 0,$$
$$F_\nu(z)=\beta_{\nu+1}F_{\nu+1}(z)+\ldots+\beta_nF_n(z) \qquad (\nu=1, 2, \ldots, n-1),$$

wobei die β_ν ($\nu=2, 3, \ldots, n$) komplexe Konstanten bezeichnen.

Wir bemerken, daß in (1. 10) auch Parameter auftreten können; z. B. folgt aus

$$\Delta[F_1(z_1+\xi), F_2(z_2), \ldots, F_n(z_n)]=0$$

das Bestehen von

$$\alpha_1(\xi)F_1(z+\xi)+\alpha_2(\xi)F_2(z)+\ldots+\alpha_n(\xi)F_n(z)\equiv 0.$$

Daraus folgt, daß mindestens eine der Gleichungen

$$F_n(z)\equiv 0,$$
$$F_\nu(z)=\beta_{\nu+1}F_{\nu+1}(z)+\ldots+\beta_nF_n(z), \qquad (\nu=2, 3, \ldots, n-1)$$
$$F_1(z+\xi)=\beta_2(\xi)F_2(z)+\ldots+\beta_n(\xi)F_n(z) \qquad (\xi\in Q')$$

gilt, wobei β_ν ($\nu=3, 4, \ldots, n$) komplexe Konstanten, bzw. $\beta_\nu(\xi)$ ($\nu=2, 3, \ldots, n$) komplexe Funktionen bezeichnen.

5. Die Methode, die wir an Beispielen vorführen wollen, ist z. B. auf Gleichungen der Gestalt

$$F(x+y)=\sum_{\nu=1}^{n}G_\nu(x)H_\nu(y) \tag{1. 12}$$

bzw. auf ihre Spezialfälle anwendbar, wobei F, G_ν, H_ν ($\nu=1, 2, \ldots, n$) unbekannte, oder teils bekannte Funktionen sind. Bezüglich dieser Funktionalgleichung weisen wir auf die Arbeiten [1], [4], [5], [7], [8], [9], [11], [15], [16], [17], [18], [19] hin. Ein interessanter Spezialfall von (1. 12) ist

$$\sum_{\nu=1}^{n}G_\nu(x)H_\nu(y)=0,$$

den J. ACZÉL [3] ganz allgemein mit einer elementaren Methode gelöst hat (vgl. [2], [6], [12], [13]).

Bezüglich weiteren Literaturangaben weisen wir auf das Buch [1] von J. ACZÉL hin.

§ 2. Eine Verallgemeinerung der PEXIDERschen Funktionalgleichungen

Zuerst behandeln wir die Funktionalgleichung

$$F(z_1 * z_2) = G(z_1) + H(z_2) + K(z_1)L(z_2) \tag{2.1}$$

$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0'; \; F(z), G(z), H(z), K(z), L(z): Q_0' \to Q],$$

wobei Q_0' *eine solche beliebige Abelsche Halbgruppe* bezüglich der Operation $*$ (mit oder ohne Einselement) *bezeichnet, welche ein festes Element* $a \in Q_0'$ *besitzt, so dass die Gleichung* $a * z = \zeta$ *für beliebige* ζ *(mindestens) eine Lösung hat.* Weiter ist Q *eine Menge von komplexen Zahlen.* Diese Gleichung können wir als eine gemeinsame Verallgemeinerung der Pexiderschen Funktionalgleichungen

$$f_1(x+y) = g_1(x) + h_1(y),$$
$$f_2(x+y) = g_2(x)h_2(y)$$

und der von J. ACZÉL [1] behandelten Gleichung

$$f(x+y) = g(x)h(y) + k(y)$$

betrachten. Den Spezialfall von (2. 1) ,wo $z_1 * z_2 = z_1 + z_2$ ist, hat Z. DARÓCZY [4] schon behandelt und mit einer elementarer Methode ganz allgemein gelöst.

Wir beweisen den

Satz 2. *Die allgemeinsten komplexen Lösungen der auf* Q_0' *geltenden Funktionalgleichung* (2. 1) *sind die folgenden Funktionen:*

(a$_1$)
$$F(z) = \varphi(z) + \alpha_1,$$
$$G(z) = \varphi(z) - \alpha_3 K(z) + \alpha_2 + \tfrac{1}{2}\alpha_1,$$
$$H(z) = \varphi(z) + \tfrac{1}{2}\alpha_1 - \alpha_2,$$
$K(z)$ *eine beliebige komplexe Funktion,*
$$L(z) \equiv \alpha_3;$$

(a$_2$)
$$F(z) = \alpha_1\psi(z) + \varphi(z) + \alpha_2,$$
$$G(z) = \alpha_3\psi(z) + \varphi(z) + \alpha_4,$$
$$H(z) = \alpha_5\psi(z) + \varphi(z) + \alpha_6,$$
$$K(z) = \alpha_7\psi(z) + \alpha_8,$$
$$L(z) = \alpha_9\psi(z) + \alpha_{10},$$
$$\alpha_1 = \alpha_7\alpha_9, \quad \alpha_3 + \alpha_7\alpha_{10} = 0, \quad \alpha_5 + \alpha_8\alpha_9 = 0,$$
$$\alpha_2 = \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_8\alpha_{10};$$

$$(a_3)\qquad \begin{aligned} F(z)&=\alpha_1\varphi(z)^2+\alpha_2\varphi(z)+\varphi_1(z)+\alpha_3,\\ G(z)&=\alpha_1\varphi(z)^2+\varphi_1(z)+\alpha_4,\\ H(z)&=\alpha_1\varphi(z)^2+\alpha_5\varphi(z)+\varphi_1(z)+\alpha_6,\\ K(z)&=2\alpha_1\varphi(z)+\alpha_7,\\ L(z)&=\varphi(z)+\alpha_8,\end{aligned}$$

$$\alpha_2=2\alpha_1\alpha_8=\alpha_5+\alpha_7,\ \ \alpha_3=\alpha_4+\alpha_6+\alpha_7\alpha_8;$$

wobei $\varphi(z)$ und $\varphi_1(z)$ bzw. $\psi(z)$ beliebige den Cauchyschen Funktionalgleichungen

$$\varphi(z_1 * z_2)=\varphi(z_1)+\varphi(z_2), \tag{2.2}$$

$$\psi(z_1 * z_2)=\psi(z_1)\psi(z_2) \tag{2.3}$$

$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0'; \varphi(z), \psi(z): Q_0' \to Q]$$

genügende komplexe Funktionen bezeichnen und α_ν $(\nu=1, 2, \ldots, 10)$ beliebige komplexe Konstanten sind, die aber durch die obigen Zusammenhänge verbunden sind. Weitere Lösungen sind auch diejenige Funktionen $G(z)$, $H(z)$, $K(z)$, $L(z)$ und $F(z)$, die aus (a_1) durch gleichzeitige Vertauschung der Funktionen

$$G(z)\leftrightarrow H(z) \quad \textit{und} \quad K(z)\leftrightarrow L(z)$$

entstehen. Es gibt keine andere Lösung.

Beweis. Wegen der Symmetrie der linken Seite der Gleichung (2. 1) ist

$$G(z_1)+H(z_2)+K(z_1)L(z_2)=G(z_2)+H(z_1)+K(z_2)L(z_1),$$

d. h. mit der vorigen Bezeichnung können wir

$$\Delta(G, 1)+\Delta(1, H)+\Delta(K, L)=0 \tag{2.4}$$

schreiben. „Erweitern" wir jetzt diese Gleichung mit 1, dann folgt

$$\Delta(G, 1, 1)+\Delta(1, H, 1)+\Delta(K, L, 1)=0,$$

und wegen (1. 4)

$$\Delta(K, L, 1)=0.$$

Diese Gleichung besteht laut des Satzes 1 nur im Falle

$$\alpha_1\cdot K(z)+\alpha_2\cdot L(z)+\alpha_3\cdot 1\equiv 0,$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3=konst.)$$

d. h. wir müssen die folgende Fallunterscheidung treffen:

A.

$$L(z)\equiv\beta_1. \tag{2.5}$$

B.

$$K(z)=\beta_1+\beta_2 L(z) \qquad (\beta_1, \beta_2=konst.). \tag{2.6}$$

A. Setzen wir die Funktion (2. 5) in (2. 4) ein, dann folgt [vgl. (1. 1), (1. 3), (1. 5)]

$$\Delta(G, 1)+\Delta(1, H)+\Delta(K, \beta_1)=$$
$$=\Delta(G, 1)+\Delta(-H, 1)+\Delta(\beta_1 K, 1)=\Delta(G-H+\beta_1 K, 1)=0,$$

also ist

$$G(z)-H(z)+\beta_1 K(z)=2\beta_2 \qquad (\beta_2=konst.). \tag{2. 7}$$

Mit (2. 5) und (2. 7) ergibt sich aus (2. 1)

$$F(z_1 * z_2)=G(z_1)+G(z_2)+\beta_1 K(z_2)-2\beta_2+\beta_1 K(z_1)=$$
$$=[G(z_1)+\beta_1 K(z_1)-\beta_2]+[G(z_2)+\beta_1 K(z_2)-\beta_2],$$

die schon eine Pexidersche Gleichung ist.[1]) Die Lösung ist also tatsächlich

$$F(z)=\varphi(z)+2\beta_3,$$
$$G(z)+\beta_1 K(z)-\beta_2=\varphi(z)+\beta_3,$$

wobei $\varphi(z)$ der Cauchyschen Gleichung (2. 2) genügt und $K(z)$ eine beliebige komplexe Funktion bezeichnet. Aus (2. 7) und (2. 5) erhalten wir

$$H(z)=\varphi(z)+\beta_3-\beta_2,$$
$$L(z)\equiv\beta_1.$$

Dieses Lösungssystem ist eben (a_1). Damit ist der Fall **A.** erledigt.

B. Wir können uns leicht davon überzeugen, daß die Funktionen (a_2) und (a_3) die Gleichung (2. 1) nur mit den für die Konstanten oben ausgesprochenen Nebenbedingungen erfüllen. Im folgenden genügt es also, wenn wir zeigen, *daß alle Lösungen der Gleichung* (2. 1), *falls* $L(z)\not\equiv konst.$ *ist, die Form* (a_2) *oder* (a_3) *haben oder aus Lösungen der Gestalt* (a_1) *durch Vertauschen von G, K und H, L entstehen.*

Um dies zu beweisen, setzen wir die Funktion (2. 6) in (2. 4) ein, dann ergibt sich aus (1. 1), (1. 2), (1. 3) und (1. 5)

$$\Delta(G, 1)+\Delta(1, H)+\Delta(\beta_1+\beta_2 L, L)=$$
$$=\Delta(G, 1)+\Delta(-H, 1)+\Delta(-\beta_1 L, 1)=\Delta(G-H-\beta_1 L, 1)=0,$$

---

[1]) Die allgemeinen Lösungen der Pexiderschen Funktionalgleichungen

$$f_1(z_1 * z_2)=g_1(z_1)+h_1(z_2), \qquad f_2(z_1 * z_2)=g_2(z_1)h_2(z_2)$$

sind, wie man — z. B. mit der Methode dieser Note — leicht sieht,

$$f_1(z)=\varphi(z)+\alpha+\beta, \quad g_1(z_1)=\varphi(z_1)+\alpha, \quad h_1(z_2)=\varphi(z_2)+\beta,$$

bzw.

$$f_2(z)=\alpha\beta\psi(z), \quad g_2(z_1)=\alpha\psi(z_1), \quad h_2(z_2)=\beta\psi(z_2),$$

(sowie $f_2(z)\equiv 0$, $g_2(z)\equiv 0$, $h_2(z)$ beliebig und $f_2(z)\equiv 0$, $g_2(z)$ beliebig, $h_2(z)\equiv 0$), wobei α, β beliebige Konstanten und $\psi(z)$ bzw. $\varphi(z)$ beliebige, den Cauchyschen Funktionalgleichungen (2.2) bzw. (2.3) genügende Funktionen sind (vgl. [20]). Man muß bei diesen Pexiderschen Funktionalgleichungen auch die spezielle Eigenschaft von Q_0' (bezüglich der Lösbarkeit der Gleichung $a * z=\zeta$) ausnützen.

woraus

$$G(z)-H(z)-\beta_1 L(z)=\beta_3 \qquad (\beta_3=konst.) \tag{2.8}$$

folgt. Mit (2. 6) und (2. 8) erhalten wir aus der Gleichung (2. 1)

$$\begin{aligned} F(z_1 * z_2) &= G(z_1)+G(z_2)-\beta_1 L(z_2)-\beta_3+[\beta_1+\beta_2 L(z_1)]L(z_2)= \\ &= G(z_1)+G(z_2)+\beta_2 L(z_1)L(z_2)-\beta_3. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Auf Grund der Assoziativität und Kommutativität der Operation $z_1 * z_2$ ergibt (2. 9)

$$\begin{aligned} F(z_1 * \xi * z_2) &= G(z_1 * \xi)+G(z_2)+\beta_2 L(z_1 * \xi)L(z_2)-\beta_3= \\ &= G(z_1)+G(z_2 * \xi)+\beta_2 L(z_1)L(z_2 * \xi)-\beta_3, \end{aligned}$$

also gilt

$$\Delta[G(z_1 * \xi), 1]+\Delta[1, G(z_2)]+\Delta[L(z_1 * \xi), \beta_2 L(z_2)]=0. \tag{2.10}$$

„Erweitern" wir diese Gleichung mit 1, dann ergibt sich

$$\Delta[L(z_1 * \xi), \beta_2 L(z_2), 1]=0.$$

Da $L(z)\not\equiv konst.$ ist, genügt es hier die Fälle

B1.

$$\beta_2=0, \tag{2.11}$$

B2.

$$L(z * \xi)=M_1(\xi)L(z)+M_2(\xi) \tag{2.12}$$

zu untersuchen.

B1. Im Falle (2. 11) ist $L(z)$ beliebig und aus (2. 6) folgt $K(z)\equiv\beta_1$. Dieser Fall läßt sich wegen der Symmetrie von (2. 1) in den Funktionen $G(z)$, $K(z)$ und $H(z)$, $L(z)$ ebenso wie der Fall mit $L(z)\equiv\beta_1$ lösen und wir erhalten als allgemeine Lösung die aus (a_1) durch Vertauschen von G, K mit H, L erhaltenen Funktionen.

B2. Im Falle (2. 12) erhalten wir wegen der Symmetrie der linken Seite

$$M_1(z_1)L(z_2)+M_2(z_1)=M_1(z_2)L(z_1)+M_2(z_2),$$

$$\Delta(M_1, L)+\Delta(M_2, 1)=0. \tag{2.13}$$

„Erweitern" wir auch diese Gleichung mit 1, so folgt

$$\Delta(M_1, L, 1)=0.$$

Wegen $L(z)\not\equiv konst.$ genügt es hier nur den Fall

$$M_1(z)=\beta_4 L(z)+\beta_5 \qquad (\beta_4, \beta_5=konst.) \tag{2.14}$$

zu untersuchen.

Setzen wir dies in (2. 13) ein, dann ist

$$\begin{aligned} &\Delta(\beta_4 L+\beta_5, L)+\Delta(M_2, 1)=\Delta(\beta_5, L)+\Delta(M_2, 1)= \\ &=\Delta(-\beta_5 L, 1)+\Delta(M_2, 1)=\Delta(M_2-\beta_5 L, 1)=0, \end{aligned}$$

woraus wir

$$M_2(z) - \beta_5 L(z) = \beta_6 \qquad (\beta_6 = konst.) \tag{2.15}$$

erhalten. Mit den Gleichungen (2. 14) und (2. 15) ergibt sich aus (2.12)

$$L(z_1 * z_2) = [\beta_4 L(z_1) + \beta_5] L(z_2) + \beta_5 L(z_1) + \beta_6 . \tag{2.16}$$

Jetzt wollen wir auch für $G(z_1 * z_2)$ einen expliziten Ausdruck finden. Um dies zu erreichen, setzen wir die Gleichung (2. 16) in (2. 10) ein:

$$\begin{aligned} &\Delta[G(z_1 * \xi), 1] + \Delta[1, G(z_2)] + \\ &+ \Delta[\beta_4 L(z_1) L(\xi) + \beta_5 L(z_1) + \beta_5 L(\xi) + \beta_6 , \beta_2 L(z_2)] = \\ &= \Delta[G(z_1 * \xi), 1] + \Delta[-G(z_1), 1] + \Delta[\beta_5 L(\xi) + \beta_6 , \beta_2 L(z_2)] = \\ &= \Delta[G(z_1 * \xi) - G(z_1) - \beta_2 \beta_5 L(\xi) L(z_1) - \beta_2 \beta_6 L(z_1), 1] = 0, \end{aligned}$$

d. h. es gilt

$$G(z * \xi) - G(z) - \beta_2 \beta_5 L(z) L(\xi) - \beta_2 \beta_6 L(z) = M_3(\xi). \tag{2.17}$$

Vertauschen wir hier die Veränderlichen z und ξ, so ergibt sich

$$\Delta(G + \beta_2 \beta_6 L - M_3 , 1) = 0,$$

woraus

$$G(z) + \beta_2 \beta_6 L(z) - M_3(z) = \beta_7 \qquad (\beta_7 = konst.)$$

folgt. Also erhalten wir nach (2. 17)

$$\begin{aligned} G(z_1 * z_2) = \beta_2 \beta_5 L(z_1) L(z_2) + \beta_2 \beta_6 [L(z_1) + L(z_2)] + \\ + G(z_1) + G(z_2) - \beta_7 . \end{aligned} \tag{2.18}$$

Nunmehr kehren wir zur Gleichung (2. 16) zurück, wo wir die Fälle

B2. a.

$$\beta_4 \neq 0, \tag{2.19}$$

B2. b.

$$\beta_4 = 0 \tag{2.20}$$

untersuchen müssen.

B2.a. Im Falle (2. 19) folgt die Pexidersche Gleichung

$$\beta_4 L(z_1 * z_2) + \beta_5^2 - \beta_4 \beta_6 = [\beta_4 L(z_1) + \beta_5][\beta_4 L(z_2) + \beta_5],$$

woraus sich[1])

$$\beta_4 L(z) + \beta_5 = \psi(z), \quad \beta_5^2 - \beta_4 \beta_6 = \beta_5$$

ergeben, wobei $\psi(z)$ der Gleichung (2. 3) genügt. Also hat $L(z)$ tatsächlich die Form (a_2). Mit dieser Funktion ergibt sich die folgende Cauchysche Gleichung aus (2. 18):

$$\begin{aligned} &\beta_4^2 G(z_1 * z_2) - \beta_2 \beta_5 \psi(z_1 * z_2) + \beta_0 = \\ &= [\beta_4^2 G(z_1) - \beta_2 \beta_5 \psi(z_1) + \beta_0] + [\beta_4^2 G(z_2) - \beta_2 \beta_5 \psi(z_2) + \beta_0], \end{aligned}$$

wobei

$$\beta_0 = 2\beta_2\beta_5^2 - \beta_2\beta_5^3 - \beta_4^2\beta_7$$

ist. Es folgt also

$$\beta_4^2 G(z) - \beta_2\beta_5\psi(z) + \beta_0 = \beta_4^2\varphi(z),$$

wobei $\varphi(z)$ der Gleichung (2. 2) genügt, d. h. auch die Funktion $G(z)$ hat die Form (a_2). Nach (2. 6) und (2. 8) ist es offenbar, daß auch $K(z)$ und $H(z)$ von der Gestalt (a_2) sind. Gleichfalls erhalten wir aus (2. 9)

$$F(z_1 * z_2) = \varphi(z_1) + \frac{\beta_2\beta_5}{\beta_4^2}\psi(z_1) - \frac{\beta_0}{\beta_4^2} + \varphi(z_2) + \frac{\beta_2\beta_5}{\beta_4^2}\psi(z_2) - \frac{\beta_0}{\beta_4^2} +$$
$$+ \beta_2\left[\frac{1}{\beta_4}\psi(z_1) - \frac{\beta_5}{\beta_4}\right]\left[\frac{1}{\beta_4}\psi(z_2) - \frac{\beta_5}{\beta_4}\right] - \beta_3 =$$
$$= \varphi(z_1 * z_2) - \frac{\beta_2}{\beta_4^2}\psi(z_1 * z_2) - \frac{2\beta_0}{\beta_4^2} + \frac{\beta_2\beta_5^2}{\beta_4^2} - \beta_3,$$

also hat auch $F(z)$ tatsächlich die Form (a_2). Damit ist der Fall **B2.a** erleigt.

B2.b. Jetzt untersuchen wir den Fall (2. 20), d. h. $\beta_4 = 0$, so ergibt sich aus (2.16)

$$L(z) + \beta_6 = \varphi(z) \quad \text{und} \quad \beta_5 = 1,$$

d. h. $L(z)$ hat die Gestalt (a_3). Damit erhalten wir aus (2. 18)

$$G(z_1 * z_2) - \tfrac{1}{2}\beta_2\varphi(z_1 * z_2)^2 - \beta_0 =$$
$$= [G(z_1) - \tfrac{1}{2}\beta_2\varphi(z_1)^2 - \beta_0] + [G(z_2) - \tfrac{1}{2}\beta_2\varphi(z_2)^2 - \beta_0],$$
$$\beta_0 = \beta_7 + \beta_2\beta_6^2.$$

Daraus folgt

$$G(z) - \tfrac{1}{2}\beta_2\varphi(z)^2 - \beta_0 = \varphi_1(z),$$

wobei $\varphi_1(z)$ der Gleichung (2. 2) genügt, also hat auch $G(z)$ die Gestalt (a_3). Aus (2. 6) und (2. 8) ist ersichtlich, daß auch die Funktionen $K(z)$ und $H(z)$ tatsächlich die Form (a_3) haben. Schließlich ergibt sich aus (2. 9)

$$F(z_1 * z_2) = \tfrac{1}{2}\beta_2\varphi(z_1)^2 + \varphi_1(z_1) + \beta_0 + \tfrac{1}{2}\beta_2\varphi(z_2)^2 + \varphi_1(z_2) +$$
$$+ \beta_0 + \beta_2[\varphi(z_1) - \beta_6][\varphi(z_2) - \beta_6] - \beta_3 =$$
$$= \tfrac{1}{2}\beta_2\varphi(z_1 * z_2)^2 - \beta_2\beta_6\varphi(z_1 * z_2) + \varphi_1(z_1 * z_2) + 2\beta_0 + \beta_2\beta_6^2 - \beta_3,$$

d. h. auch $F(z)$ hat die Gestalt (a_3).

Damit ist auch der Fall **B2. b** erledigt und der Beweis des Satzes 2 vollendet.

§ 3. Eine weitere Verallgemeinerung der Pexiderschen Funktionalgleichung

Jetzt betrachten wir die Funktionalgleichung

$$F(z_1 z_2) = G(z_1)F(z_2) + H(z_1)z_2 + K(z_1), \tag{3. 1}$$
$$[z_1, z_2, z_1 z_2 \in Q_1'; \; F(z), G(z), H(z), K(z): Q_1' \to Q]$$

wobei Q_1' eine bezüglich der Multiplikation eine Halbgruppe bildende Menge der komplexen Zahlen bezeichnet und Q wieder eine Menge von komplexen Zahlen ist.

Die Gleichung (3. 1) kommt in reeller Form zuerst in einer Arbeit [7] von S. GOŁĄB und S. ŁOJASIEWICZ vor, wo sie unter Differenzierbarkeitsbedingungen gelöst wird. Später hat J. ACZÉL [2] (vgl. [1]) für (3. 1) eine elementare Lösung gegeben.

Wir beweisen den

Satz 3. *Die allgemeinsten komplexen Lösungen der auf Q_1' geltenden Funktionalgleichung* (3. 1) *sind die folgenden Funktionen:*

(b₁)
$$\begin{aligned} &F(z)=\alpha_1 z+\alpha_2,\\ &G(z) \text{ eine beliebige komplexe Funktion},\\ &H(z)=\alpha_1 z-\alpha_1 G(z),\\ &K(z)=\alpha_2-\alpha_2 G(z); \end{aligned} \tag{b_1}$$

$$\begin{aligned} &F(z)=\Phi(z)-\alpha_4 z-\alpha_5,\\ &G(z)\equiv 1,\\ &H(z)=-\alpha_4 z+\alpha_4,\\ &K(z)=\Phi(z); \end{aligned} \tag{b_2}$$

$$\begin{aligned} &F(z)=z\Phi(z)-\alpha_6 z-\alpha_4,\\ &G(z)=z,\\ &H(z)=z\Phi(z),\\ &K(z)=\alpha_4 z-\alpha_4; \end{aligned} \tag{b_3}$$

$$\left.\begin{aligned} &F(z)=\frac{1}{\alpha_1}\Psi(z)-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}z-\frac{\alpha_3}{\alpha_1},\\ &G(z)=\Psi(z),\\ &H(z)=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\Psi(z)-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}z,\\ &K(z)=\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\Psi(z)-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}; \end{aligned}\right\}(\alpha_1\neq 0) \tag{b_4}$$

wobei $\Phi(z)$ und $\Psi(z)$ den auf Q_1' geltenden Cauchyschen Funktionalgleichungen

$$\Phi(z_1 z_2)=\Phi(z_1)+\Phi(z_2), \tag{3. 2}$$

$$\Psi(z_1 z_2)=\Psi(z_1)\Psi(z_2) \tag{3. 3}$$

$$[z_1, z_2, z_1 z_2\in Q_1';\ \Phi(z), \Psi(z): Q_1'\to Q]$$

genügende komplexe Funktionen bezeichnen und α_ν ($\nu=1, 2, \ldots, 6$) beliebige komplexe Konstanten sind.

BEWEIS. Aus der Gleichung (3. 1) können wir auf Grund der Symmetrie der linken Seite die folgende schreiben:

$$\Delta[G(z_1), F(z_2)] + \Delta[H(z_1), z_2] + \Delta[K(z_1), 1] = 0. \tag{3.4}$$

Wenn wir diese Gleichung mit z_3, bzw. mit 1 „erweitern", erhalten wir

$$\Delta[G(z_1), F(z_2), z_3] + \Delta[K(z_1), 1, z_3] = 0, \tag{3.5}$$
$$\Delta[G(z_1), F(z_2), z_3, 1] = 0,$$

d. h. es können die folgende Fälle auftreten:

A.

$$F(z) = \alpha_1 z + \alpha_2, \tag{3.6}$$

B.

$$G(z) = \alpha_1 F(z) + \alpha_2 z + \alpha_3. \tag{3.7}$$

A. Setzen wir (3. 6) in (3. 5) ein, so folgt

$$\Delta[G(z_1), \alpha_1 z_2 + \alpha_2, z_3] + \Delta[K(z_1), 1, z_3] = \Delta[\alpha_2 G(z_1) + K(z_1), 1, z_3] = 0,$$

also ist

$$\alpha_2 G(z) + K(z) = \alpha_3 z + \alpha_4. \tag{3.8}$$

Mit (3. 6) und (3. 8) erhalten wir aus (3. 4)

$$\Delta[G(z_1), \alpha_1 z_2 + \alpha_2] + \Delta[H(z_1), z_2] + \Delta[-\alpha_2 G(z_1) + \alpha_3 z_1 + \alpha_4, 1] =$$
$$= \Delta[G(z_1), \alpha_1 z_2] + \Delta[G(z_1), \alpha_2] + \Delta[H(z_1), z_2] + \Delta[-\alpha_2 G(z_1), 1] + \Delta[\alpha_3 z_1, 1] =$$
$$= \Delta[\alpha_1 G(z_1) + H(z_1) - \alpha_3, z_2] = 0,$$

d. h.

$$\alpha_1 G(z) + H(z) - \alpha_3 = \alpha_5 z. \tag{3.9}$$

Setzen wir jetzt die Lösungen (3. 6), (3. 8) und (3. 9) in (3. 1) ein, dann folgen

$$\alpha_1 = \alpha_5, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_4.$$

Also sind diese Lösungen tatsächlich von der Gestalt (b_1).

B. Jetzt untersuchen wir den Fall (3. 7). Aus (3. 7) und (3. 5) ergibt sich

$$\Delta[\alpha_1 F(z_1) + \alpha_2 z_1 + \alpha_3, F(z_2), z_3] + \Delta[K(z_1), 1, z_3] =$$
$$= \Delta[K(z_1) - \alpha_3 F(z_1), 1, z_3] = 0,$$

also folgt

$$K(z) - \alpha_3 F(z) = \alpha_4 z + \alpha_5. \tag{3.10}$$

Setzen wir (3. 7) und (3. 10) in (3. 4) ein, dann erhalten wir

$$\Delta[\alpha_1 F(z_1) + \alpha_2 z_1 + \alpha_3, F(z_2)] + \Delta[H(z_1), z_2] + \Delta[\alpha_3 F(z_1) + \alpha_4 z_1 + \alpha_5, 1] =$$
$$= \Delta[\alpha_2 z_1, F(z_2)] + \Delta[\alpha_3, F(z_2)] + \Delta[H(z_1), z_2] + \Delta[\alpha_3 F(z_1), 1] + \Delta[\alpha_4 z_1, 1] =$$
$$= \Delta[-\alpha_2 F(z_1) + H(z_1) - \alpha_4, z_2] = 0,$$

d. h.

$$-\alpha_2 F(z) + H(z) - \alpha_4 = \alpha_6 z \tag{3.11}$$

gilt. Mit den Lösungen (3. 7), (3. 10) und (3. 11) ergibt sich aus (3. 1)

$$(3.12)\qquad \begin{cases} F(z_1z_2)=\alpha_1F(z_1)F(z_2)+(\alpha_2z_1+\alpha_3)F(z_2)+\\ +(\alpha_2z_2+\alpha_3)F(z_1)+\alpha_6z_1z_2+\alpha_4(z_1+z_2)+\alpha_5. \end{cases}$$

Jetzt nützen wir die Assoziativität des Argumentes der linken Seite aus, d. h. auf Grund der Gleichung

$$F(z_1\cdot z_2z_3)=F(z_1z_2\cdot z_3)$$

können wir schreiben

$$\begin{gathered} \alpha_1F(z_1)[\alpha_1F(z_2)F(z_3)+(\alpha_2z_2+\alpha_3)F(z_3)+(\alpha_2z_3+\alpha_3)F(z_2)+\\ +\alpha_6z_2z_3+\alpha_4(z_2+z_3)+\alpha_5]+(\alpha_2z_1+\alpha_3)[\alpha_1F(z_2)F(z_3)+(\alpha_2z_2+\alpha_3)F(z_3)+\\ +(\alpha_2z_3+\alpha_3)F(z_2)+\alpha_6z_2z_3+\alpha_4(z_2+z_3)+\alpha_5]+(\alpha_2z_2z_3+\alpha_3)F(z_1)+\\ +\alpha_6z_1z_2z_3+\alpha_4(z_1+z_2z_3)+\alpha_5=\alpha_1F(z_3)[\alpha_1F(z_1)F(z_2)+\\ +(\alpha_2z_1+\alpha_3)F(z_2)+(\alpha_2z_2+\alpha_3)F(z_1)+\alpha_6z_1z_2+\alpha_4(z_1+z_2)+\alpha_5]+\\ +(\alpha_2z_1z_2+\alpha_3)F(z_3)+(\alpha_2z_3+\alpha_3)[\alpha_1F(z_1)F(z_2)+(\alpha_2z_1+\alpha_3)F(z_2)+\\ +(\alpha_2z_2+\alpha_3)F(z_1)+\alpha_6z_1z_2+\alpha_4(z_1+z_2)+\alpha_5]+\alpha_6z_1z_2z_3+\alpha_4(z_1z_2+z_3)+\alpha_5. \end{gathered}$$

Nach Umformungen geht diese Gleichung in

$$\begin{gathered} F(z_1)[(\alpha_1\alpha_6+\alpha_2-\alpha_2^2)z_2z_3+(\alpha_1\alpha_4-\alpha_2\alpha_3)(z_2+z_3)+(\alpha_1\alpha_5+\alpha_3-\alpha_3^2)]-\\ -F(z_3)[(\alpha_1\alpha_6+\alpha_2-\alpha_2^2)z_1z_2+(\alpha_1\alpha_4-\alpha_2\alpha_3)(z_1+z_2)+(\alpha_1\alpha_5+\alpha_3-\alpha_3^2)]+\\ +(z_1-z_3)[(\alpha_2\alpha_4-\alpha_3\alpha_6-\alpha_4)z_2+(\alpha_2\alpha_5+\alpha_4-\alpha_3\alpha_4)]=0 \end{gathered}$$

über.

Da wir den Fall $F(z)=\beta_1z+\beta_2$ schon in (b_1) behandelt haben, können wir voraussetzen, daß die Funktion $F(z)$ von z linear unabhängig ist. Also ist die vorige Gleichung nur dann erfüllt, falls

$$\begin{gathered} \alpha_1\alpha_6+\alpha_2-\alpha_2^2=0,\\ \alpha_1\alpha_4-\alpha_2\alpha_3=0,\\ \alpha_1\alpha_5+\alpha_3-\alpha_3^2=0,\\ \alpha_2\alpha_4-\alpha_3\alpha_6-\alpha_4=0,\\ \alpha_2\alpha_5+\alpha_4-\alpha_3\alpha_4=0 \end{gathered}$$

sind.

Bei der Lösung dieses Gleichungssystems unterscheiden wir zwei Hauptfälle, und zwar $\alpha_1=0$ und $\alpha_1\neq0$. Dann sind die Lösungen

$$(3.13)\qquad \alpha_1=0,\quad \alpha_2=0,\quad \alpha_3=0,\quad \alpha_4=0;$$

$$(3.14)\qquad \alpha_1=0,\quad \alpha_2=0,\quad \alpha_3=1,\quad \alpha_6=-\alpha_4;$$

$$(3.15)\qquad \alpha_1=0,\quad \alpha_2=1,\quad \alpha_3=0,\quad \alpha_5=-\alpha_4;$$

$$(3.16)\qquad \alpha_1\neq0,\quad \alpha_1\alpha_6=\alpha_2^2-\alpha_2,\quad \alpha_1\alpha_4=\alpha_2\alpha_3,\quad \alpha_1\alpha_5=\alpha_3^2-\alpha_3.$$