Über die Vervollständigung geordneter Halbringe

Von HERBERT LUGOWSKI (Potsdam)

Nachdem in letzter Zeit geordnete Halbringe mit in algebraische Strukturuntersuchungen einbezogen werden (vgl. WEINERT [11]), erhebt sich auch die Frage nach der Vervollständigung derartiger Halbringe. Wir wollen hier aufzeigen, wie die entsprechenden Überlegungen beim Aufbau der Arithmetik in diesem Rahmen in allgemeine strukturelle Zusammenhänge eingeordnet werden können; Hauptergebnis ist dabei (vgl. die Sätze (2. 2) und (4. 2)), daß gerade die archimedischen Halbringe mit der in (1. 2) definierten Eigenschaft JIV vollständige Hüllen besitzen, welche bis auf ähnliche Isomorphie mit den grundlegenden in der Zahlenrechnung auftretenden vollständigen Halbringen übereinstimmen.

§ 1. Vorbemerkungen

1. Als *Halbring* $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir eine algebraische Struktur mit einer Addition und einer Multiplikation, die in Bezug auf beide Verknüpfungen Halbgruppe ist und dem (beiderseitigen) Distributivgesetz genügt; bilden die von dem eventuell existierenden Nullelement verschiedenen Elemente sogar eine multiplikative Gruppe, so nennen wir $\mathfrak{M}$ einen *Halbkörper*. $\mathfrak{M}$ heißt *geordnet*, wenn in $\mathfrak{M}$ eine (irreflexive) Ordnungsrelation vorliegt, die Trichotomie (JI), Transitivität (JII) und die Monotoniegesetze der Addition (JIII) und Multiplikation (JIII′) erfüllt:

JIII: Aus $a<b$ folgt $a+c<b+c$, $c+a<c+b$ für alle $c\in\mathfrak{M}$.

JIII′: Aus $a<b$ folgt $\begin{cases} ac<bc,\ ca<cb \text{ für positives } c\in\mathfrak{M}; \\ ac>bc,\ ca>cb \text{ für negatives } c\in\mathfrak{M}. \end{cases}$

Positiv nennen wir dabei die Elemente $c\in\mathfrak{M}$ mit $c<c+c$, *negativ* diejenigen mit $c>c+c$. Auf Grund von JIII sind dann die positiven (negativen) Elemente gerade diejenigen, welche bei der Addition vergrößern (verkleinern), so daß jedes positive Element größer als jedes negative Element ist; existiert in $\mathfrak{M}$ ein Nullelement 0, so sind die positiven (negativen) Elemente auch gekennzeichnet durch die Angabe $c>0$ ($c<0$). Die scharfe Formulierung der Monotoniegesetze, welche durch die gesteckte Zielstellung gerechtfertigt werde, zieht die Regularität der Addition und Multiplikation und damit die Kommutativität der Addition nach sich (vgl. WEINERT [11; § 2]), womit jeder geordnete Halbring insbesondere ein Halbring im Sinne von RÉDEI [10; § 19] ist; entsprechend betrachten wir als (geordnete) Halbmoduln nur additiv geschriebene reguläre Halbgruppen (mit JI, JII, JIII), die kommutativ sind (vgl. auch die Anmerkung in (1. 4)).

2. Eine Analyse der Beweise der Zahlenrechnung ergibt, daß dort folgendes Axiom eine zentrale Rolle spielt:

JIV: *Zu* $a \in \mathfrak{M}$ *und* $b \in \mathfrak{M}$ *mit* $a < b$ *existiert ein* $x \in \mathfrak{M}$ *mit* $a + x = b$.

Geordnete Halbmoduln bzw. Halbringe, in denen JIV erfüllt ist, bezeichnen wir auch kurz als „Halbmoduln bzw. Halbringe mit JIV". Gilt auch noch die Umkehrung von JIV, liegen also nur positive Elemente vor, so nennen wir die betreffenden Halbmoduln bzw. Halbringe *natürlich geordnet* (im Unterschied zu CLIFFORD [3], der diese Begriffsbildung für Halbmoduln geprägt hat, schließen wir also hierin von vornherein hinsichtlich der Addition die Kommutativität, Regularität und Nichtexistenz eines Nullelementes ein). Insbesondere ist der „Positivitätsbereich $\mathfrak{P}$" aller positiven Elemente eines Halbmoduls bzw. Halbrings mit JIV stets natürlich geordnet.

3. Zu jedem geordneten Halbmodul $\mathfrak{M}$ existiert bis auf ähnliche Isomorphie genau ein geordneter *Differenzenmodul* $D(\mathfrak{M})$ (CLIFFORD [4], Theorem 2); die entsprechende Aussage über den geordneten *Differenzenring* eines geordneten Halbrings gilt jedenfalls dann, wenn in $\mathfrak{M}$ JIV erfüllt ist (WEINERT [11; § 6]). Handelt es sich bei der Ordnung von $\mathfrak{M}$ sogar um die natürliche Ordnung, so hat $D(\mathfrak{M})$ die einfache Struktur

$$D(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}' \cup \{0\} \cup \mathfrak{M},$$

wobei $\mathfrak{M}'$ aus den Entgegengesetzten aller Elemente von $\mathfrak{M}$ besteht; offenbar gilt $m' < 0 < m$ für $m' \in \mathfrak{M}'$, $m \in \mathfrak{M}$. Ferner besitzt jeder geordnete kommutative Halbring $\mathfrak{M}$ auch einen bis auf ähnliche Isomorphie eindeutig bestimmten geordneten *Quotientenhalbkörper* $Q(\mathfrak{M})$ (WEINERT [11; § 6]); mit $\mathfrak{M}$ erfüllt auch $Q(\mathfrak{M})$ das Axiom JIV. Für jeden Halbring mit JIV sind Differenzenring- und Quotientenhalbkörperbildung vertauschbare Operationen (WEINERT [11; § 5]).

4. Da wir weiterhin nur Halbmoduln bzw. Halbringe mit JIV betrachten, definieren wir *archimedische* Halbmoduln bzw. Halbringe einfach dadurch, daß in ihnen das archimedische Axiom in der üblichen Form gilt[1]):

Zu positivem $a \in \mathfrak{M}$ und beliebigem $b \in \mathfrak{M}$ existiert eine natürliche Zahl n mit $na > b$.

Mit $\mathfrak{M}$ ist stets auch $Q(\mathfrak{M})$ archimedisch; dagegen gilt diese Aussage nicht smmer für $D(\mathfrak{M})$, wohl aber dann, wenn JIV in $\mathfrak{M}$ erfüllt ist. Aus letzterem ergibt tich insbesondere, daß jeder archimedische Halbring mit JIV multiplikativ kommuiativ ist, da dies ja für jeden archimedischen Ring gilt. Den Rahmen unserer Überlegungen steckt dann folgender Hilfssatz ab:

Hilfssatz. *Es sei* $\mathfrak{M}$ *ein archimedischer Halbmodul (bzw. Halbring) mit* JIV. *Dann ist* $\mathfrak{M}$ *entweder natürlich geordnet oder von der Form* $\mathfrak{M} = \{0\} \cup \mathfrak{P}$ *oder bereits Modul (bzw. Ring). Für einen Halbkörper* $\mathfrak{M}$ *folgt dies bereits aus* JIV *allein.*

[1]) Vgl. hierzu die Bemerkungen von WEINERT [11; S. 54/55] zum archimedischen Axiom; auch die CLIFFORDsche Definition eines archimedischen Halbmoduls in [4] deckt sich bei Gültigkeit von JIV wegen des nachstehenden Hilfssatzes mit der obigen.

Beweis. Es bleibt nur das Vorliegen der Moduleigenschaft zu zeigen, falls ein negatives Element $c \in \mathfrak{M}$ existiert. In der Tat gilt:

a) $\mathfrak{M}$ besitzt ein Nullelement 0; denn wegen JIV gibt es ein $x \in \mathfrak{M}$ mit $c+c+x = c$, woraus für alle $a \in \mathfrak{M}$ folgt $a+c = a+c+c+x$, also $a = a+(c+x)$ und damit $c+x=0$. Dies zeigt zugleich, daß jedes negative Element c in $\mathfrak{M}$ ein Entgegengesetztes besitzt.

b) Sind a und b Elemente von $\mathfrak{M}$ mit $a > b$, so gibt es zu jedem negativen Element $c \in \mathfrak{M}$ eine natürliche Zahl n mit $a+nc < b$; denn da dann $-c$ positiv ist, existiert zu $y \in \mathfrak{M}$ mit $b+y=a$ ein solches n mit $y < n(-c) = -nc$, also folgt $a = b+y < b+(-nc)$, mithin $a+nc < b$.

c) Die Gleichung $a+x=b$ ist also in $\mathfrak{M}$ stets lösbar; denn für $a<b$ folgt dies direkt aus JIV, für $a=b$ gemäß *a)* mit $x=0$ und für $a>b$ abermals unter Verwendung von JIV gemäß *b)* mit $x = nc+z$ und $z \in \mathfrak{M}$.

d) Für einen Halbkörper $\mathfrak{M}$ kann man in *c)* statt *b)* folgenden Schluß verwenden: Aus $a>b$ folgt gemäß JIII′ $ca<cb$; also gibt es wegen JIV ein positives Element $y \in \mathfrak{M}$ mit $cb = ca+y$ und wegen der Möglichkeit der Division in $\mathfrak{M}$ zu y und c ein $x \in \mathfrak{M}$ mit $y = cx$, woraus sich $cb = ca+cx = c(a+x)$ und damit $b = a+x$ ergibt.

Anmerkung im Halbmodulfall: Wenn man in JIV stärker fordert, daß zu $a<b$ sowohl ein $x \in \mathfrak{M}$ als auch ein $y \in \mathfrak{M}$ mit $a+x = y+a = b$ existiert, so braucht man die Kommutativität der Addition nicht vorauszusetzen; diese ist dann vielmehr gemäß Fuchs [6] eine Folge der übrigen Eigenschaften von $\mathfrak{M}$.

5. Einen Oberhalbmodul von $\mathfrak{M}$, der mit $\mathfrak{M}$ gemeinsam entweder natürlich geordnet ist oder außer dem Nullelement nur aus positiven Elementen besteht oder Modul ist, nennen wir einen *gleichartigen* Oberhalbmodul von $\mathfrak{M}$.

6. Unter der *vollständigen Hülle* $V(\mathfrak{M})$ einer geordneten Menge $\mathfrak{M}$ verstehen wir eine normale vollständige Erweiterung im Sinne von Clifford [5; S. 41], also eine Menge $\mathfrak{V}$ mit folgenden Eigenschaften:

I. $\mathfrak{V}$ ist geordnete Obermenge von $\mathfrak{M}$.

II. $\mathfrak{V}$ ist vollständig, d. h. jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathfrak{V}$ hat ein Supremum in $\mathfrak{V}$ („bedingt-vollständig" bei Birkhoff [2; S. 51]).

III. Jedes Element $\xi \in \mathfrak{N}$ ist Infimum und Supremum nichtleerer Teilmengen von $\mathfrak{M}$.

$V(\mathfrak{M})$ existiert eindeutig bis auf Ähnlichkeit und ist genau dann dicht, wenn $\mathfrak{M}$ dicht ist.

7. Um eine möglichst enge Vergleichsmöglichkeit zur Zahlenrechnung zu haben, beschreiben wir $V(\mathfrak{M})$ durch die klassische Methode der Dedekindschen Schnittbildung. Ein Schnitt (A, B) in $\mathfrak{M}$ ist dabei wie üblich eine Einteilung von $\mathfrak{M}$ in zwei nichtleere Teilmengen A und B mit $a<b$ für $a \in A$, $b \in B$; ein Schnittelement ξ von (A, B) ist ein Element aus einer geordneten Obermenge von $\mathfrak{M}$ mit $a \leqq \xi \leqq b$ für alle $a \in A$, $b \in B$. $\mathfrak{V} = V(\mathfrak{M})$ ist dann, falls $\mathfrak{M}$ wenigstens zwei Elemente enthält (sonst ist $\mathfrak{M} = V(\mathfrak{M})$), gekennzeichnet durch folgende Eigenschaften:

(a) $\mathfrak{V}$ ist geordnete Obermenge von $\mathfrak{M}$.

(b) Jeder Schnitt (A, B) in $\mathfrak{M}$ hat ein Schnittelement $\xi \in \mathfrak{V}$.

(c) Jedes Element $\xi \in \mathfrak{V}$ ist Schnittelement eines Schnitts (A, B) in $\mathfrak{M}$.

(d) Jeder Schnitt in $\mathfrak{M}$, der bereits ein Schnittelement in $\mathfrak{M}$ besitzt, erhält in $\mathfrak{B}$ kein neues hinzu; jeder Schnitt in $\mathfrak{M}$, der kein Schnittelement in $\mathfrak{M}$ hat, bekommt in $\mathfrak{B}$ nur ein solches.

Letztere Aussage ist ersetzbar durch:

(d') Gibt es zu zwei Elementen $\xi_1 \in \mathfrak{B}$ und $\xi_2 \in \mathfrak{B}$ mit $\xi_1 < \xi_2$ kein $x \in \mathfrak{M}$ mit $\xi_1 < x < \xi_2$, so gilt $\xi_1 \in \mathfrak{M}$ und $\xi_2 \in \mathfrak{M}$.

Die Vollständigkeit von $\mathfrak{B}$ ist gleichwertig mit der Aussage, daß auch jeder Schnitt in $\mathfrak{B}$ ein Schnittelement in $\mathfrak{B}$ hat.

8. Im dichten Falle besagt (d), daß jeder Schnitt in $\mathfrak{M}$ auch nur ein Schnittelement in $\mathfrak{B}$ hat, und (d'), daß $\mathfrak{M}$ dicht in $\mathfrak{B}$ ist. Eine vollständige dichte Menge nennen wir in Angleichung an die Zahlenrechnung auch kurz eine *stetige Menge* und $\mathfrak{B} = V(\mathfrak{M})$ dementsprechend die *stetige Hülle* $\mathfrak{S} = S(\mathfrak{M})$ der dichten Menge $\mathfrak{M}$. Hat $\mathfrak{M}$ kein Maximum[2]), wie dies ja bei den von uns betrachteten Halbmoduln bzw. Halbringen mit JIV wegen der Existenz positiver Elemente stets der Fall ist, so kann man als einen typischen Vertreter für $S(\mathfrak{M})$ die Menge aller Schnitte in $\mathfrak{M}$ nehmen, deren Oberklasse in $\mathfrak{M}$ kein Minimum besitzt, wenn man sie auf Grund der Vorschriften

$$(A, B) = (A', B') \Leftrightarrow B = B'$$

$$(A, B) < (A', B') \Leftrightarrow B \cap A' \neq \emptyset \, (\Leftrightarrow B' \subset B)$$

ordnet und $\mathfrak{M}$ dadurch ähnlich einbettet, daß man diejenigen Schnitte, deren Unterklasse in $\mathfrak{M}$ ein Maximum besitzt, mit diesem Maximum identifiziert. (Für eine (vollgeordnete) dichte Menge $\mathfrak{M}$ ohne Maximum ist daher $S(\mathfrak{M})$ auch identisch mit der Dedekindschen Hülle $\delta\mathfrak{M}$, wie sie Banaschewski [1] für (teilweise) geordnete Gruppen einführt.)

9. Ferner verwenden wir folgende (bis auf Ähnlichkeit bestehende) Aussagen über stetige Hüllen dichter Mengen:

(a) Es sei $\mathfrak{M}$ geordnete Vereinigungsmenge $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$, und es habe $\mathfrak{M}_2$ ein Minimum, falls $\mathfrak{M}_1$ kein Maximum besitzt; dann ist $S(\mathfrak{M})$ die geordnete Vereinigungsmenge $S(\mathfrak{M}) = S(\mathfrak{M}_1) \cup S(\mathfrak{M}_2)$.

(b) Liegt die Menge $\mathfrak{M}_1$ dicht in der unberandeten Menge $\mathfrak{M}_2$, so gilt $S(\mathfrak{M}_1) = S(\mathfrak{M}_2)$.

10. Schließlich bezeichnen wir mit $\mathsf{N}, \Gamma, \mathsf{P}, \Delta$ den Halbring der natürlichen, ganzen, rationalen bzw. reellen Zahlen, mit H und Θ den Positivitätsbereich von P bzw. Δ und mit $\mathsf{N}^+, \Gamma^+, \ldots$ die entsprechenden additiven Strukturen.

§ 2. Nicht-dichte Halbmoduln und Halbringe mit JIV

1. Hilfssatz. *Ein Halbmodul $\mathfrak{M}$ mit* JIV *ist genau dann nicht-dicht, wenn er ein minimales positives Element besitzt.*

Beweis. Ist $\mathfrak{M}$ ein dichter Halbmodul mit JIV und $a \in \mathfrak{M}$ positiv, so gibt es ein $x \in \mathfrak{M}$ mit $a < x < a + a$ und ein positives $y \in \mathfrak{M}$ mit $a + y = x$; offensichtlich

[2]) Ist $\mu = \operatorname{Max} \mathfrak{M}$, so gilt auch $\mu = \operatorname{Max} S(\mathfrak{M})$ und umgekehrt; in diesem Falle ist $S(\mathfrak{M})$ gleich der geordneten Vereinigungsmenge $S(\mathfrak{M}') \cup \{\mu\}$ mit $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} \setminus \{\mu\}$. Entsprechendes gilt für das in $\mathfrak{M}$ evtl. existierende Minimum.

gilt $y < a$. Umgekehrt existiert in jedem Halbmodul mit JIV, aber ohne minimalem positiven Element zu $a < b$ ein $x \in \mathfrak{M}$ mit $a + x = b$ und zu x ein positives $y \in \mathfrak{M}$ mit $y < x$, so daß sich $a < a + y < b$ ergibt.

2. Satz. *Es sei* $\mathfrak{M}$ *bzw.* $\mathfrak{N}$ *ein nicht-dichter Halbmodul bzw. Halbring mit* JIV. *Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:*

(A) $\mathfrak{M}$ *bzw.* $\mathfrak{N}$ *ist archimedisch.*

(B) $\mathfrak{M}$ *bzw.* $\mathfrak{N}$ *ist vollständig.*

(C) $V(\mathfrak{M})$ *bzw.* $V(\mathfrak{N})$ *ist ein Halbmodul bzw. Halbring mit* JIV.

(D) $\mathfrak{M}$ *bzw.* $\mathfrak{N}$ *ist ähnlich isomorph zu*

$$\mathsf{N}^+ \text{ oder } \{0\} \cup \mathsf{N}^+ \text{ oder } \Gamma^+$$

$$\text{bzw. } m\mathsf{N} \text{ oder } \{0\} \cup m\mathsf{N} \text{ oder } m\Gamma \ (m \in \mathsf{N}).$$

Beweis. Alles ergibt sich unter Verwendung der sofort ersichtlichen Aussagen aus den nachstehend gezeigten beiden Teilbehauptungen:

Aus (A) folgt (D)[3]: Wir beginnen mit dem natürlichen Fall. Nach (2. 1) existiert in $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$ ein kleinstes Element μ; infolge der Voraussetzung „archimedisch" sind alle anderen Elemente von $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$ natürliche Vielfache $g\mu$ von μ. Damit folgt bereits $\mathsf{N}^+ \simeq \mathfrak{M}$ vermöge $g \to g\mu$ bzw. $m\mathsf{N} \simeq \mathfrak{N}$ vermöge $gm \to g\mu$, wobei $\mu \cdot \mu = m\mu$. Der zweite Fall ist klar, den dritten erhält man unter Beachtung von (1. 4) und der Tatsache, daß sich jeder Modul $\mathfrak{M}$ bzw. Ring $\mathfrak{N}$ als Differenzenmodul bzw. -ring seines (natürlich geordneten) Positivitätsbereiches gewinnen läßt.

Aus (B) folgt (A): Sonst gäbe es nämlich ein positives Element $\xi \in \mathfrak{B}$ und ein Element $\eta \in \mathfrak{B}$ mit $\xi < \eta$, so daß η eine obere Schranke der Menge $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{B}$ aller natürlichen Vielfachen $n\xi$ von ξ ist. Nach Voraussetzung existiert dann ein Element $\sigma \in \mathfrak{B}$ mit $\sigma = \sup \mathfrak{U}$. Wegen JIV gibt es zu jedem $n\xi$ ein $x_n \in \mathfrak{B}$ mit $n\xi + x_n = \sigma$, und die Elemente x_n bilden eine abnehmende Folge positiver Elemente. Diese ist nach unten beschränkt, denn nach (2. 1) gibt es in $\mathfrak{B}$ ein minimales positives Element μ. Damit folgt für alle n

$$n\xi < n\xi + \mu < n\xi + x_n = \sigma.$$

Wegen $\mu < \sigma$ ist $\mu + \tau = \sigma$ mit positivem $\tau \in \mathfrak{B}$ und damit τ gemäß

$$n\xi + \mu < \tau + \mu, \text{ also } n\xi < \tau,$$

eine kleinere obere Schranke von $\mathfrak{U}$ als $\sigma = \sup \mathfrak{U}$. Dieser Widerspruch zeigt die Behauptung.

§ 3. Dichte Halbmoduln mit JIV

1. Hilfssatz. *Es sei* $\mathfrak{M}$ *ein Halbmodul mit* JIV; *dann gilt*[4])*:*

(a) *Ist* $\mathfrak{M}$ *dicht, so gibt es zu jeder natürlichen Zahl* n *und jedem positivem Element* $b \in \mathfrak{M}$ *ein positives Element* $x \in \mathfrak{M}$ *mit* $nx < b$.

(b) *Ist* $\mathfrak{M}$ *stetig, so ist* $\mathfrak{M}$ *auch archimedisch, und es gibt zu jeder natürlichen Zahl* n *und jedem Element* $b \in \mathfrak{M}$ *ein Element* $x \in \mathfrak{M}$ *sogar mit* $nx = b$.

---

[3]) Für natürlich geordnete Halbmoduln bezeichnet Clifford [4] diese Aussage als „Theorem von Huntington" unter Verweis auf [8], [9].

[4]) Für den natürlichen Fall finden sich diese Aussagen bereits bei Hölder [7].

Beweis. (a) Jedenfalls gibt es zunächst ein positives Element $c_1 \in \mathfrak{M}$ mit $2c_1 \leqq b$; denn nach (2. 1) existiert ein positives Element $d \in \mathfrak{M}$ mit $d < b$ und dazu wegen JIV ein positives Element $e \in \mathfrak{M}$ mit $d+e=b$, so daß $2e \leqq b$ im Fall $e \leqq d$ bzw. $2d < b$ im Falle $d < e$ gilt. Dann gibt es aber auch für jede natürliche Zahl k ein $c_k \in \mathfrak{M}$ mit $2^k c_k \leqq b$, und man braucht k nur so zu wählen, daß $n < 2^k$ gilt, um $nc_k < 2^k c_k \leqq b$ zu erhalten.

(b) Wäre $\mathfrak{M}$ nicht archimedisch, so gäbe es ein positives $a \in \mathfrak{M}$ und ein $b \in \mathfrak{M}$ mit $na < b$ für alle $n \in \mathsf{N}$. Dann hätte aber der Schnitt (A, B) in $\mathfrak{M}$, dessen Oberklasse B aus allen Elementen $b' \in \mathfrak{M}$ mit $na < b'$ für alle $n \in \mathsf{N}$ besteht, kein Schnittelement in $\mathfrak{M}$. Demnach genügt es wegen (1. 4), die zweite Aussage in (b) für positives $b \in \mathfrak{M}$ zu zeigen. Dann leistet aber das Schnittelement $x \in \mathfrak{M}$ des Schnitts (A, B) in $\mathfrak{M}$, dessen Unterklasse A aus allen Elementen $a' \in \mathfrak{M}$ mit $na' \leqq b$ besteht, das Gewünschte ($A \neq \emptyset$ wegen Teil (a)).

2. Satz. *Es sei $\mathfrak{M}$ ein dichter und archimedischer Halbmodul mit* JIV; *dann gilt:*

(a) *Es existiert eine und nur eine Fortsetzung der Addition von $\mathfrak{M}$ auf $S(\mathfrak{M})$, so daß $S(\mathfrak{M})$ geordneter Oberhalbmodul von $\mathfrak{M}$ wird; es gibt also bis auf ähnliche Isomorphie genau einen geordneten Oberhalbmodul von $\mathfrak{M}$, der zugleich stetige Hülle von $\mathfrak{M}$ ist.*

(b) *$S(\mathfrak{M})$ ist ein gleichartiger Oberhalbmodul von $\mathfrak{M}$.*

(c) *$D(S(\mathfrak{M})) = S(D(\mathfrak{M}))$, d. h. Bildung der stetigen Hülle und des geordneten Differenzenmoduls sind (bis auf ähnliche Isomorphie) vertauschbare Operationen.*

(d) *Jeder gleichartige stetige Oberhalbmodul $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{M}$ stimmt (bis auf ähnliche Isomorphie) mit $S(\mathfrak{M})$ überein.*

Zusatz. *Insbesondere garantiert dies die Existenz und Einzigkeit des Moduls Δ^+ der reellen Zahlen, gleichgültig ob man von H^+ über P^+ oder Θ^+ aufsteigt:*

$$\Delta^+ = D(\Theta^+) = S(\mathsf{P}^+) \text{ mit } \Theta^+ = S(\mathsf{H}^+) \text{ und } \mathsf{P}^+ = D(\mathsf{H}^+).$$

Darüber hinaus gilt:

(e) *Jeder stetige Halbmodul $\mathfrak{S}$ mit* JIV *ist ähnlich isomorph zu*

$$\Theta^+ \text{ oder } \{0\} \cup \Theta^+ \text{ oder } \Delta^+ \text{ [5]}).$$

Beweis. Aussage (a) zeigt man wie in der Zahlenrechnung beim Übergang von H^+ zu Θ^+, da die genannten Voraussetzungen gerade die dort verwendeten Eigenschaften von H^+ erfassen; die Summe zweier Elemente ξ und ξ' aus $S(\mathfrak{M})$, die Schnittelemente der beiden Schnitte (A, B) und (A', B') in $\mathfrak{M}$ mit Oberklassen ohne Minimum sind, ist dabei das Schnittelement ξ'' des Schnittes (A'', B'') in $\mathfrak{M}$, dessen Oberklasse B'' gerade aus allen Summen $b+b'$ mit $b \in B$, $b' \in B'$ besteht.

Entsprechendes gilt für die Aussage (b) im natürlichen Fall. Ferner folgt aus $\mathfrak{M} = \{0\} \cup \mathfrak{P}$ gemäß (1. 9a) $S(\mathfrak{M}) = \{0\} \cup S(\mathfrak{P})$, wobei das Nullelement 0 von $\mathfrak{M}$

---

[5]) Für natürlich geordnete Halbmoduln bezeichnet Clifford [4] die Aussage (e) als „Theorem von Hölder" unter Verweis auf [7]; auch gehört jeder dichte archimedische Halbmodul mit JIV zu den von Clifford [5] behandelten Halbmoduln, deren Addition stetig bezüglich der Ordnungstopologie ist und deren „unterhalbstetigen" und „oberhalbstetigen" normalen Vervollständigungen zu einer eindeutig bestimmten normalen Vervollständigung zusammenfallen.

wegen JI und JIII auch das Nullelement von $S(\mathfrak{M})$, also $S(\mathfrak{P})$ der Positivitätsbereich von $S(\mathfrak{M})$ ist. Im Modulfall $\mathfrak{M}=\mathfrak{P}'\cup\{0\}\cup\mathfrak{P}$ ergibt sich analog $S(\mathfrak{M})= = S(\mathfrak{P}')\cup\{0\}\cup S(\mathfrak{P})$ und die Moduleigenschaft von $S(\mathfrak{M})$ aus (1. 4).

Aussage (c) ist wegen (b) nur noch für den natürlichen Fall zu zeigen. Dazu diskutieren wir das Schema:

$$
\begin{tikzcd}
S(\mathfrak{T}) & & D(\mathfrak{S}) \\
\mathfrak{T}=D(\mathfrak{M}) \arrow[u, dash] & & S(\mathfrak{M})=\mathfrak{S} \arrow[u, dash] \\
& \mathfrak{M} \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}
$$

Zunächst ist $D(\mathfrak{S})$ mit $\mathfrak{S}$ stetig, wie man am einfachsten unter Verwendung der Zerlegung $D(\mathfrak{S})=\mathfrak{S}'\cup\{0\}\cup\mathfrak{S}$ erkennt; je nachdem, ob es in der Unterklasse A eines Schnitts (A, B) in $D(\mathfrak{S})$ ein Element $a\in\mathfrak{S}$ gibt oder nicht, erhält man nämlich als Schnittelement von (A, B) das Schnittelement des Schnitts $(A\cap\mathfrak{S}, B\cap\mathfrak{S})$ in $\mathfrak{S}$ oder 0 bzw. das Schnittelement des Schnitts $(A\cap\mathfrak{S}', B\cap\mathfrak{S}')$ in $\mathfrak{S}'$. Als geordneter Obermodul von $\mathfrak{M}$ enthält $D(\mathfrak{S})$ weiterhin den (bis auf ähnliche Isomorphie eindeutig bestimmten) geordneten Differenzenmodul $\mathfrak{T}=D(\mathfrak{M})$ von $\mathfrak{M}$. Darüber hinaus ist $\mathfrak{T}$ dicht in $D(\mathfrak{S})$, wie sich ohne weiteres durch Fallunterscheidung aus $D(\mathfrak{M})=\mathfrak{M}'\cup\{0\}\cup\mathfrak{M}$ und $D(\mathfrak{S})=\mathfrak{S}'\cup\{0\}\cup\mathfrak{S}$ ergibt. Damit ist aber der Modul $D(\mathfrak{S})$ als unberandete stetige Obermenge von $\mathfrak{T}$, in der $\mathfrak{T}$ dicht liegt, gemäß (1. 9b) ebenfalls stetige Hülle von $\mathfrak{T}$, stimmt also gemäß (a) mit $S(\mathfrak{T})$ bis auf ähnliche Isomorphie überein.

Aussage (d) braucht offenbar gleichfalls nur für den natürlichen Fall gezeigt zu werden. Dann existiert zu $\xi\in\mathfrak{S}$, $\eta\in\mathfrak{S}$ mit $\xi<\eta$ ein $\zeta\in\mathfrak{S}$ mit $\xi+\zeta=\eta$. Zu dem Element ζ bestimmen wir ein $x\in\mathfrak{M}$ mit $x<\zeta$; ein $b\in\mathfrak{M}$ erfüllt nämlich entweder bereits $b<\zeta$, oder es gibt wegen (3. 1b) eine natürliche Zahl n mit $b<n\zeta$ und dazu gemäß (3. 1a) ein $x\in\mathfrak{M}$ mit $nx<b$. Ist nun $\xi<x$, so folgt unmittelbar $\xi<x<\zeta<\eta$; andernfalls ist $x\leqq\xi$, so daß eine natürliche Zahl m mit $(m-1)x\leqq\xi<mx$ existiert, und man erhält dann $\xi<mx\leqq\xi+x<\eta$ mit $mx\in\mathfrak{M}$. Wiederum folgt damit die Behauptung gemäß (1. 9b).

Schließlich genügt es auch zum Nachweis von (e), nur den natürlichen Fall zu betrachten. $\mathfrak{S}$ enthält dann den zu H^+ ähnlich-isomorphen Halbmodul $\mathsf{H}\varepsilon$ aller positiv-rationalen Vielfachen $\beta=\dfrac{a}{b}\varepsilon$ eines beliebigen Elementes $\varepsilon\in\mathfrak{S}$; β ist dabei bestimmt durch die Gleichung $a\varepsilon=b\beta$ $(a\in\mathsf{N}, b\in\mathsf{N})$ und existiert gemäß (3. 1b). $H\varepsilon$ ist dicht in $\mathfrak{S}$; denn zu $\alpha<\beta$ aus $\mathfrak{S}$ gibt es wegen JIV ein $\xi\in\mathfrak{S}$ mit $\alpha+\xi=\beta$ und wegen archimedisch ein $n\in\mathsf{N}$ mit $\varepsilon<n\xi$, also zu dem nach (3. 1*b*) existierenden $\varepsilon'=\dfrac{1}{n}\varepsilon<\xi$ ein $m\in\mathsf{N}$ mit $(m-1)\,\varepsilon'\leqq\alpha<m\varepsilon'$, so daß $\alpha<\dfrac{m}{n}\varepsilon<\beta$ folgt. Damit erhalten wir die Behauptung gemäß (1. 9b) aus $\mathfrak{S}=S(\mathsf{H}\varepsilon)$, $\Theta^+=S(\mathsf{H}^+)$ und (a).

3. Anmerkung. Die Notwendigkeit der Voraussetzung „archimedisch" ergibt sich sofort aus (3. 1b). Im übrigen ist diese Voraussetzung auch unabhängig von den anderen Voraussetzungen, denn es gibt dichte Halbmoduln mit JIV, die nichtarchimedisch sind; ein Beispiel hierfür liefert der Polynomring $\mathsf{P}[x]$, wenn man als Positivitätsbereich $\mathfrak{P}$ die Menge aller Polynome $f(x)\in\mathsf{P}[x]$ zugrundelegt, die

in P einen positiven höchsten Koeffizienten besitzen. $\mathfrak{P}$ selbst ist ein Beispiel dafür, daß auch natürlich geordnete dichte Halbmoduln existieren, die nichtarchimedisch sind.

§ 4. Dichte Halbringe mit JIV

1. Hilfssatz. *Es sei* $\mathfrak{M}$ *ein Halbring mit* JIV; *dann gilt:*

(a) *Ist* $\mathfrak{M}$ *dicht und archimedisch, so gibt es zu jedem Element* $a \in \mathfrak{M}$ *und jedem positiven Element* $b \in \mathfrak{M}$ *ein positives Element* $x \in \mathfrak{M}$ *mit* $ax < b$; $\mathfrak{M}$ *ist dann dicht in seinem Quotientenhalbkörper* $Q(\mathfrak{M})$.

(b) *Ist* $\mathfrak{M}$ *stetig, so ist* $\mathfrak{M}$ *selbst sogar Halbkörper.*

Beweis. (a) Jedenfalls existiert zunächst ein $n \in \mathsf{N}$ mit $ab < nb$ und weiter nach (3. 1a) ein positives $x \in \mathfrak{M}$ mit $nx < b$. Damit folgt in der Tat

$$abx < (nb)x = b(nx) < bb, \quad \text{also} \quad ax < b.$$

Zum Beweis der zweiten Behauptung brauchen wir wegen (1. 4) nur zu zeigen, daß zu Elementen $\frac{u}{v}$ und $\frac{w}{v}$ aus $Q(\mathfrak{M})$ mit $\frac{u}{v} < \frac{w}{v}$ und positiven Elementen u, v, w aus $\mathfrak{M}$ ein Element $x \in \mathfrak{M}$ existiert mit $\frac{u}{v} < x < \frac{w}{v}$. Aus $\frac{u}{v} < \frac{w}{v}$ folgt aber $u < w$, also wegen JIV die Existenz eines positiven Elementes $z \in \mathfrak{M}$ mit $u + z = w$ und nach obigem die Existenz eines positiven Elementes $y \in \mathfrak{M}$ mit $vy < z$. Entweder ist nun $u < vy$, oder es gibt in dem archimedischen Halbring $\mathfrak{M}$ eine natürliche Zahl $n > 1$ mit

$$(n-1)vy \leqq u < n(vy).$$

Also ist für $n \geqq 1$

$$u < n(vy) \leqq u + vy < u + z = w, \quad \text{mithin} \quad u < v(ny) < w,$$

und $x = ny$ erfüllt die geforderte Bedingung.

(b) Wegen (3. 1b) und (1. 4) genügt es hier zu zeigen, daß zu positiven Elementen a und b aus $\mathfrak{M}$ stets ein $x \in \mathfrak{M}$ mit $ax = b$ existiert. Ein solches $x \in \mathfrak{M}$ ist aber das Schnittelement des Schnitts (A, B) in $\mathfrak{M}$, dessen Unterklasse A aus allen Elementen $a' \in \mathfrak{M}$ mit $aa' \leqq b$ besteht $(A \neq \emptyset$ wegen Teil (a)).

2. Satz. *Es sei* $\mathfrak{M}$ *ein dichter und archimedischer Halbring mit* JIV; *dann gilt:*

(a) *Es existiert (neben der bereits gemäß* (3. 2a) *eindeutig bestimmten Fortsetzung der Addition) eine und nur eine Fortsetzung der Multiplikation von* $\mathfrak{M}$ *auf* $S(\mathfrak{M})$, *so daß* $S(\mathfrak{M})$ *geordneter Oberhalbring von* $\mathfrak{M}$ *wird; es gibt also bis auf ähnliche Isomorphie genau einen geordneten Oberhalbring von* $\mathfrak{M}$, *der zugleich stetige Hülle von* $\mathfrak{M}$ *ist.*

(b) $S(\mathfrak{M}) = S(Q(\mathfrak{M}))$, *d. h. die stetige Hülle von* $\mathfrak{M}$ *stimmt (bis auf ähnliche Isomorphie) mit derjenigen des Quotientenhalbkörpers* $Q(\mathfrak{M})$ *von* $\mathfrak{M}$ *überein.*

(c) $S(\mathfrak{M})$ *ist ein gleichartiger Oberhalbkörper von* $\mathfrak{M}$.

(d) $D(S(\mathfrak{M})) = S(D(\mathfrak{M}))$, *d. h. Bildung der stetigen Hülle und des geordneten Differenzenringes sind (bis auf ähnliche Isomorphie) vertauschbare Operationen.*

(e) *Jeder gleichartige stetige Oberhalbring* $\mathfrak{S}$ *von* $\mathfrak{M}$ *stimmt (bis auf ähnliche Isomorphie) mit* $S(\mathfrak{M})$ *überein.*

Zusatz. *Insbesondere garantiert dies die Existenz und Einzigkeit des Körpers* Δ *der reellen Zahlen, gleichgültig ob man von* H *über* P *oder* Θ *aufsteigt:*

$$\Delta = D(\Theta) = S(\mathsf{P}) \quad mit \quad \Theta = S(\mathsf{H}) \quad und \quad \mathsf{P} = D(\mathsf{H}).$$

Darüber hinaus gilt:

(f) *Jeder stetige Halbring* $\mathfrak{S}$ *mit* JIV *ist ähnlich isomorph zu*

$$\Theta \quad oder \quad \{0\} \cup \Theta \quad oder \quad \Delta.$$

Beweis. Zur Vermeidung von Vorzeichenschwierigkeiten empfiehlt es sich, zunächst nur den *natürlichen* Fall zu betrachten und den allgemeinen Fall dann unter Berücksichtigung von (1. 4) zu behandeln:

Aussage (a) kann für einen *Halbkörper* $\mathfrak{M}$ wieder wie in der Zahlenrechnung beim Übergang von H zu Θ gezeigt werden; das Produkt zweier Elemente ξ und ξ' aus $S(\mathfrak{M})$, die Schnittelelemente der beiden Schnitte (A, B) und (A', B') in $\mathfrak{M}$ mit Oberklassen ohne Minimum sind, ist dabei das Schnittelement ξ'' des Schnitts (A'', B'') in $\mathfrak{M}$, dessen Oberklasse B'' gerade aus allen Produkten $b \cdot b'$ mit $b \in B$, $b' \in B'$ besteht. Der *Halbringfall* läßt sich darauf durch Quotientenbildung zurückführen. In der Tat liegt $\mathfrak{M}$ dann gemäß (4. 1a) dicht in seinem (unberandeten) Quotientenhalbkörper $Q(\mathfrak{M})$, so daß gemäß (1. 9b) $S(\mathfrak{M})$ und $S(Q(\mathfrak{M}))$ bis auf Ähnlichkeit übereinstimmen. Da weiterhin $Q(\mathfrak{M})$ mit $\mathfrak{M}$ ebenfalls dicht, archimedisch und natürlich geordnet ist, trifft (a) nach obigem auf $S(Q(\mathfrak{M}))$ zu, so daß $S(\mathfrak{M}) = S(Q(\mathfrak{M}))$ jedenfalls auf eine Weise geordneter Oberhalbring von $\mathfrak{M}$ ist. Zum Beweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, $S(\mathfrak{M})$ liege irgendwie als geordneter Oberhalbring von $\mathfrak{M}$ vor; $S(\mathfrak{M})$ ist dann gemäß (3. 2b) mit $\mathfrak{M}$ natürlich geordnet und daher nach (4. 1b) sogar geordneter Oberhalbkörper von $\mathfrak{M}$. Also enthält $S(\mathfrak{M})$ auch den (bis auf ähnliche Isomorphie eindeutig bestimmten) geordneten Quotientenhalbkörper $Q(\mathfrak{M})$ von $\mathfrak{M}$, so daß die Multiplikation in $S(\mathfrak{M})$ eine Fortsetzung der Multiplikation von $Q(\mathfrak{M})$ ist, die wegen der (oben gezeigten mengenmäßigen) Gleichheit von $S(\mathfrak{M})$ und $S(Q(\mathfrak{M}))$ die stetige Hülle $S(Q(\mathfrak{M}))$ von $Q(\mathfrak{M})$ zu einem geordneten Oberhalbring von $Q(\mathfrak{M})$ macht. Da Aussage (a) aber für Halbkörper bereits gesichert ist, folgt daraus, daß diese Multiplikation die einzig mögliche in $S(\mathfrak{M})$ ist. Zugleich haben wir (für den natürlichen Fall) die Aussagen (b) und (c) gezeigt.

Ist $\mathfrak{M}$ ein Halbring von der Form $\mathfrak{M} = \{0\} \cup \mathfrak{P}$, so gewinnt man die Aussagen (a) und (c) wegen $S(\mathfrak{M}) = \{0\} \cup S(\mathfrak{P})$ sofort aus obigem und Aussage (b) aus

$$S(\mathfrak{M}) = \{0\} \cup S(Q(\mathfrak{P})) = S(\{0\} \cup Q(\mathfrak{P})) = S(Q(\mathfrak{M})).$$

Den *Ringfall* erfassen wir durch Betrachtung des (bis auf ähnliche Isomorphie eindeutig bestimmten) geordneten Differenzenringes $D(\mathfrak{M})$ eines natürlich geordneten Halbrings $\mathfrak{M}$, da sich ja jeder geordnete Ring als geordneter Differenzenring seines natürlich geordneten Positivitätsbereichs gewinnen läßt. Dazu untersuchen wir das im Beweis von (3. 2c) für Halbmoduln diskutierte Schema noch im Hinblick auf die Fortsetzung der Multiplikation. Als geordneter Oberring von $\mathfrak{M}$ enthält $D(\mathfrak{S})$ sicher $D(\mathfrak{M})$, d. h. die Multiplikation in $D(\mathfrak{S})$ ist eine Fortsetzung der Multiplikation in $D(\mathfrak{M})$ und macht wegen der gemäß (3. 2c) vorliegenden Gleichheit der Moduln $D(\mathfrak{S})$ und $S(\mathfrak{T})$ letzteren jedenfalls auf eine Weise zu einem geordneten Oberring von $\mathfrak{T}$. Jede andere Multiplikation in $S(\mathfrak{T})$, mit welcher der Modul

$S(\mathfrak{T})$ ebenfalls zu einem geordneten Oberring von $\mathfrak{T}$ wird, erklärt wegen der (bis auf ähnliche additive Isomorphie bestehenden) Beziehung

$$S(\mathfrak{T}) = D(\mathfrak{S}) \supseteqq \mathfrak{S}$$

in $\mathfrak{S}$ eine Multiplikation, die Fortsetzung der Multiplikation in $\mathfrak{M}$ ist und $\mathfrak{S}$ zu einem geordneten Halbring macht; letzteres folgt daraus, daß $\mathfrak{S}$ gerade der Positivitätsbereich seines Differenzenmoduls $D(\mathfrak{S}) = S(\mathfrak{T})$ ist. Daher stimmt die Multiplikation der positiven Elemente von $S(\mathfrak{T})$ mit der nach obigem einzigen vorhandenen Multiplikation in $\mathfrak{S}$ überein. Die Multiplikation im Positivitätsbereich legt aber in einem Ring auch die Multiplikation mit negativen Faktoren eindeutig fest. Damit ist (a) für Ringe und gleichzeitig (d) gezeigt.

(b) ergibt sich für einen Ring $\mathfrak{M}$ unter Verwendung der Tatsache, daß für den Positivitätsbereich $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{M}$ als Halbring mit JIV die Differenzenring- und Quotientenhalbkörperbildung vertauschbare Operationen sind (vgl. (1. 3)):

$$\begin{aligned} S(\mathfrak{M}) = S(D(\mathfrak{P})) = D(S(\mathfrak{P})) = D(S(Q(\mathfrak{P}))) = S(D(Q(\mathfrak{P}))) \\ = S(Q(D(\mathfrak{P}))) = S(Q(\mathfrak{M})). \end{aligned}$$

Aussage (c) folgt wieder unter Berücksichtigung von (1. 4).

Aussage (e) bzw. (f) zeigt man wie Aussage (d) bzw. (e) in (3. 2), wobei an die Stelle von Hilfssatz (3. 1) der Hilfssatz (4. 1) tritt und im Beweis von (f) das Element $\varepsilon \in \mathfrak{S}$ als das Einselement von $\mathfrak{S}$ gewählt wird.

3. Anmerkung. Es scheint schwierig zu sein, den Beweis von (4. 2a) sogleich allgemein für natürlich geordnete Halbringe zu führen, also den Einsatz der Division dabei zu verweiden, etwa bei Schlüssen wie: Sind B und B' Oberklassen ohne Minimum von Schnitten in $\mathfrak{M}$ und gilt für $y \in \mathfrak{M}$ die Ungleichung $y > b \cdot b'$ mit $b \in B$, $b' \in B'$, so hat man auch eine Gleichung $y = b_1 \cdot b_1'$ mit $b_1 \in B$, $b_1' \in B'$ (was sich etwa durch Lösen der Gleichung $y = b \cdot x$ in einem Halbkörper $\mathfrak{M}$ sehr leicht ergibt, da dann $x > b'$, also $x \in B'$ gilt).

Literatur

[1] B. Banaschewski, Über die Vervollständigung geordneter Gruppen, *Math. Nachr.* **16** (1957), 51–71.

[2] G. Birkhoff, Lattice theory (2. Aufl.), *New York*, 1948.

[3] A. H. Clifford, Naturally totally ordered commutative semigroups, *Amer. J. Math.* **76** (1954), 631–646.

[4] A. H. Clifford, Totally ordered commutative semigroups, *Bull. Amer. Math. Soc.* **64** (1958), 305–316.

[5] A. H. Clifford, Completion of semi-continuous ordered commutative semigroups, *Duke Math. J.* **26** (1959), 41–59.

[6] L. Fuchs, Note on fully ordered semigroups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **12** (1961), 255–259.

[7] O. Hölder, Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß, *Ber. üb. d. Verh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Math. Phys. Cl.* **53** (1901), 1–64.

[8] E. V. Huntington, A complete sets of postulates for the theory of absolute continuous magnitude, *Trans. Amer. Math. Soc.* **3** (1902), 264–279.

[9] E. V. Huntington, Complete sets of postulates for the theories of positive integral and positive rational numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.* **3** (1902), 280–284.

[10] L. Rédei, Algebra, 1. Teil (bearb. u. erw. Übers. aus dem Ungar.), *Leipzig*, 1959.

[11] H. J. Weinert, Über Halbringe und Halbkörper, *Habil. schrift, Potsdam*, 1960.

(Eingegangen am 14. Nov. 1961; in veränderter Form am 23. Mai 1962.)