О ПОЛУГРУППЕ ПОДМНОЖЕСТВ ПОЛУГРУППЫ

Ш. Лайош (Будапешт)

Профессору Б. С.-Надь к его пятидесятилетию

В книге [1] Е. С. Ляпин обращает внимание на важность исследования полугруппы подмножеств полугруппы. В настоящей работе рассматриваются некоторые вопросы, связанные с этим направлением.

В дальнейшем предполагаются известными следующие понятия общей теории полугрупп: подполугруппа, левый идеал, двусторонний идеал, идемпотентный элемент, нуль полугруппы, регулярная полугруппа, полуструктура, гомогруппа (см. например, книгу Е. С. Ляпина [1]).

Пусть S есть произвольная полугруппа и A, B — два подмножества полугруппы S. Произведением подмножеств A и B полугруппы S называется множество, состоящее из всех элементов вида ab, где $a \in A$, $b \in B$. Оно обозначается через AB.

Обозначим через $\bar{S}$ совокупность всех непустых подмножеств полугруппы S. Легко доказать, что множество $\bar{S}$ является полугруппой относительно описанного действия. Ясно, что полугруппа $\bar{S}$ коммутативна, если S коммутативна, и $\bar{S}$ идемпотентна, если S идемпотентна. (Полугруппа S называется идемпотентной, если все элементы S идемпотентны.) Следуя Ш. Шварца [2], полугруппу S называем нормальной, если выполняется соотношение

$$xS = Sx, \tag{1}$$

для всех $x \in S$.

Теорема 1. Если полугруппа S нормальная, тогда полугруппа $\bar{S}$ также является нормальной.

Доказательство. Нужно доказать, что

$$A\bar{S} = \bar{S}A,$$

где A произвольное непустое подмножество полугруппы S. а) Мы докажем, что $A\bar{S} \subseteqq \bar{S}A$. Так как полугруппа S нормальная, имеем

$$aB \subseteqq aS = Sa \subseteqq SA \subseteqq \bar{S}A,$$

где $a \in A$, $B \in \bar{S}$. Итак $A\bar{S} \subseteqq \bar{S}A$.

б) Аналогично доказывается, что $\bar{S}A \subseteqq A\bar{S}$. Из а) и б) следует, что $A\bar{S} = \bar{S}A$, для всех $A \in \bar{S}$, т. е. полугруппа $\bar{S}$ является нормальной, что и требовалось доказать.

Определение. Подполугруппа A полугруппы S называется (1, 1)-идеалом, если выполняется соотношение

$$ASA \subseteq A. \tag{2}$$

Понятие (1, 1)-идеала является специальным случаем понятия (m, n)-идеала [3]. Докажем, что совокупность всех (1, 1)-идеалов любой полугруппы S является полугруппой, и полугруппа всех (1, 1)-идеалов полугруппы S есть двусторонний идеал полугруппы $\bar{S}$.

Лемма. Произведение (1, 1)-идеала и непустого подмножества полугруппы S является (1, 1)-идеалом полугруппы S.

Доказательство. Пусть A есть (1, 1)-идеал и B--непустое подмножество полугруппы S. Докажем, что произведение AB является (1, 1)-идеалом полугруппы S. Так как

$$ABA \subseteqq ASA \subseteqq A,$$

следует, что

$$(AB)(AB) = (ABA)B \subseteqq AB,$$

т. е. произведение AB есть подполугруппа полугруппы S. Так как $BS \subseteqq S$, получаем, что

$$(AB)S(AB) = A(BS)A \cdot B \subseteqq ASA \cdot B \subseteqq AB,$$

т. е. произведение AB удовлетворяет условию (2), итак AB является (1, 1)-идеалом полугруппы S.

Аналогично доказывается, что произведение BA также является (1, 1)-идеалом полугруппы S.

Следствие.[1]) Произведение двух (1, 1)-идеалов полугруппы S является (1, 1)-идеалом полугруппы S. Из этого следует

Теорема 2. Множество S_1 всех (1, 1)-идеалов любой полугруппы S является полугруппой.

---

[1]) Из этого следствия и теоремы 3.2 статьи автора [3] вытекает, что произведение двух квазиидеалов регулярной полугруппы S является квазиидеалом полугруппы S.

Очевидно, что полугруппа всех (1, 1)-идеалов коммутативной полугруппы является коммутативной, и полугруппа всех (1, 1)-идеалов идемпотентной полугруппы является идемпотентной, т. е. имеет место

Теорема 3. *Полугруппа всех (1, 1)-идеалов полуструктуры сама является полуструктурой.*

Теорема 4. *Множество всех (1, 1)-идеалов регулярной полугруппы является регулярной полугруппой.*

Доказательство. Пусть S есть регулярная полугруппа, и обозначим через S_1 множество всех (1, 1)-идеалов полугруппы S. В смысле теоремы 2 множество S_1 является полугруппой. Докажем, что уравнение

$$AXA = A \qquad (A \in S_1) \tag{3}$$

разрешимое в полугруппе S_1. Пусть $a \in A$, и $x \in S$ одно решение уравнения $axa = a$. Пусть X' обозначит множество этих решений x, когда элемент a пробегает A. Пусть X обозначит (1, 1)-идеальную оболочку множества X':

$$X = X' \cup X'X' \cup X'SX'.$$

Так как A есть (1, 1)-идеал полугруппы S, поэтому имеет место $AXA \subseteqq A$. С другой стороны, так как $a = axa \in AXA$, следует, что $A \subseteqq AXA$. Следовательно, $A = AXA$, т. е. X является решением уравнения (3), итак полугруппа S_1 является регулярной, что и требовалось доказать.

Замечание. Аналогично доказывается, что множество всех (1, 1)-идеалов (m, n)-регулярной полугруппы тоже является (m, n)-регулярной полугруппой, где m и n-целые положительные числа. Полугруппу S называем (m, n)-регулярной, если для всех элементов $a \in S$ существует такой, элемент $x \in S$ что $a^m x a^n = a$, где m, n — целые неотрицательные числа (a^0 означает пустой символ, см. [1]).

Теорема 5. *Множество всех (1, 1)-идеалов гомогруппы является гомогруппой. Точнее: Если H-гомогруппа, тогда полугруппа всех (1, 1)-идеалов гомогруппы H является полугруппой с нулем.*

Доказательство. Пусть H есть гомогруппа, и G — ее двусторонний идеал, являющийся группой. Множество всех (1, 1)-идеалов гомогруппы H обозначим через H_1. Очевидно, что G является (1, 1)-идеалом гомогруппы H, т. е. $G \in H_1$. Согласно теореме 2 множество H_1 есть полугруппа. Так как $GA \subseteqq G$, где $A \in H_1$, и группа не имеет собственного (1, 1)-идеала (см. [3]), далее, так как произведение GA является (1, 1)-идеалом гомогруппы

H, поэтому $GA=G$. Аналогично следует, что $AG=G$, для всех $A \in H_1$, т. е. G является нулем полугруппы H_1. Следовательно, H_1 является гомогруппой. Этим теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. С. Ляпин, Полугруппы, Москва, 1960.

[2] Š. Schwarz, A theorem on normal semigroups, *Czechoslovak Math. J.* **10** (85), (1960), 197—200.

[3] S. Lajos, Generalized ideals in semigroups, *Acta Sci. Math. Szeged* **22** (1961), 217—222.

(Поступило 26. 1. 1962.)