Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Miquel

Von WALTER BENZ (Frankfurt/Main)

In [3] gibt L. PECZAR einen eleganten Beweis des Satzes von MIQUEL *(Lassen sich acht verschiedene Punkte so den Eckpunkten eines Würfels zuordnen, daß es fünfmal vorkommt, daß den Eckpunkten einer Seitenebene des Würfels vier konzyklische Punkte entsprechen, so ist dies auch bei den Eckpunkten der sechsten Seitenebene der Fall.*[1]) Bei geeigneter Bezeichnung der Punkte läßt sich dieser Satz äquivalent auch so formulieren: *Sind A, B, C, D, E, F, G, H verschiedene Punkte derart, daß die Quadrupel $ABCD$, $AEHD$, $FBCG$, $AFCH$, $EBGD$ konzyklisch sind, so ist auch das Quadrupel $EFGH$ konzyklisch.* s. Fig. 1). Dieser Beweis lautet für den Fall der Riemannschen Zahlenkugel so: Da fünf der Doppelverhältnisse in der Identität

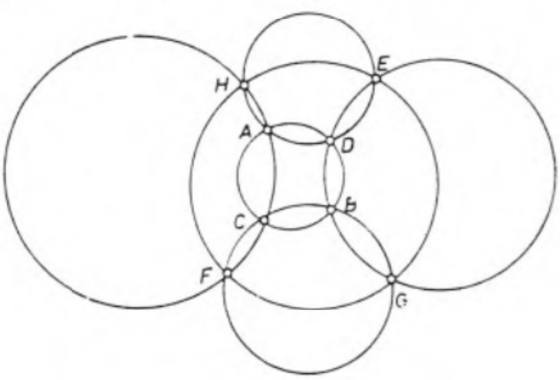

Fig. 1

$$(M)\qquad \begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ H & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & E \\ D & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & B \\ G & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & F \\ H & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & B \\ D & G \end{bmatrix}$$

reell sind, muß auch das sechste Doppelverhältnis reell sein[2])[3]).

Die Identität (M) von PECZAR beweist allgemeinere Aussagen als den Satz von MIQUEL, z. B. den Satz: *Sind A, B, C, D, E, F, G, H verschiedene Punkte derart,*

---

[1]) Formuliert nach VAN DER WAERDEN, SMID [4].

[2]) Benutzt wird dabei natürlich der elementare Sachverhalt, daß das Doppelverhältnis von vier verschiedenen Punkten der Riemannschen Zahlenkugel genau dann reell ist, wenn diese Punkte gemeinsam auf einem Kreis liegen. — Es werde ferner beachtet, daß $\begin{bmatrix} PQ \\ SR \end{bmatrix} = \frac{P-R}{P-S} \, \frac{Q-S}{Q-R}$ für verschiedene Punkte P, Q, R, S der Zahlenkugel von ∞, 0 verschieden ist.

[3]) PECZAR schreibt die Identität (M) etwas anders auf. Vielleicht ist sie in der vorliegenden Form leicht zu merken, wenn man die rechte Seite von (M) über $\begin{bmatrix} A & \cdot \\ D & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & B \\ \cdot & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \cdot \\ \cdot & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & B \\ D & \cdot \end{bmatrix}$ entstehen läßt.

daß die Quadrupel AEHD, FBCG, AFCH, EBGD konzyklisch sind, so gilt die Winkelidentität[4]) $((ABC)(ABD);\, B) = ((EFH)(EFG);\, F)$ (s. Fig. 2).

Wir wollen den vorstehenden — gering zu modifizierenden — Satz in einer Klasse von Geometrien[5]) — nach vorheriger Einführung einer speziellen zweistelligen Relation, einer *Winkelvergleichung*, auf der Menge der Winkel — nach-

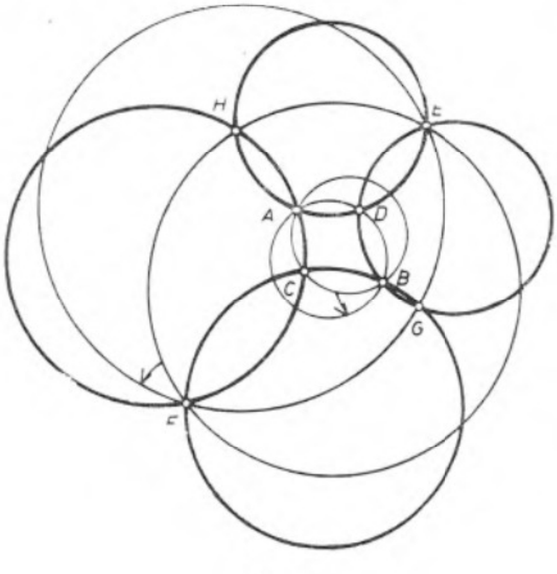

Fig. 2

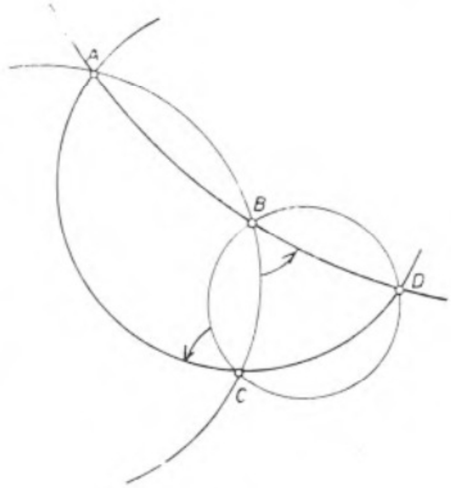

Fig. 3

weisen, die grösser[6]) als die von PECZAR betrachtete Klasse ist. Unsere zugrundegelegte Klasse umfaßt also mehrere anschauliche Geometrien (neben der klassischen Möbiusgeometrie z. B. die klassische Laguerregeometrie, eine Parabelgeometrie, eine Hyperbelgeometrie).

Sei $\mathfrak{K}$ ein kommutativer Körper, sei $\mathfrak{R}$ ein echter kommutativer Oberring von $\mathfrak{K}$, der ein 1-Element besitzt, das mit dem 1-Element von $\mathfrak{K}$ übereinstimmen soll. Sei Σ die Kettengeometrie[7]), die vermöge der $\mathfrak{K}$-Algebra $\mathfrak{R}$ erklärt ist (s. [1]). Punkte bzw. Kreise bezeichnen wir mit großen bzw. kleinen lateinischen Buchstaben. Für die Winkel in Σ [8]) geben wir eine Winkelvergleichung (Äquivalenzrelation auf der Menge der Winkel) an: *Es sei $(ab;\, S)$ ein Winkel von Σ. Ist dann S' ein Punkt aus*

---

[4]) Unter einem Winkel wird ein orientierter Kreiswinkel verstanden: Sind a, b, $|a \cap b| \geqq 2$, Kreise auf einer mit einer Indikatrix versehenen Kugel, so ist $(ab;\, S)$, $S \in a \cap b$, der der Größe nach eindeutig bestimmte Winkel modulo π, der in S längs der durch die Indikatrix gegebenen Orientierung vom Kreis a zum Kreis b führt.

[5]) Wir meinen die in [1] betrachtete Klasse.

[6]) Vgl. hierzu Fußnote 1 in [1].

[7]) Wir werden allerdings statt „Kette" durchweg „Kreis" sagen.

[8]) Der in [2], § 1, für eine beliebige Kreisebene gegebene Winkelbegriff kann hier übernommen werden, da Σ gewiß Kreisebene ist (Geordnetes Kreispaar zweier sich mindestens in zwei verschiedenen Punkten schneidender Kreise a, b zusammen mit einem Schnittpunkt S derselben, in Zeichen $(ab;\, S)$.).

$a \cap b - \{S\}$ (wir beachten, daß durch drei verschiedene Punkte von Σ höchstens ein Kreis von Σ hindurchgeht, s. [1], Satz 1), *sind* A, B *Punkte mit* $A \in a - \{S, S'\}$, $B \in b - \{S, S'\}$, *so heißt die Restklasse* $\varphi = \begin{bmatrix} S' & S \\ B & A \end{bmatrix} \mathfrak{R}^*$ *der Faktorgruppe* $\mathfrak{r}/\mathfrak{R}^*$ — $\mathfrak{r}$ *bezeichnet die multiplikative Gruppe der regulären Elemente des Ringes* $\mathfrak{R}$ — *die Maßzahl (oder auch die Größe) des Winkels* $(ab; S)$ [9]). — *Die Winkel* $(ab; S)$, $(cd; T)$ *heißen genau dann gleich, in Zeichen* $(ab; S) = (cd; T)$, *wenn sie die gleiche Maßzahl besitzen* [11]).

Die Geometrie Σ genügt gegenüber der angegebenen Winkelvergleichung einer Reihe von interessanten elementargeometrischen Sätzen, z. B. dem Satz über den Sehnentangentenwinkel (Ist A, B, C, D ein paarweise konzyklisches [12]), jedoch insgesamt nicht konzyklisches Punktequadrupel, so gilt $((ABC)(ABD); B) = ((DCB)(DCA); C)$ (Fig. 3); dieser Satz folgt sofort aus der Identität $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & C \\ A & B \end{bmatrix}$.) Das mag man einfach übertragen von dem Fall „$\mathfrak{R}$ Körper" her (§ 2 in [2])[13]). Wir wollen uns hier nur dem bereits angegebenen — jetzt zu modifizierenden — verallgemeinerten Satz des Satzes von Miquel zuwenden: *Es seien* A, B, C, D, E, F, G, H *verschiedene Punkte, von denen je zwei gemeinsam auf mindestens einem Kreise liegen* [14]), *derart, daß die Quadrupel* $AEHD$, $FBCG$, $AFCH$, $EBGD$ *konzyklisch sind. Dann gilt die Winkelidentität* $((ABC)(ABD); B) = ((EFH)(EFG); F)$.

Beweis. Wir stellen zunächst fest, daß die Tripel ABC, ABD, EFH, EFG je konzyklisch sind, da A, B, C, D, E, F, G, H eine eigentliche Punktmenge ist. Wegen der Identität (M), die auch in unserem allgemeinen Falle gilt, ist aufgrund der gemachten Voraussetzungen $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix} \mathfrak{R}^* = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} \mathfrak{R}^*$. Also sind die Winkel $((ABC)(ABD); B)$, $((EFH)(EFG); F)$ von gleicher Größe.

---

[9]) Im Gegensatz zu [1] wollen wir hier schon dann dem Punktequadrupel P, Q, R, S ein — gewiß reguläres — Doppelverhältnis $\begin{bmatrix} P & Q \\ S & R \end{bmatrix}$ zuordnen, wenn nur P, Q, R und P, Q, S je eigentliche[10]) Punktetripel sind.

[10]) s. [1].

[11]) Diese Winkelvergleichung haben wir früher bereits eingeführt für den Fall, daß alle von 0 verschiedenen Elemente von $\mathfrak{R}$ regulär sind (s. [2], 2. 7. 1.). — Wegen des Nachweises, daß die Maßzahl φ des Winkels $(ab; S)$ nicht von den Punkten A, B — innerhalb der getroffenen Einschränkungen — abhängt, verweisen wir auf Fußnote 21 in [2], wo dieser Nachweis für den speziellen Fall angegeben ist.

[12]) Man bedenke bei dieser Voraussetzung, daß ja schon in der Laguerregeometrie nicht immer zwei Speere gemeinsam auf einem Zykel liegen.

[13]) Insbesondere kann man wie in [2], 2. 7. 1., die Äquivalenzklassen gleicher Winkel zur Winkelgruppe $\mathfrak{W}$ von Σ zusammenfassen mit $\mathfrak{W} \cong \mathfrak{r}/\mathfrak{R}^*$. Im Falle der klassischen Laguerregeometrie ist diese Gruppe — bis auf Isomorphie — die additive Gruppe des reellen Zahlkörpers, also die Winkelgruppe der klassischen Laguerregeometrie. Im Falle der klassischen Möbiusgeometrie liegt — bis auf Isomorphie — die Torusgruppe $[0, \pi)$ vor.

[14]) Eine solche Voraussetzung kann schon nicht im Falle des Satzes von Miquel entbehrt werden (s. Fußnote 7 in [1]).

Literatur

[1] W. Benz, $(8_3, 6_4)$-Konfigurationen in Laguerre-, Möbius- und weiteren Geometrien, *Math. Z.* **70** (1958), 283—296.
[2] W. Benz, Über Möbiusebenen. (Ein Bericht) *J. ber. d. DMV* **63** (1960), 1—27.
[3] L. Peczar, Über eine einheitliche Methode zum Beweis gewisser Schließungssätze, *Monatsh. Math.* **54** (1950), 210—220.
[4] B. L. van der Waerden und L. J. Smid, Eine Axiomatik der Kreisgeometrie und der Laguerregeometrie, *Math. Ann.* **110** (1935), 753—776.

(Eingegangen am 27. Januar 1962.)