Die Bestimmung der Grundfunktionen projektiv-ebener metrischer Räume

Von A. RAPCSÁK (Debrecen)

1. Als projektiv-ebene bezeichnete L. BERWAID diejenigen Bahnräume P_n, in welchen die Bahnen Geraden sind.[1])

Die Bahnen haben bei beliebigem Parameter die Gleichung

$$\dot{x}^i(\ddot{x}^j+2G^j(x,\dot{x}))-\dot{x}^j(\ddot{x}^i+2G^i(x,\dot{x}))=0, \tag{1}$$

wobei $G^i(x,v)$ in v^i positiv homogen zweiter Ordnung ist.

In projektiv-ebenen Räumen haben die Bahnen die Gleichung

$$\dot{x}^i\ddot{x}^j-\dot{x}^j\ddot{x}^i=0. \tag{2}$$

HILBERT hat das Problem der Bestimmung aller soclhen Funktionen aufgeworfen[2]), für welche die Schar der Extremalen aus Geraden besteht. Die vorliegende Arbeit ist der Lösung dieses Problems gewidmet.[3])

2. Wie dies aus (2) ohne weiteres ersichtlich ist, läßt sich in projektiv-ebenen Räumen ein solches Koordinatensystem einführen, in welchem

$$G^i(x,v)=p(x,v)v^i \tag{3}$$

gilt, wobei die Funktion $p(x,v)$ positiv homogen ersten Grades in v^i ist.

Das aufgeworfene Problem läßt sich also auch so formulieren: zu bestimmen sind die Grundfunktionen derjenigen metrischen Räume, die sich auf projektiv-ebene Räume bahntreu abbilden lassen.

Bekanntlich[4]) ist ein P_n dann und nur dann metrisierbar[5]), falls es in P_n einen solchen Vektor $\lambda_i(x,v)$, homogen 0-ten Grades in v^i, gibt, für welchen folgende Bedingungen erfüllt sind:[6])

$$\lambda_{i|k}-\lambda_{k|i}=0 \tag{4_1}$$

$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial v^k}-\frac{\partial\lambda_k}{\partial v^i}=0 \tag{4_2}$$

$$\lambda_r v^r \quad \text{ist in} \quad v^i \quad \text{konvex.} \tag{4_3}$$

---

1) S. L. BERWALD [1].

2) D. HILBERT [3], Problem 4.

3) Bezüglich der auftretenden Funktionen setzen wir voraus, daß sie in einer jeden ihrer Veränderlichen zumindest viermal stetig derivierbar sind.

4) A. RAPCSÁK [5], Satz 1.

5) D. h. läß sich dann und nur dann auf einen metrischen Raum bahntreu abbilden.

6) $\lambda_{i|k}=\dfrac{\partial\lambda_i}{\partial x^k}-\dfrac{\partial\lambda_i}{\partial v^r}G^r_k-\lambda_r G^r_{ik}$ bedeutet die Berwaldsche kovariante Ableitung.

Aus (4_1) und (3) ergibt sich wegen den Homogenitätsbedingungen

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \lambda_k}{\partial x^i} = 0. \tag{5}$$

Es gilt also der

Satz 1. *Die metrischen Grundfunktionen, für welche die zugehörigen Geodätischen Geraden sind, werden durch die Gesamtheit derjenigen Funktionen $\lambda_r v^r$ gegeben, die den Bedingungen (4_2), (4_3) und (5) genügen.*

λ_i ist wegen (5) ein Gradientenvektor, es muß also eine skalare Funktion $\Phi(x, v)$, positiv homogen 0-ten Grades in v_i, geben, derart, daß

$$\lambda_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \tag{6}$$

gilt. Aus (6) und aus (4_2) folgt

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial v^k} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^i \partial x^k} = 0. \tag{7}$$

Indem wir (7) mit v_i kontrahieren, erhalten wir wegen der Homogenitätsbedingung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^i \partial x^k} v^k = 0. \tag{8}$$

Satz 2. *Damit es ein die Bedingungen (4_2), (4_3) und (5) befriedigendes Vektorfeld gebe, ist die Existenz einer solchen, das Differentialgleichungssystem (8) befriedigenden skalaren Funktion $\Phi(x, v)$, homogen 0-ten Grades in v^i, notwendig und hinreichend, für welche $\frac{\partial \Phi}{\partial x^r} v^r$ in v^i konvex ist.*

Die Notwendigkeit der ausgesprochenen Bedingung folgt aus (6), (7) und (8). Nehmen wir also an, daß es einen solchen Skalar Φ gibt. Indem wir (8) nach v^j derivieren, die Indizes i und j vertauschen und die beiden Gleichungen auseinander subtrahieren, gelangen wir zu (7). Falls wir noch von der Bezeichnung (6) Gebrauch machen, ergibt sich daraus (4_2) und (5).

Sehen wir im partiellen Differentialgleichungssystem (8) die $\frac{\partial \Phi}{\partial v^i}$ als unbekannte Funktionen an, so ergibt sich als Integralfläche des Systems eine allgemeine Zylinderfläche mit der Erzeugendenrichtung v^i [7]).

Die allgemeine Lösung von (8) ist also

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v^i} \overset{\text{def}}{=} \Phi_i = \Phi_i(v, x^1 v^n - x^n v^1, \ldots, x^{n-1} v^n - x^n v^{n-1}). \tag{9}$$

---

[7]) Im Differentialgleichungssystem (8) treten die v^i, falls $\frac{\partial \Phi}{\partial v^i}$ die unbekannte Funktion ist, nur als Parameter auf!

In (9) sind die Funktionen $\Phi_i(z^1, \ldots, z^{2n-1})$ positiv homogen -1-ten Grades in ihren Veränderlichen, und sie müssen die folgenden Differentialgleichungssysteme befriedigen:[8])

$$(10_1) \qquad \frac{\partial \Phi_L}{\partial z^K} - \frac{\partial \Phi_L}{\partial z^{n+K}} x^n - \frac{\partial \Phi_K}{\partial z^L} + \frac{\partial \Phi_K}{\partial z^{n+L}} x^n = 0$$

$$(10_2) \qquad \frac{\partial \Phi_L}{\partial z^n} + \frac{\partial \Phi_L}{\partial z^{n+S}} x^S - \frac{\partial \Phi_n}{\partial z^L} + \frac{\partial \Phi_n}{\partial z^{n+L}} x^n = 0$$

(10_1) und (10_2) stellen offenbar die Integrabilitätsbedingungen von (9) bezüglich v^i dar.

In (10_1) und in (10_2) müssen, da die x_i beliebig sind, die Relationen

$$(11_1) \qquad \frac{\partial \Phi_L}{\partial z^K} = \frac{\partial \Phi_K}{\partial z^L}; \quad \frac{\partial \Phi_L}{\partial z^{n+K}} = \frac{\partial \Phi_K}{\partial z^{n+L}}$$

$$(11_2) \qquad \frac{\partial \Phi_L}{\partial z^n} = \frac{\partial \Phi_n}{\partial z^L}; \quad \frac{\partial \Phi_L}{\partial z^{n+S}} x^S = -\frac{\partial \Phi_n}{\partial z^{n+L}} x^n$$

gelten. — Die den Gleichungen (11_1) und (11_2) genügenden Funktionen sind:

$$(12_1) \qquad \Phi_L(z^1, \ldots, z^{2n-1}) = \frac{\partial \Psi(z^1, \ldots, z^n)}{\partial z^L} + \frac{\partial \Omega(z^{n+1}, \ldots, z^{2n-1})}{\partial z^{n+L}}$$

$$(12_2) \qquad \Phi_n(z^1, \ldots, z^{2n-1}) = \frac{\partial \Psi(z^1, \ldots, z^n)}{\partial z^n} - \frac{\partial \Omega(z^{n+1}, \ldots, z^{2n-1})}{\partial z^{n+S}} \frac{x^S}{x^n}.$$

In (12_1) und (12_2) sind Ψ und Ω in ihren Veränderlichen positiv und homogen 0-ten Grades, sonst aber beliebige Funktionen.

Aus (9) erhalten wir wegen (10_1) und (10_2):

$$(13) \qquad \Phi(x, v) = \int_{\binom{v}{(0)}}^{(v)} \Phi_i(v, x^1 v^n - x^n v^1, \ldots, x^{n-1} v^n - x^n v^{n-1}) \, dv^i.$$

Endlich folgt aus (13) wegen (6)

$$(14) \qquad \overline{L}(x, v) = v^k \int_{\binom{v}{(0)}}^{(v)} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^k} dv^i.$$

Es gilt also der

Satz 3. *In den metrischen Räumen, in welchen die Extremalen Geraden sind, wird die metrische Grundfunktion durch die Formel* (14) *dargestellt, wobei die* Φ_i *dem Gleichungssystem* (11_1) *und* (11_2) *genügen und in ihren Veränderlichen positiv homogene Funktionen* -1-ten Grades sind, und $\frac{\partial \Phi}{\partial x^r} v^r$ in v^r konvex ist.

---

[8]) In (10_1), (10_2), (11_1) und $11_2)$ können die großen Buchstaben die Werte $1, 2, \ldots, n-1$ annehmen.

Als Beispiel werden wir eine solche Funktion in der Umgebung des Punktes $(x^1 \dots x^{n-1}, x^n \neq 0)$ hinschreiben:

$$\bar{L}(x, v) = \frac{1}{(x^n)^2} \varphi (x^1 v^n - x^n v^1, \dots, x^{n-1} v^n - x^n v^{n-1}) + \psi(v)$$

wobei die Funktionen φ und ψ in ihren Veränderlichen positiv homogen ersten Grades und konvex sind.

Literatur

[1] L. Berwald, Über Finslersche und Cartansche Geometrie, *Annals of Math.* **48** (1947), 753–781.
[2] E. Cartan, Les espaces de Finsler, *Actualités scientifiques et industrielles* **79** (1934).
[3] D. Hilbert, Mathematische Probleme, *Göttinger Nach.* (1900), 253–297.
[4] A. Rapcsák, Über die bahntreuen Abbildungen metrischer Räume, *Publ. Math. Debrecen* **8** (1961), 285–290.
[5] A. Rapcsák, Über die Metrisierbarkeit affinzusammenhängender Bahnräume. *Ann. Mat. Pura Appl. (Bologna)* **67** (1962), 233–238.

(Eingegangen am 27. Januar, 1962.)