Sur la résolution de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles, qui généralisent les systèmes de Cauchy—Kowalewsky

Par ADOLF HAIMOVICI (Jaşi)

§ 1. Les systèmes d'équations aux dérivées partielles de Cauchy—Kowalewsky

$$\frac{\partial \mu_\lambda}{\partial t} = f_\lambda\left(t;\, x_j;\, u_\alpha;\, \frac{\partial u_\beta}{\partial x_k}\right) \quad (j, k = 1, 2, \dots p;\ \lambda, \alpha, \beta = 1, 2, \dots n)$$

sont caractérisés par le fait que dans les premiers membres il y a seulement les dérivées des fonctions inconnues par rapport à la variable t, et que les seconds membres sont analytiques par rapport à toutes les variables dont ils dépendent, dans le voisinage d'un point.

Un système qui généralise d'une manière naturelle ces systèmes est le suivant:

$$\text{(S)} \qquad \frac{\partial u_{\lambda_a}}{\partial t_a} = f_{\lambda_a}\left(t_b;\, x_j;\, u_\mu;\, \frac{\partial u_{\nu_b}}{\partial t_c};\, \frac{\partial u_b}{\partial x_h}\right),$$

$$\left(\begin{array}{l} a, b, c = 1, 2, \dots p, \quad \lambda_a = k_{a-1} + 1, \dots, k_a, k_i \text{ entiers}, \ k_0 = 0,\ k_p = K, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k_0 < k_1 < \cdots < k_p, \\ j, h = 1, 2, \dots q, \quad \nu_b = k_{b-1} + 1, \dots, k_b \quad \mu, \sigma = 1, 2, \dots, K, \qquad (b \neq c) \end{array}\right)$$

(ne pas sommer par rapport à a);

dans les premiers membres des équations de ce système il y a les dérivées de chacune des fonctions inconnues par rapport à une seule variable indépendante $t_1, t_2, \dots, t_p$, les seconds membres dépendent de ces variables t_i, d'autres variables $x_1, x_2, \dots x_q$, des fonctions inconnues $u_1, u_2, \dots, u_k$, et de toutes les dérivées partielles des fonctions u_α, qui ne figurent pas dans les premiers membres. L'hypothèse de l'analyticité des seconds membres reste valable.

Nous allons voir que, sous certaines conditions restrictives, ces systèmes admettent des intégrales analytiques satisfaisant à des conditions analogues à celles qu'on impose dans la théorie des systèmes du type de Cauchy—Kowalewsky.

Pour la simplicité des calculs, nous allons étudier seulement un cas particulier, qui pourtant va préciser la méthode et les résultats principaux.

§ 2. Nous allons considérer deux fonctions f et g de neuf variables indépendentes et deux fonctions φ et ψ de deux variables indépendentes, satisfaisant aux conditions suivantes:

A. *Les deux fonctions* $f(x, y, z, u, v, p_2, p_3, q_1, q_3)$, $g(x, y, z, u, v, p_2, p_3, q_1, q_3)$ *de neuf variables sont analytiques dans le voisinage* v:

$$(v) \qquad \begin{gathered} |x-x_0|,\ |y-y_0|,\ |z-z_0| \leqq \alpha,\ |u-u_0|,\ |v-v_0| \leqq \beta, \\ |p_2-p_{20}|,\ |p_3-p_{30}|,\ |q_1-q_{10}|,\ |q_3-q_{30}| \leqq \gamma, \end{gathered}$$

du point $P_0(x_0, y_0 z_0, u_0, v_0, p_{20}, p_{30}, q_{10}, q_{30}) \in R^9$;

B. *Les deux fonctions* $\varphi(y, z)$, $\psi(x, z)$ *de deux variables, sont analytiques dans les voisinages* v_1 *et* v_2,

$$(v_1) \qquad |y-y_0|,\quad |z-z_0| \leqq \alpha,$$

$$(v_2) \qquad |x-x_0|,\quad |z-z_0| \leqq \alpha,$$

des points $P_0^{(1)}(y_0, z_0) \in R^2$ *et* $P_0^{(2)}(x_0, z_0) \in R^2$;

C. *En posant:*

$$(c_2) \qquad \begin{gathered} (f_{u_y})_{P_0} = U_1,\quad (f_{v_x})_{P_0} = V_1,\quad (g_{u_y})_{P_0} = U_2,\quad (g_{v_x})_{P_0} = V_2, \\ \Delta = 1 - U_2 V_1,\quad \Delta + U_1 V_2 = a,\quad -U_1 V_2 = b, \end{gathered}$$

les deux racines ω_1, ω_2 *de l'équation*

$$(c_3) \qquad \omega^2 - a\omega - b = 0,$$

satisfont á la relation

$$(c_4) \qquad \begin{gathered} \frac{\omega_1^{n+1} - \omega_2^{n+1} - \omega_1\omega_2(\omega_1^n - \omega_2^n)}{\omega_1 - \omega_2} \neq 0, \quad si \quad \omega_1 \neq \omega_2, \\ -n\omega_1^{n+1} + (n+1)\omega_1^n \neq 0, \quad si \quad \omega_1 = \omega_2, \end{gathered}$$

quel que soit l'entier n;

D. *Si on désigne par* U *et* V:

$$U = \sup(|U_1|, |U_2|), \quad V = \sup(|V_1|, |V_2|),$$

alors

$$4\,UV \leqq 1.$$

Nous pouvons alors énoncer le résultat principal:

Théorème. *Si les fonctions* f, g, φ, ψ, *satisfont aux conditions* **A**, **B**, **C**, **D**, *le système*

$$(1) \qquad \begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial x} = f\left(x, y, z, u, v, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \frac{\partial v}{\partial y} = g\left(x, y, z, u, v, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial z}\right) \end{gathered}$$

admet une intégrale $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, *analytique dans un voisinage*

$$(\bar{V}) \qquad |x-x_0|,\ |y-y_0|,\ |z-z_0| \leqq \delta$$

de $\bar{P}\ (x_0, y_0, z_0) \in R^3$, *satisfaisant à:*

$$u(x_0, y, z) = \varphi(y, z), \quad v(x, y_0, z) = \psi(x, z). \tag{2}$$

Pour plus de simplicité, nous allons supposer

$$x_0 = y_0 = z_0 = \varphi(y, z) = \psi(x, z) = 0; \tag{3}$$

le cas général se ramène à celui-ci par le changement de variables et de fonctions inconnues:

$$x = x_0 + \bar{x}, \quad y = y_0 + \bar{y}, \quad z = z_0 + \bar{z},$$

$$u(x, y, z) = \varphi(y, z) + \bar{u}(x, y, z),$$

$$v(x, y, z) = \psi(x, z) + \bar{v}(x, y, z).$$

§ **3.** Supposons d'abord que le système (1) admette une intégrale satisfaisant aux conditions (2), et aux hypothèses **A, B, C**. Alors les coefficients des développements en séries, des fonctions u et v sont les solutions de systèmes linéaires d'équations; en effet, en désignant par l'indice o la valuer d'une fonction à l'origine, on a d'abord:

$$\begin{aligned} u_0 = v_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 = \\ = \left(\frac{\partial^r u}{\partial y^{r_1} \partial z^{r_2}}\right)_0 = \left(\frac{\partial^s v}{\partial x^{s_1} y z^{s_2}}\right)_0 = 0, \end{aligned} \tag{3'}$$

$$r_1 + r_2 = r, \ s_1 + s_2 = s,$$

et encore, de (1):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = f_0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 = g_0. \tag{4}$$

Les dérivées $(\partial^2 u/\partial x \partial z)_0$, $(\partial^2 v/\partial y \partial z)_0$ seront données par:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial f}{\partial p^3}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial f}{\partial q^3}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial p_2}\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial g}{\partial p_3}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial g}{\partial q_1}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial g}{\partial q_3}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \end{aligned} \tag{5_1}$$

en remplaçant les valeurs connues de (3) et (4) pour $x = y = z = 0$. Les valeurs $(\partial^2 u/\partial x \partial y)_0$, $(\partial^2 v/\partial x \partial y)_0$ seront données par le système:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial p_3}\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial q_3}\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial p_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial g}{\partial p_3}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial g}{\partial q_1}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial g}{\partial q_3}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}. \end{aligned} \tag{5_2}$$

en utilisant (3′), (4), (5_1) et en supposant, compte tenu des notations (c_2),

$$\Delta = 1 - U_2 V_1 \neq 0,$$

ce qui est réalisé, comme suite de l'hypothèse **C**, pour $n=1$.

Enfin, on a:

$$(5_3)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial p_3}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial q_3}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial p_2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial g}{\partial p_3}\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial g}{\partial q_1}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial g}{\partial q_3}\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}, \end{aligned}$$

et les valeurs de $(\partial^2 u/\partial x^2)_0$, $(\partial^2 v/\partial y^2)_0$ s'obtiennent en utilisant (3′), (4), (5_1) et (5_2).

Les valeurs des autres dérivées de u et v à l'origine, s'obtiennent en tenant compte des faits suivants:

a) les valeurs $(\partial^{r+1}u/\partial x \partial z^r)_0$ et $(\partial^{r+1}v/\partial y \partial z^r)_0$ se déduisent de (5_1) en dérivant les deux membres de chaque équation, $r-1$ fois par rapport à z, et en tenant compte de (3′).

b) les valeurs des dérivées $\partial^{m+r+s}u/\partial x^r \partial y^s \partial z^m$ et $\partial^{m+r+s}/\partial x^r \partial y^s \partial z^m$ $(r+s=t)$ à l'origine, sont données par un système d'équations linéaires, ayant même matrice des coefficients des inconnues, quel que soit l'entier m. L'affirmation est vraie pour $t=r+s=2$, comme on s'assure aisément en dérivant les deux membres des équations (5_1), (5_2) et (5_3), m fois par rapport à $z (m=1, 2, \ldots)$.

Supposons maintenant connues toutes les valeurs $(\partial^{m+r+s}u/\partial x^r \partial y^s \partial z^m)_0$ et $(\partial^{m+r+s}v/\partial x^r \partial y^s \partial z^m)_0$ pour $r+s \leqq n-1$, $m=1, 2, \ldots$; on a d'autre part:

$$(6)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^{p+q+m}u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^m} &= \cdots + \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial^{p+q+m}u}{\partial x^{p-1}\partial y^{p+1}\partial z^m} + \frac{\partial f}{\partial p_3}\frac{\partial^{p+q+m}u}{\partial x^{p-1}\partial y^q z^{m+1}} + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial^{p+q+m}v}{\partial x^p \partial y^q \partial z^m} + \frac{\partial f}{\partial q_3}\frac{\partial^{p+q+m}v}{\partial x^{p-1}\partial y^{q+1}\partial z^{m+1}}, \\ \frac{\partial^{p+q+m}v}{\partial x^p \partial y^q \partial z^m} &= \cdots + \frac{\partial g}{\partial p_2}\frac{\partial^{p+q+m}u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^m} + \frac{\partial g}{\partial p_3}\frac{\partial^{p+q+m}u}{\partial x^p \partial y^{q-1}\partial z^{m+1}} + \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial q_1}\frac{\partial^{p+q+m}v}{\partial x^{p+1}\partial y^{q-1}\partial z^m} + \frac{\partial g}{\partial q_3}\frac{\partial^{p+q+m}v}{\partial x^p \partial y^{q-1}\partial z^{m+1}}; \end{aligned}$$

les termes non écrits contiennent des dérivées de u et de v d'ordre plus petit que $m+1$ par rapport à z et d'ordre plus petit que $p+q$ par rapport à x et y. En ce qui concerne les valeurs à l'origine, des dérivées d'ordre $t=p+q$ par rapport aux variables x et y, et m par rapport à z, elles sont données par un système d'équations linéaires, dont la matrice des coefficients est indépendante de m.

Notre affirmation est donc démontrée.

La matrice des coefficients de $(\partial^{p+q}u/\partial x^p\partial y^q)_0$ et $(\partial^{p+q}v/\partial x^p\partial y^q)_0$, $p+q=$ $=n+1$, $p=1, 2, \ldots n$, compte tenu de la notation (c_2), est:

$$(7)\qquad M=\left\|\begin{matrix} 1 & -U_1 & 0\ldots & 0 & -V_1 & 0 & 0\ldots & 0\\ 0 & 1 & -U_1\ldots & 0 & 0 & -V_1 & 0\ldots & 0\\ 0 & 0 & 1\ldots & 0 & 0 & 0 & -V_1\ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0\ldots & 1 & 0 & 0 & 0\ldots & -V_1\\ U_2 & 0 & 0\ldots & 0 & 1 & 0 & 0\ldots & 0\\ 0 & -U_2 & 0\ldots & 0 & -V_2 & 1 & 0\ldots & 0\\ 0 & 0 & -U_2\ldots & 0 & 0 & -V_2 & 1\ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0\ldots & -U_2 & 0 & 0 & 0\ldots & 1 \end{matrix}\right\|$$

C'est une matrice à n lignes et n colonnes. Son déterminant est

$$(8)\qquad D_n = bd_{n-1}+d_n$$

où nous avons posé:

$$(9)\qquad d_n=\begin{vmatrix} a & -U_1 & 0 & \ldots & 0\\ -V_2 & a & -U_1 & \ldots & 0\\ 0 & -V_2 & a & \ldots & 0\\ . & . & . & \ldots & .\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a \end{vmatrix};$$

d'autre part, d_n s'obtient à l'aide de la formule de récurrence

$$(10)\qquad d_n = ad_{n-1}+bd_{n-2},$$

qui donne pour d_n:

$$(11)\qquad d_n = \omega_2 d_{n-1}+\omega_1^n,$$

ω_1, ω_2 étant les racines de l'équation (c_3); enfin, en supposant $\omega_1\neq\omega_2$, on déduit

$$(12)\qquad d_n=\frac{\omega_1^{n+1}-\omega_2^{n+1}}{\omega_1-\omega_2},\quad D_n=\frac{\omega_1^{n+1}-\omega_2^{n+1}-\omega_1\omega_2(\omega_1^n-\omega_2^n)}{\omega_1-\omega_2}$$

et si $\omega_1=\omega_2=\omega$,

$$(13)\qquad d_n=(n+1)\omega^n;\quad D_n=-n\omega^{n+1}+(n+1)\omega^n.$$

D'après l'hypothèse **C**, les valeurs de D_n sont différentes de zéro, quel que soit n. Enfin les valeurs $(\partial^{m+n+1}u/\partial x^{n+1}\partial z^m)_0$ et $(\partial^{m+n+1}v/\partial y^{n+1}\partial z^m)_0$ se trouvent comme $(\partial^2u/\partial x^2)$, et $(\partial^2v/\partial y^2)_0$ de (5_3). Il résulte que toutes les valeurs des coefficients des développements en séries de puissances des fonctions $u(x, y, z)$ et $v(x, y, z)$ peuvent être trouvées et notre première affirmation est ainsi justifiée.

§ 4. Nous nous proposons maintenant de résoudre les systèmes (6), pour $p+q=n+1$, $(p=1, 2, \ldots n)$; le système a évidemment $2n$ équations et $2n$ inconnues $(\partial^{n+1}u/\partial x^p\partial y^q)_0$, $(\partial^{n+1}v/\partial x^p x^q)_0$ les autres dérivées, d'ordre moindre par rapport à x et y simultanément, sont supposées connues. Le dénominateur de la fraction qui donne la valeur de l'inconnue est D_n. En désignant par $h_1, h_2, \dots h_{2n}$ les seconds membres de (6), le numérateur de $(\partial^{n+1}u/\partial x^{p+1}\partial y^{n-p})_0$ sera donné par le déterminant:

$$(14)\qquad N_p = \begin{vmatrix} 1 & -U_1 & 0 & \dots & h_1 & \dots & 0 & -V_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -U_1 & \dots & h_2 & \dots & 0 & 0 & -V_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & h_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & -V_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_n & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -V_1 \\ -U_2 & 0 & 0 & \dots & h_{n+1} & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -U_2 & 0 & \dots & h_{n+2} & \dots & 0 & -V_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -U_2 & \dots & h_{n+3} & \dots & 0 & 0 & -V_2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{2n} & \dots & -U_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Le numérateur de $(\partial^{n+1}v/\partial x^p\partial y^{n-p+1})_0$ conduira à les résultats analogues.

Après quelques transformations élémentaires, ce déterminant devient:

$$N_p = \begin{vmatrix} 1\ 0\ 0\dots F_1 & \dots 0 & -V_1 & -U_1V_1\dots & -U_1^{p-1}V_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0\ 1\ 0\dots F_2 & \dots 0 & 0 & -V_1\dots & -U_1^{p-2}V_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0\ 0\ 1\dots F_3 & \dots 0 & 0 & 0\dots & -U_1^{p-3}V_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0\ 0\ 0\dots F_p & \dots 0 & 0 & 0\dots & -V_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0\ 0\ 0\dots F_{p+1} & \dots 0 & 0 & 0\dots & 0 & -V_1 & -U_1V_1 & \dots & -U_1^{n-p+1}V_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0\ 0\ 0\dots F_n & \dots 1 & 0 & 0\dots & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -V_1 \\ 0\ 0\ 0\dots F_{n+1} & \dots 0 & \Delta & -U_1V_1U_2\dots & -U_1^{p-1}V_1U_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0\ 0\ 0\dots F_{n+2} & \dots 0 & -V_2 & \Delta\dots & -U_1^{p-2}V_1U_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0\ 0\ 0\dots F_{n+p} & \dots 0 & 0 & 0\dots & \Delta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0\ 0\ 0\dots F_{n+p+1} & \dots 0 & 0 & 0\dots & -V_2 & \Delta & -U_1V_1U_2 & \dots & U_1^{n-p+1}V_1U_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0\ 0\ 0\dots F_{2n} & \dots 0 & 0 & 0\dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \Delta \end{vmatrix}$$

où nous avons posé:

$$\begin{aligned} F_1 &= h_1 + U_1h_2 + \cdots + U_1^{p-1}h_p & F_{p+1} &= h_{p+1} + U_1h_{p+2} + \cdots + U_1^{n-p+1}h_n \\ F_2 &= \phantom{h_1 + {}} h_2 + \cdots + U_1^{p-2}h_p & F_{p+2} &= \phantom{h_{p+1} + {}} h_{p+2} + \cdots + U_1^{n-p-2}h_n \\ &\dots & &\dots \\ F_p &= h_p & F_n &= h_n \end{aligned}$$

$$F_{n+1} = h_{n+1} + U_2h_1,\ F_{n+2} = h_{n+2} + U_2h_2, \dots\ F_{2n} = h_{2n} + U_2h_n.$$

Enfin, une dernière transformation conduit à:

$$N_p = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_p \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} -V_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -V_1 & \dots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \dots & -V_1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} F_{p+1} \\ \\ \vdots \\ F_n \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 0 \\ & & \\ 0 & \dots & 1 \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} -V_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -V_1 & \dots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \dots & -V_1 \end{matrix} \\ \hline 0 & \begin{matrix} F_{n+1} \\ \vdots \\ F_{n+p} \end{matrix} & 0 & D_p & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} F_{n+p+1} \\ \vdots \\ F_{2n} \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & . & . & . & d \\ & & & & \\ 0 & . & . & . & 0 \end{matrix} & D_{n-p} \end{array} \right|$$

c'est à dire:

$$\begin{aligned} N_p = {} & D_p D_{n-p} F_{p+1} + V_2^p V_1 d_{n-p-1} F_{n+1} + V_2^{p-1} V_1 d_{n-p-1} D_1 F_{n+2} + \\ & + \cdots + V_1 d_{n-p-1} D_1 F_{n+p} + V_1 d_{n-p-1} D_p F_{n+1+p+1} + \\ & + V_1 U_1 d_{n-p-2} D_p F_{n+p+2} + \cdots + V_1 U_1^{n-p-1} D_p F_{2n}. \end{aligned} \tag{15}$$

On peut conclure que chaque inconnue du système (6) sera donnée par une expression ayant la forme:

$$\Sigma A_i h_i, \tag{16}$$

où les A_i sont formées par des additions et multiplications de $D_p D_{n-p}/D_n$, $D_p d_k/D_n$ $(h+k<n)$, et des puissances de U_1, U_2, V_1, V_2.

§ 5. Il reste à démontrer qu'il existe un intervalle où les séries de puissances trouvées sont convergentes. A ce but nous allons utiliser des séries majorantes analogues à celles utilisées dans le théorème de Cauchy—Kowalewsky.

Soit

$$F\left(x, y, z, \bar{u}, \bar{v}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right), \tag{17}$$

une fonction majorante des fonctions f et g simultanément. Nous désignerons par des lettres à barres, les expressions obtenues de F et de $\bar{u}$, $\bar{v}$, ..., analogues à celles obtenues pour f et g. Nous prendrons F sous la forme

$$F = \frac{M}{\left(1-\frac{t}{\varrho}\right)\left(1-\frac{\bar{u}}{\sigma}\right)\left(1-\frac{\bar{v}}{\sigma}\right)\left(1-\frac{\bar{u}_y}{\tau}\right)\left(1-\frac{\bar{u}_z}{\tau}\right)\left(1-\frac{\bar{v}_x}{\tau}\right)\left(1-\frac{\bar{v}_z}{\tau}\right)} + \left(U-\frac{M}{\tau}\right)\bar{u}_y + \left(V-\frac{M}{\tau}\right)\bar{v}_x,$$

où nous avons posé:

$$t = \alpha(x+y)+z,$$

U, V étant les constantes introduites à l'hypothése **D**, α une constante, $\alpha \geqq 1$, $0 < \varrho \leqq \delta$, $0 \leqq \sigma \leqq \beta$, $0 \leqq \tau \leqq \gamma$.

Nous allons démontrer qu'il existe une intégrale analytique du système

$$(18) \qquad \begin{gathered} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = F\left(x, y, z, \bar{u}, \bar{v}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right), \\ \bar{u}(0, y, z) = \bar{v}(x, 0, z) = 0, \end{gathered}$$

dépendant de $t = \alpha\ (x+y)+z$. Il est évident que cette intégrale est la solution du système:

$$(19) \qquad \lambda\alpha y' \left(1-\frac{\alpha y'}{\tau}\right)^2 \left(1-\frac{y'}{\tau}\right)^2 = G(t, y), \qquad y(0)=0,$$

où nous avons posé:

$$(20) \qquad \begin{gathered} y(t) = \bar{u}(x, y, z) = \bar{v}(x, y, z), \\ \lambda = 1 + \frac{2M}{\tau} - \alpha(U+V), \\ G(t, y) = \frac{M}{\left(1-\frac{t}{\varrho}\right)\left(1-\frac{y}{\sigma}\right)^2}. \end{gathered}$$

Or, dans nos conditions, il est évident qu'on peut prendre pour α une valeur telle que le système (19) admette une intégrale analytique: cette intégrale peut aussi être trouvée à partir de (18) comme on a trouvé l'intégrale de (1), c'est à dire, en calculant succésivement les coefficients des développements en séries de puissances de $\bar{u}$ et $\bar{v}$, (c'est à dire de $y(t)$), les opérations algébriques nécessaires pour trouver ces coefficients étant les mêmes pour les systèmes (1)—(2), et (18).

§ 6. Il reste à démontrer que l'intégrale de (18) (où de (19)) est une majorante de l'intégrale de (1)—(2). Cette conclusion sera une conséquence des faits suivants:

a) On a évidemment

$$\bar{U} = \bar{U}_1 = \bar{U}_2 \geqq |U_1|, \ |U_2| \geqq 0, \quad \bar{V} = \bar{V}_1 = \bar{V}_2 \geqq |V_1| \ \ |V_2| \geqq 0$$

et l'équation (c_3) écrite pour F, sera:

$$(\bar{c}_3) \qquad \bar{\omega}^2 - \bar{\omega} - \bar{b} = 0, \quad \bar{b} = -\bar{U}\bar{V}.$$

Plaçons nous dans l'hypothèse

$$1+4\bar{b}>0, \quad \bar{b}<0, \tag{21}$$

c'est à dire dans le cas où l'équation $(\bar{c}_3)$ a ses racines positives et (c_3) les racines réelles, conformément à l'hypothèse **D**. Si nous désignons par $\bar{\omega}_1$ et $\bar{\omega}_2$ les racines de l'équation $(\bar{c}_3)$, $\bar{\omega}_2<\bar{\omega}_1$, on s'assure aisément que

$$0 \leqq \bar{\omega}_2 < \tfrac{1}{2} < \bar{\omega}_1. \tag{22}$$

D'autre part, vu le fait que $|U_1 V_2|$, $|U_2 V_1| \leqq \bar{U}\bar{V} \leqq 1/4$, on conclut que $a>0$, et que les racines ω_1, ω_2 de l'équation (c_3), $(\omega_2<\omega_1)$ satisfont à:

$$\begin{aligned} &\omega_2<\bar{\omega}_2<\tfrac{1}{2}<\bar{\omega}_1<\omega_1 \\ &1-\omega_2>0, \quad |\omega_2|<\omega_1. \end{aligned} \tag{23}$$

b) Les coefficients des développements en séries de puissances, de $\bar{u}$ et $\bar{v}$, d'après (18) s'obtiennent de la même manière que ceux de (1)—(2); ces coefficients sont:

$$\frac{\bar{D}_p \bar{D}_{n-p}}{\bar{D}}, \quad \frac{\bar{D}_h \bar{d}_k}{\bar{D}_n}, \ldots;$$

il sont positifs comme il résulte des valeurs de $\bar{D}_h$, $\bar{d}_k$, analogues à (12) et de la remarque précédente.

c) Etudions la valeur $\dfrac{D_p D_{n-p}}{D_n}$ en supposant $\omega_2, \omega_1>0$; on a:

$$\frac{D_p D_{n-p}}{D_n} = \frac{[\omega_1^{p+1}-\omega_2^{p+1}-\omega_1\omega_2(\omega_1^p-\omega_2^p)]\,[\omega_1^{n-p+1}-\omega_2^{n-p+1}-\omega_1\omega_2(\omega_1^{n-p}-\omega_2^{n-p})]}{(\omega_1-\omega_2)\,[\omega_1^{n+1}-\omega_2^{n+1}-\omega_1\omega_2(\omega_1^n-\omega_2^n)]}$$

et, en posant $r=\omega_2/\omega_1$,

$$\frac{\partial}{\partial\omega_1}\log\frac{D_p D_{n-p}}{D_n} = \frac{1}{\omega_1}\left\{\frac{(p+1)(1-\omega_2)+\omega_2 r^p}{1-\omega_2-(r-\omega_2)r^p} + \right.$$

$$\left. + \frac{(n-p+1)(1-\omega_2)+\omega_2 r^{n-p}}{1-\omega_2-(r-\omega_2)r^{n-p}} - \frac{(n+1)(1-\omega_2)-\omega_2 r^n}{1-\omega_2-(r-\omega_2)r^n} - \frac{1}{1-r}\right\}.$$

En posant encore

$$A=\frac{\omega_2}{1-\omega_2}, \quad B=\frac{r-\omega_2}{1-\omega_2}, \quad C=\frac{r}{r-\omega_2}, \quad \sigma(r,p)=\frac{p+C}{1-Br^p},$$

il résulte:

$$\frac{\partial}{\partial\omega_1}\log\left(\frac{D_p D_{n-p}}{D_n}\right) = \frac{1}{\omega_1}\,[\sigma(r,p)+\sigma(r,n-p)-\sigma(r,n)-\sigma(r,0)].$$

D'autre part l'expression $\sigma(r,p)$ est croissante avec p: en effet, sa dérivée est

$$\frac{\partial\sigma}{\partial p}(r,p) = \frac{1-Br^p+r^p B(p+C)\log r}{[1-Br^p]^2}.$$

Cette dérivée est positive parce que, d'abord:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial p}(r,0)=1-B+BC\log r=\frac{1-r}{1-\omega_2}+\frac{r\log r}{1-\omega_2}>0$$

et puis, le signe de $\partial\sigma/\partial p$ est celui de son numérateur, et aussi celui de

$$\frac{1}{r^p}-B+B(p+C)\log r;$$

or cette fonction est croissante avec p, car

$$\frac{1}{r^p}[-1+Br^p]\log r>0.$$

On a, d'autre part

$$\sigma(r,0)=\frac{C}{1-B}=\frac{r(1-\omega_2)}{(1-r)(r-\omega_2)}>0.$$

On peut donc conclure que $\sigma(r,p)$ est positive et croissante avec p.

Remarquons en même temps que $\sigma(r,n-p)$ décroit avec p, que $\sigma\left(r,\frac{n}{2}\right)=$ $=\sigma\left(r,n-\frac{n}{2}\right)$, que la somme $\sigma(r,p)+\sigma(r,n-p)$ a un minimum pour $p=\frac{n}{2}$ et que, enfin, cette somme est symetrique par rapport à $p=\frac{n}{2}$. Il résulte donc que le maximum de cette somme a lieu pour $p=0$ (ou $p=n$) et que ce maximum est

$$\sigma(r,0)+\sigma(r,n).$$

On déduit alors que

$$\frac{\partial}{\partial\omega_1}\log\frac{D_pD_{n-p}}{D_n}\leqq 0, \tag{24}$$

quels que soient les entiers n et p $\left(0\leqq p\leqq\frac{n}{2}\right)$. Or on a d'après la remarque *a*):

$$\omega_1\geqq\frac{1}{2},\quad r|_{\omega_1=\frac{1}{2}}=1,\quad r|_{\omega_1>\frac{1}{2}}<1,$$

et

$$1\leqq\frac{D_pD_{n-p}}{D_n}\bigg|_{\omega_1=\omega_2=\frac{1}{2}}\leqq\frac{(3n+4)^2}{8(3n+2)}. \tag{25}$$

D'autre part, en posant:

$$C'=\frac{1}{1-\omega_2},\quad \tau(r,p)=\frac{p+C'}{1-Br^p},$$

on a

$$\frac{\partial}{\partial\omega_2}\log\frac{D_pD_{n-p}}{D_r}=\frac{1}{\omega_2}\{-\tau(r,p)-\tau(r,n-p)+\tau(r,n)+\tau(r,0)\},$$

et cela montre d'une manière analogue à celle de la remarque précédente que

$$\frac{\partial}{\partial\omega_2}\log\frac{D_pD_{n-p}}{D_n}\geqq 0, \tag{26}$$

c'est à dire,

$$1\leqq\frac{D_pD_{n-p}}{D_n}\bigg|_{\omega_1=\omega_2=\frac{1}{2}}\leqq\frac{(3n+4)^2}{8(3n+2)}. \tag{27}$$

Il résulte alors que, dans les hypothèses admises, D_pD_{n-p}/D_n construite pour le système (1)—(2) est majorée par la même expression construite pour le système majorant (19), dont $\bar\omega_1=\bar\omega_2=\dfrac{1}{2}$.

d) Supposons maintenant $\omega_2<0$, $1-\omega_1>0$, c'est à dire:

$$b = -U_1V_2>0, \qquad U_2V_1>0.$$

Considérons alors l'équation auxiliaire du second degré

$$\omega^2-\sqrt{a^2+4b}\,\omega+b = 0, \tag{c_3'}$$

qui admet les racines

$$\omega_1'=\omega_1, \quad \omega_2' = -\omega_2.$$

Désignons par D_k' ce que devient D_k, quand on remplace ω_i' par ω_i. On a alors,

$$0\leqq\frac{D_pD_{n-p}}{D_n}\leqq\frac{D_p'D_{n-p}'}{D_n'}. \tag{28}$$

On s'assure de la valabilité de ces inégalités, en traitant séparément:

le cas α: $p=$pair, $n=$impair, qui conduit à:

$$\frac{\omega_1^{n+2}(1-\omega_2)^2+\omega_2^{n+2}(1-\omega_1)^2-(\omega_1^{p+1}\omega_2^{n-p+1}+\omega_2^{p+1}\omega_1^{n-p+1})(1-\omega_1)(1-\omega_2)}{\omega_1^{n+2}(1+\omega_2)^2-\omega_2^{n+2}(1-\omega_1)^2-(\omega_1^{p+1}\omega_2^{n-p+1}-\omega_2^{p+1}\omega_1^{n-p+1})(1-\omega_1)(1+\omega_2)}\leqq$$

$$\leqq\frac{\omega_1^{n+2}(1-\omega_2)^2+\omega_2^{n+2}(1-\omega_1)^2-(\omega_1\omega_2^{n+1}+\omega_2\omega_1^{n+1})(1-\omega_1)(1-\omega_2)}{\omega_1^{n+2}(1+\omega_2)^2-\omega_2^{n+2}(1-\omega_1)^2-(\omega_1\omega_2^{n+1}-\omega_2\omega_1^{n+1})(1-\omega_1)(1+\omega_2)},$$

inégalité qui est évidemment satisfaite, vu que $\omega_2<0$.

le cas β, p-pair, n-pair, qui conduit à:

$$\frac{\omega_1^{n+2}(1-\omega_2)^2+\omega_2^{n+2}(1-\omega_1)-(\omega_1^{p+1}\omega_2^{n-p+1}+\omega_2^{p+1}\omega_1^{n-p+1})(1-\omega_1)(1-\omega_2)}{\omega_1^{n+2}(1+\omega_2)^2+\omega_2^{n+2}(1-\omega_1)+(\omega_1^{p+1}\omega_2^{n-p+1}+\omega_2^{p+1}\omega_1^{n-p+1})(1-\omega_1)(1+\omega_2)}\leqq$$

$$\leqq\frac{\omega_1^{n+2}(1-\omega_2)^2+\omega_2^{n+2}(1-\omega_1)^2-(\omega_1\omega_2^{n+1}+\omega_2\omega_1^{n+1})(1-\omega 1)(1-\omega_2)}{\omega_1^{n+2}(1+\omega_2)^2+\omega_2^{n+2}(1-\omega_1)^2+(\omega_1\omega_2^{n+1}+\omega_2\omega_1^{n+1})(1-\omega_1)(1+\omega_2)}$$

et cette inégalité se vérifie aussi aisément, sous les mêmes conditions.

D'autre part, l'expression $D_p'D_{n-p}/D_n'$ qui est calsculée à partir de (c_3'), est majorée par la même valeur que celle qu'on obtient à partir de l'équation ($\bar c_3$).

En effet, en remplaçant une racine de $(\bar{c}_3)$ dans le premier membre de l'équation $(\bar{c}_3')$, on obtient:

$$\bar{\omega}+\bar{b}-\sqrt{a^2+4\bar{b}\bar{\omega}}+b=\bar{\omega}\{1-\sqrt{(1-U_2V_1+U_1V_2)^2-4U_1V_2}\}+$$

$$+\bar{b}-U_1V_2=\bar{\omega}\{1-\sqrt{(1-U_2V_1)^2+(U_1V_2)^2-2U_1V_2(1+U_2V_1)}\}+\bar{b}-U_1V_2.$$

Comme $U_2V_1>0$ et $U_1V_2<0$, on a d'une manière évidente:

$$\bar{\omega}+\bar{b}-\sqrt{a^2+4\bar{b}\bar{\omega}}+b<0.$$

e) Etudions maintenant les coefficients

$$\frac{D_k d_h}{D_n} \quad \text{pour} \quad k=1,2,\ldots,p,\ h=1,2,\ldots,n-p-1. \tag{29}$$

On constate que

$$\frac{\partial d_k}{\partial\omega_1}\leqq\frac{\partial D_h}{\partial\omega_1}, \qquad \frac{\partial d_n}{\partial\omega_2}\geqq\frac{\partial D_h}{\partial\omega_2}$$

et, parsuite

$$\frac{\partial}{\partial\omega_1}\left(\frac{D_k d_n}{D_n}\right)\leqq 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\omega_2}\left(\frac{D_k d_n}{D_n}\right)\geqq 0. \tag{30}$$

Il résulte donc, que l'expression (29) est majorée par $\bar{D}_k\bar{d}_h/\bar{D}_n$.

§ 7. Supposons

$$D_1=\Delta=0; \tag{31}$$

le système a alors la forme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= m\frac{\partial v}{\partial x}+f_1(x,y,z\,u,v,p_2,p_3,q_1,q_3),\\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{m}\frac{\partial u}{\partial x}+g_1(x,y,z,u,v,p_1,p_3,q_1,q_3) \end{aligned} \tag{32}$$

où

$$m=\text{const.},\ \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1}\right)_0=\left(\frac{\partial g_1}{\partial p_2}\right)_0=0; \quad m\neq 0.$$

Il est évident que ce système ne peut pas déterminer d'une manière unique $(\partial^2u/\partial x\partial y)_0$ et $(\partial^2 v/\partial x\partial y)_0$; mais si on a $D_n\neq 0$ $(n>1)$ et

$$\frac{df_1}{dy}+m\frac{dg_1}{dx}=0, \tag{32'}$$

alors le système (32) admet une intégrale analytique si on donne la valeur de $\partial^2u/\partial x\partial y$ à l'origine.

Les conditions $D_i=0$, pour un indice i quelconque, mais fixé, ont une interprétation analogue à la précedente.

Etudions le cas où on a

$$D_i = 0, \tag{33}$$

pour deux valeurs différentes de i, soit r et s $(r \neq s)$, en supposant $\omega_1 \neq \omega_2$, $\omega_i \neq 0, 1$. On arrive alors à

$$\omega_1^{r-s} = \omega_2^{r-s}.$$

En désignant par ε une racine d'ordre $t = r - s$ de l'unité, on a

$$\omega_2 = \omega_1 \varepsilon,$$

et, si ω_1 et ω_2 sont imaginaires conjuguées, on déduit que les ω_i sont des racines d'une équation de la forme

$$\omega^{2t} = k^2, \quad k \text{ réel}, \ t\text{-entier}.$$

Ce cas est réalisé quand:

$$\begin{aligned} k^2 \cos 2\varphi - ak \cos \varphi - b &= 0, \\ k \ \sin 2\varphi - a \sin \varphi \quad &= 0. \end{aligned} \qquad \varphi = \frac{\pi}{t} s \quad 0 \leqq s < t,$$

Si ω_1, ω_2 sont réelles, on a

$$\sin \varphi = 0 \qquad \omega_1 = -\omega_2,$$

c'est à dire

$$a = 1 - U_2 V_1 + U_1 V_2 = 0. \tag{34}$$

Le cas où les ω_i sont complexes, conduit à

$$\sin \varphi \neq 0, \quad b = -k^2, \quad a = 2k \cos \varphi. \tag{34'}$$

Les coefficients des développements en séries, de u et de v ne pourront être déterminés dans ce cas que si les conditions suplémentaires, analogues à (32′) sont satisfaites et si l'on donne arbitrairement les valeurs des dérivées qui restent indéterminées.

Enfin le cas où $D_i = 0$, quel que soit i, conduit à

$$\Delta = b = 0. \tag{35}$$

En supposant, pour réaliser cette condition

$$\Delta = U_1 = 0, \qquad V_2 \neq 0, \tag{35'}$$

le rang de la matrice (7) est $2n-1$, et alors, pour trouver les coefficients, les conditions de compatibilité étant supposées satisfaites, on doit donner arbitrairement, pour chaque n, la valeur d'une seule dérivée à l'origine.

Mais si

$$\Delta = U_1 = V_2 = 0, \tag{35''}$$

alors le même rang est n, et alors il faut donner les valeurs de n dérivées à l'origine. Il est évident que dans chacun de ces cas il faut étudier séparément les conditions de convergence.

§ 8. Cas particuliers. A. Supposons que les fonctions f et g ne dépendent pas de u_y, v_x. Alors

$$D_n = 1,$$

et la suite des coefficients se trouve sans aucune restriction.

Le problème de la majoration est complètement analogue à cetui que l'on rencontre dans le cas d'un système Cauchy—Kowalewsky.

B. Supposons que la fonction f ne dépende pas de u_y et que g ne dépende pas de v_x. Alors on a

$$U_1 = V_2 = 0.$$

Le système (6) admet une solution unique si $\Delta \neq 0$, et il se décompose en n systèmes chacun de deux équations à deux inconnues. La majoration se fait par un système

$$U_t = \frac{M}{\left(1 - \frac{t}{\varrho}\right)\left(1 - \frac{2U}{\varrho}\right)\left(1 - \frac{3U_t}{\sigma}\right)},$$

dont la solution est une majorante de la solution du système donné, en supposant encore:

$$4|U_2 V_1| \leqq 1.$$

C. Si la fonction f ne dépend pas de v_x et g ne dépend de u_y, alors

$$U_2 = V_1 = 0,$$

et les coefficients des développements en séries de puissances, de u et de v, se trouvent succésivement sans aucune restriction, comme on voit d'après la matrice M de (7).

D. On peut encore traiter les cas particuliers où l'une des quantités U_1, U_2, V_1, V_2 est nulle. Le système (6) se simplifie, la majorante est plus compliquée, mais les conditions imposées aux coefficients U_i, V_i non nulles, sont plus larges. Nous ne nous occuperons plus de ces cas.

§ 9. Supposons maintenant donné le système:

$$\begin{aligned} F(x, y, z, u, v, p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3) &= 0, \\ G(x, y, z, u, v, p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3) &= 0, \end{aligned} \tag{36}$$

les fonctions F et G étant analytiques au point $P_0(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0; p_i^0, q_i^0)$; soient:

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0 \tag{37}$$

deux surfaces S_1 et S_2, de l'espace euclidien à trois dimensions, $\varphi, \psi \in C^\omega$ dans le voisinage du point $P_1(x_0, y_0, z_0)$, telles qu'on puisse trouver une troisième fonction $\chi(x, y, z)$ de manière que la transformation

$$\xi = \varphi(x, y, z), \quad \eta = \psi(x, y, z), \quad \zeta = \chi(x, y, z) \tag{38}$$

admette une inverse au voisinage de $P_1(x_0, y_0, z_0)$.

Proposons nous de trouver deux fonctions u et v, analytiques au voisinage de P_0, qui soient solutions de (36) et qui satisfassent encore à:

$$u|_{S_1} = \alpha(x, y, z)|_{S_1}, \qquad v|_{S_2} = \beta(x, y, z)|_{S_2}. \tag{39}$$

α et β étant deux fonctions analytiques de x, y, z au voisinage de P_0, définies sur S_1 et S_2 respectivement.

Pour la résolution de ce problème, faisons la substitution définie par (37) en (36). On voit alors qu'on peut résoudre ce système par rapport à $\partial u/\partial \xi$, $\partial v/\partial \eta$ si

$$(40)\quad K = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial p_3}\frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial q_1}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q_2}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial q_3}\frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial p_1}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial p_2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial p_3}\frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial q_1}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial q_2}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial q_3}\frac{\partial \eta}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Cette relation étant satisfaite, si les fonctions F et G satisfont encore à une condition analogue à **D**, il résulte que notre problème admet une solution.

§ 10. La relation

$$(41)\qquad K = 0$$

définit, pour chaque surface $\varphi(x, y, z) = 0$ une famille de surfaces $\psi(x, y, z) = 0$. C'est une généralisation de la notion de caractéristique qu'on a obtenu de cette manière, de même qu'une généralisation des restrictions qu'on inpose pour le problème de GOURSAT. Nous allons nous occuper plus en détail de ce problème dans une autre Note.

(Reçu le 15. septembre 1961.)