Über die Begründung der elliptischen Geometrie

Herrn Professor Dr. Paul Szász zum 60. Geburtstag gewidmet

Von J. STROMMER (Budapest)

Einleitung

Die Aufgabe, die elliptische ebene Geometrie mit ausschließlicher Benutzung ebener Axiome und ohne Stetigkeitsbetrachtungen zu begründen, ist von G. HESSENBERG gelöst worden [1]). Er hat zunächst den PASCALschen Satz für die elliptische Ebene unter Hinzuziehung der Kongruenzsätze in der Ebene und unabhängig von den Stetigkeitsaxiomen nachgewiesen. Von diesem Satz aus gelangt man zum projektiven Fundamentalsatz und zum Rechnen mit Würfen. Die trigonometrischen Funktionen lassen sich dann als Würfe definieren und die Grundformeln der Trigonometrie entwickeln.

Mit denselben Hilfsmitteln ist es aber möglich die analytische Geometrie der elliptischen Ebene, unabhängig von der Trigonometrie, unmittelbar zu begründen, und dann die trigonometrischen Funktionen als gewisse Bewegungsinvariente zu definieren, und die Grundformeln der Trigonometrie als eine Folge der analytischen Geometrie nachzuweisen. Dieser Aufbau der elliptischen Geometrie hat gegenüber dem von HESSENBERG eingeschlagenen Weg den Vorzug größerer Einfachheit.

Es soll in dieser Arbeit eine Darstellung dieses Weges kurz angedeutet werden.

Wir legen unseren Behandlungen die Verknüpfungs-, Anordnungs- und Kongruenztatsachen der elliptischen Ebene nebst den bekannten Sätzen über Pol und Polare in bezug auf die absolute Polarität derselben, sowie den projektiven Fundamentalsatz zu Grunde.

§ 1. Escherichsche Punkt- und Linienkoordinaten

Wir nehmen durch einen Punkt O zwei zueinander senkrechte Gerade x, y als festes rechtwinkliges Achsenkreuz und die Schnittpunkte ∞_x, ∞_y derjenigen Geraden mit der absoluten Polare von $O=O_x=O_y$, sowie die Mitte $1_x, 1_y$ je einer durch O und ∞_x bzw. ∞_y bestimmten Strecke als Fundamentalpunkte der x- und y-Achsen an. Wir wollen die zusammengehörigen (inhomogenen) projektiven Punkt- und

[1]) G. HESSENBERG, Neue Begründung der Sphärik, *S.-B. Berliner Math. Ges.*, 4 (1905), 69–77.

Linienkoordinaten[2]), die auf ein solches System bezogen sind, *Escherichsche Koordinaten* nennen.[3])

Die Escherichschen Koordinaten irgendeines Punktes sind durch den Punkt eindeutig bestimmt, mit Ausnahme der Punkte ∞_x und ∞_y. Im ersten Falle ist $x=\infty$ und y unbestimmt, im zweiten Falle ist x unbestimmt und $y=\infty$. Umgekehrt: die Escherichschen Koordinaten x, y bestimmen eindeutig einen Punkt, mit Ausnahmen der Punkte, für die $x=\infty$ und $y=\infty$ ist. In diesem Falle können wir, um den Punkt zu bestimmen, den Quotient y/x angeben, wodurch eigentlich die projektive Koordinate z des Punktes in bezug auf die Gerade $(0, 0)$ angegeben wird.

Zu jeder Geraden gehört ferner ein und nur ein Paar (u, v) von Linienkoordinaten, mit Ausnahme der Achsen. Die Linienkoordinaten der Abszissenachse sind: $u=$ unbestimmt, $v=\infty$ und die der Ordinatenachse: $u=\infty$, $v=$ unbestimmt. Umgekehrt: die Koordinaten u und v bestimmen eindeutig eine Gerade, mit Ausnahme des Falles, daß $u=v=\infty$ ist. Dies trifft dann ein, wenn die Gerade durch den Ursprung geht. Um die Geraden durch den Ursprung zu bestimmen, müssen wir auch den Quotient u/v angeben.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß irgendein Punkt (x, y) auf der Geraden (u, v) liegt, oder die Gerade (u, v) durch den Punkt (x, y) geht, ist nun das Bestehen der Gleichung

$$ux+vy+1 = 0.$$

Dies ist also die Gleichung einer Geraden, wenn in derselben die Punktkoordinaten x, y als Veränderliche aufgefaßt werden. Somit wird jede Gerade analytisch durch eine lineare Gleichung in Punktkoordinaten dargestellt, und jede solche Gleichung stellt eine Gerade dar; die Gleichung der Geraden durch den Ursprung ist homogen[4]).

---

[2]) Wir erinnern, daß diese Koordinaten gewisse Klassen untereinander gleicher Würfe sind: Es seien A, B, C, D Elemente eines Grundgebildes der ersten Stufe und A', B', C', D' Elemente desselben oder eines anderen Grundgebildes der ersten Stufe; wir setzen voraus, daß A, B, C sowie A', B', C' verschiedene Elemente sind. Wir sagen: die Würfe — d. h. die geordneten Quadrupeln — $(ABCD)$ und $(A'B'C'D')$ sind einander *gleich*, wenn es eine projektive Abbildung gibt, so daß den Elementen A, B, C, D der Reihe nach die Elemente A', B', C', D' entsprechen. Die Klassen der Würfe, die den Wurf $(ABCA)$, $(ABCB)$, $(ABCC)$ gleich sind, bezeichnen wir bzw. mit ∞, 0, 1. Wir nehmen drei Elemente U, O, E eines Grundgebildes der ersten Stufe als festes Fundamentalelemente an und nennen die Klasse der Würfe, die dem Wurf $(UOEX)$ gleich sind, die *projektive Koordinate* der Elemente X dieses Grundgebildes in bezug auf die Fundamentalelemente U, O, E.

Es ist bekannt, daß sich unter den Klassen einander gleicher Würfe eine „Addition" sowie eine „Multiplikation" definieren läßt, bezüglich denen diese Klassen — mit Ausnahme von ∞ — einen (zufolge des als gültig vorausgesetzten projektiven Fundamentalsatzes) kommutativen Körper bilden, den wir den *Koordinatenkörper* nennen wollen. Bezeichnen wir die Koordinaten der Elementen, die durch die Elemente O und U von E getrennt liegen, als *negativ* zum Unterschiede von denen, die durch dieselbe Elemente von E nicht getrennt sind, und deren Koordinaten dann als *positiv* bezeichnet werden, so wird der Koordinatenkörper angeordnet und somit gelten alle bekannten Rechenregeln. Unter Hinzuziehung der Stetigkeitsaxiome erweist sich der Koordinatenkörper dem Körper der reellen Zahlen isomorph. — Vgl. O. Veblen und J. W. Young, Projective geometry, I (*Boston*, 1910), S. 141—152, 157—159.

[3]) Unter Hinzuziehung der Stetigkeitsaxiome entsprechen diese Koordinaten denselben, die von Escherich zur Behandlung der Theorie der Flächen konstanter negativer Krümmung angewendet wurde. — Vgl. G. v. Escherich, Die Geometrie auf den Flächen constanter negativer Krümmung, *S.—B. Akad. Wiss. Wien, Math.-nat. Kl. II*, **69** (1874), 497—526.

Gudermann benützte analoge Koordinaten für die Sphärik. — Vgl. C. Gudermann, Grundriß der analytischen Sphärik (*Köln*, 1830), S. 1.

[4]) Vgl. die in Fußnote[2]) erwähnte Arbeit von O. Veblen und J. W. Young, S. 169—179.

§ 2. Der analytische Ausdruck der Drehungen um den Ursprung des Koordinatensystems in Escherichschen Koordinaten

Wir verstehen unter einer Mittellinie zweier Geraden a und b eine Gerade derart, daß die Spiegelung an dieser Geraden die Geraden a und b miteinander vertauscht. Zwei Gerade a und b haben zwei Mittellinien e und f, die zueinander senkrecht sind; die Geraden e und f gehören zu dem einen bzw. anderen durch die Geraden a und b bestimmten Winkelfelder.

Bei der Spiegelung der elliptischen Ebene an eine Gerade a derselben, entspricht jeder von a verschiedenen Geraden b eine Gerade b' und der Geraden a dieselbe Gerade. Der Schnittpunkt der Geraden b und b' liegt auf der Geraden a. Entspricht ferner dem Punkte B der Geraden b, der außerhalb der Geraden a liegt, der Punkt B' der Geraden b', so geht die Gerade BB' durch den absoluten Pol A der Geraden a. Hieraus ergibt sich, daß die Spiegelung der elliptischen Ebene an eine Gerade a derselben eine Perspektivität ist, und somit ist jede Bewegung der elliptischen Ebene eine projektive Abbildung derselben auf sich selbst, da jede Bewegung als Produkt von endlich vieler Spiegelungen dargestellt werden kann.

Die Gerade $(0, 0)$ wird ferner von den Verbindungsgeraden der Punkte $(0, 0)$, $(1, 1)$ und $(1, 0)$, $(0, 1)$, die zueinander senkrecht sind, in Punkten geschnitten, für deren Koordinaten $y/x = 1$ bzw. -1 ist. Hieraus folgt sofort, daß die Orthogonalität im Büschel O die elliptische Involution

$$u'/v' = -v/u$$

verursacht.

Es seien nun a und b zwei Gerade, von denen die Gerade durch die Punkte $(0, 0)$, $(1, 1)$ eine Mittellinie ist; wir setzen voraus, daß die Geraden a und b nicht durch O gehen. Die Geraden a, b schneiden die x- und y-Achsen in einem Punkte A bzw. B. Die Gerade AB ist senkrecht zu der Geraden, die durch die Punkte $(0, 0)$, $(1, 1)$ geht; somit geht diese Gerade durch den Punkt der Geraden $(0, 0)$, für dessen Koordinaten $y/x = -1$ ist; auch die andere Mittellinie der Geraden a, b geht durch diesen Punkt. Die Geraden, die den Punkt O mit dem Punkte $(1, 1)$ und dem Punkte der Geraden $(0, 0)$ für dessen Koordinaten $y/x = -1$ ist, verbinden, trennen die x- und y-Achsen harmonisch. Hireaus folgt, daß beliebige zwei Gerade a und b von den Mittellinien derselben Geraden harmonisch getrennt werden.

Entspricht bei der Spiegelung der Ebene an eine Gerade a dem Punkte B, der außerhalb der Geraden a liegt, der Punkt B', und trifft die Gerade BB' die Gerade a in C, ist ferner D ein von C verschiedener Punkt der Geraden a, so werden nach unseren obigen Überlegungen die Geraden DB, DB' von den Geraden CA, CD harmonisch getrennt. Hieraus folgt, daß die Spiegelung der elliptischen Ebene an eine Gerade a derselben eine harmonische Perspektivität ist, deren Achse a und deren Centrum der absoluten Pol der Geraden a ist.

Es sei $C = (a, b)$ ein beliebiger Punkt der Ebene, so daß $a \geqq 0$ ist. Aus der Tatsache, daß die Mittellinien zweier Geraden zueinander senkrecht sind, und die beiden Geraden von denselben harmonisch getrennt werden, folgt, daß die Linienkoordinaten m, n der Mittellinie der Geraden OC und der x-Achse die Gleichung

$$\frac{m}{n} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{b}$$

erfüllen müssen, wobei das Vorzeichen $+$ oder $-$ gilt, ja nachdem, von der Mittellinie die Rede ist, die zu der durch die x-Achse und die Gerade OC bestimmten und die y-Achse enthaltenden oder diese nicht enthaltenden Winkelfeld gehört.

Aus der obigen Überlegung folgt übrigens die wichtige Tatsache, daß im Bereiche der Koordinaten die Operation $\sqrt{1+a^2}$ immer ausführbar ist[5]): Wenn A ein Punkt der x-Achse derart ist, daß die Abszisse von A gleich dem Betrag von a ist, und die Abszisse des Mittelpunktes der durch die Punkte O, A bestimmten und von einer Halbgeraden nicht größeren Strecke mit m bezeichnet wird, so liefert die positive Quadratwurzel von $1+a^2$ die Formel:

$$\sqrt{1+a^2} = |a|m+1.$$

Wir bezeichnen mit E den Punkt $(1, 0)$ und mit C einen beliebigen von O verschiedenen Punkt (a, b) der Ebene, dessen Koordinaten nicht unendlich sind. Die Geraden, die den Punkt O der Reihe nach mit den Punkten $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ verbinden, bestimmen in dieser Reihenfolge eine zyklische Ordnung des Büschels O, die wir den *positiven Umdrehungssinn* um O nennen wollen. Wir sagen: eine Gerade durch O liegt *innerhalb* oder *außerhalb* des Winkels COE, je nachdem durch die Geraden OE, OC und durch jene Gerade in dieser Reihenfolge bestimmte Umdrehungssinn mit dem positiven Umdrehungssinne um O gleich ist, oder die beiden Umdrehungssinne entgegengesetzt sind; liegt eine Gerade innerhalb des Winkels COE, dann liegt sie außerhalb des Winkels EOC. Die Mittellinie des Winkels COE, die in das Innere dieses Winkels fällt, heißt die *Winkelhalbierende* von $\sphericalangle COE$. Wir verstehen unter einer Drehung um den Winkel COE das Produkt der Spiegelungen an x und an der Winkelhalbierende von $\sphericalangle COE$ in dieser Reihenfolge.

Auf Grund des vorher gesagten können wir leicht bestetigen, daß durch Drehung um den Winkel COE — falls O der feste Drehpunkt ist — aus dem beliebigen Punkte (x, y) der Punkt (x', y') entsteht, wobei

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,y, \\ y' &= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,y \end{aligned} \tag{1}$$

zu setzen ist.

§ 3. Transformation der Escherichschen Koordinaten

Wir denken in der Ebene zwei verschiedene Koordinatensysteme eingeführt. Es seien x, y und x', y' die Achsen, ferner O und O' die Ursprünge der beiden Koordinatensysteme, die wir ursprüngliches bzw. neues System nennen wollen. Wir sehen zu, wie sich die Koordinaten x', y' eines beliebigen Punktes P in dem neuen System durch die Koordinaten x, y desselben Punktes in dem ursprünglichen System ausdrücken lassen.

[5]) Somit ist der Koordinatenkörper infolge der vorausgesetzten Kongruenztatsachen ein Pythagoreischer Körper.

Jede Drehung der Ebene um einen Punkt A ist eine Verschiebung entlang der absoluten Polare von A, und umgekehrt. Somit sind auf Grund der Formeln (1) in § 2, die Transformationsformeln, falls die neue Abszissenachse mit der ursprünglichen zusammenfällt und die Koordinaten des neuen Ursprungs in dem ursprünglichen System $(a, 0)$ sind, die folgenden:

$$x' = \frac{x-a}{ax+1}, \quad y' = \frac{\sqrt{a^2+1}}{ax+1} y.$$

Fällt die neue Ordinatenachse mit der ursprünglichen zusammen und sind $(0, b)$ die Koordinaten des neuen Ursprungs in dem ursprünglichen System, so ist

$$x' = \frac{\sqrt{b^2+1}}{by+1} x, \qquad y' = \frac{y-b}{by+1}.$$

Fällt der Ursprung des neuen Systems mit demselben des alten zusammen und sind (m, n) die Linienkoordinaten der neuen Abszissenachse in dem ursprünglichen, so ist

$$x' = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} x - \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} y,$$

$$y' = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} x + \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} y.$$

Die Transformation, welche das alte Koordinatensystem in das neue überführt, läßt sich immer aus dem obigen drei Transformationen zusammensetzen. Hiraus folgt, daß die Transformationsgleichungen, welche die Beziehung ausdrücken, die zwischen den Koordinaten desselben beliebigen Punktes in dem ursprünglichen und in dem neuen System bestehen, die folgenden sind:

$$x' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_0 x + b_0 y + c_0}, \quad y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_0 x + b_0 y + c_0}, \tag{1}$$

wo die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, da diese Transformation ein-eindeutig ist.

Durch leichte Rechnung können wir bestetigen, daß zwischen den Koeffizienten dieser Transformation folgende Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= \sigma^2, \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= \sigma^2, \\ a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 &= \sigma^2, \end{aligned} \tag{2}$$

wo σ^2 der gemeinsame Betrag dieser dreigliedrigen Summen ist, ferner

$$
\begin{aligned}
&a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 = 0,\\
(3) \qquad &a_1a_0+b_1b_0+c_1c_0 = 0,\\
&a_2a_0+b_2b_0+c_2c_0 = 0.
\end{aligned}
$$

Die Gleichung der Geraden $ux+vy+1=0$ geht durch die Transformation (1) in $u'x'+v'y'+1=0$ über, wobei u' und v' die Linienkoordinaten der Geraden (u, v) in dem neuen System sind; und zwar, wie die ausführliche Rechnung zeigt

$$
(4) \qquad u' = \frac{a_1u+b_1v+c_1}{a_0u+b_0v+c_0}, \qquad v' = \frac{a_2u+b_2v+c_2}{a_0u+b_0v+c_0}
$$

ist. Somit werden die Linienkoordinaten durch dieselben linearen Gleichungen transformiert, wie die Punktkoordinaten.

Für jede Transformation (1), deren Koeffizienten die Gleichungen (2) und (3) erfüllen, und die Determinante der Transformation nicht Null ist, falls den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) in dem neuen System die Punkte (x_1', y_1') und (x_2', y_2') und den Geraden (u_1, v_1) und (u_2, v_2) die Geraden (u_1', v_1') und (u_2', v_2') entsprechen, bestehen folgende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sigma^2(x_1x_2+y_1y_2+1)}{(a_0x_1+b_0y_1+c_0)(a_0x_2+b_0y_2+c_0)} = x_1'x_2'+y_1'y_2'+1,\\
(5) \qquad &\\
&\frac{\sigma^2(u_1u_2+v_1v_2+1)}{(a_0u_1+b_0v_1+c_0)(a_0u_2+b_0v_2+c_0)} = u_1'u_2'+v_1'v_2'+1.
\end{aligned}
$$

Aus der zweiten dieser Formeln folgt sofort, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Geraden (u_1, v_1) und (u_2, v_2) zueinander senkrecht sind, das Bestehen der Gleichung

$$u_1u_2+v_1v_2+1 = 0$$

ist. In der Tat: die Geraden (u_1, v_1) und (u_2, v_2) sind dann und nur dann zueinander senkrecht, wenn diejenigen Geraden bei einer beliebigen kongruenten Abbildung, die den Ursprung des Koordinatensystems in den gemeinsamen Punkt dieser Geraden überführt, zweier zueinander senkrechten Geraden entsprechen; der Ausdruck auf der linken Seiten dieser Gleichung wird aber nach § 2 für die Linienkoordinaten zweier Geraden durch den Ursprung dann und nur dann gleich Null, wenn dieselben zueinander sekrecht sind.

Hieraus folgt, daß die Orthogonalität zweier Geraden bei jeder Transformation (4), deren Determinante nicht Null ist, und deren Koeffizienten die Gleichungen (2) und (3) erfüllen, erhalten bleibt. Jede solche Transformation überführt also ein absolutes Polardreieck in ein ebensolches Dreieck und die Mittellinien der Winkeln desselben in die Mittellinie der Winkeln des entsprechenden Dreiecks. Daraus ergibt sich, daß *irgend eine lineare Transformation dann und nur dann eine Escherichsche ist, wenn die Koeffizienten derselben die Gleichungen* (2) *und* (3) *erfüllen.*

§ 4. Die Grundformeln der Trigonometrie

Seien (x_1, y_1) und (x_2, y_2) die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2, sowie (u_1, v_1) und (u_2, v_2) die der Geraden g_1 und g_2. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\cos(P_1P_2) = \frac{x_1x_2+y_1y_2+1}{\operatorname{sgn}(x_1x_2+y_1y_2+1)\sqrt{(x_1^2+y_1^2+1)(x_2^2+y_2^2+1)}}, \tag{1}$$

$$\sin(P_1P_2) = \sqrt{\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}{(x_1^2+y_1^2+1)(x_2^2+y_2^2+1)}}, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}(P_1P_2) = \frac{\operatorname{sgn}(x_1x_2+y_1y_2+1)\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}}{x_1x_2+y_1y_2+1}; \tag{3}$$

$$\cos(g_1g_2) = \frac{u_1u_2+v_1v_2+1}{\operatorname{sgn}(u_1u_2+v_1v_2+1)\sqrt{(u_1^2+v_1^2+1)(u_2^2+v_2^2+1)}}, \tag{4}$$

$$\sin(g_1g_2) = \sqrt{\frac{(u_1-u_2)^2+(v_1-v_2)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2}{(u_1^2+v_1^2+1)(u_2^2+v_2^2+1)}}, \tag{5}$$

$$\operatorname{tg}(g_1g_2) = \frac{\operatorname{sgn}(u_1u_2+v_1v_2+1)\sqrt{(u_1-u_2)^2+(v_1-v_2)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2}}{u_1u_2+v_1v_2+1}. \tag{6}$$

Wenn in den Gleichungen (5) von § 3 $x_1=x_2=x$, $y_1=y_2=y$; $u_1=u_2=u$, $v_1=v_2=v$ gesetzt wird, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{\sigma^2(x^2+y^2+1)}{(a_0x+b_0y+c_0)^2} = x'^2+y'^2+1$$

und

$$\frac{\sigma^2(u^2+v^2+1)}{(a_0u+b_0v+c_0)^2} = u'^2+v'^2+1.$$

Hieraus und aus den Gleichungen (5) in § 3 folgt, daß die Ausdrücke auf den rechten Seiten der Gleichungen (1)—(6) bezüglich Escherichschen Transformationen absolut invariant sind. Zwischen diesen Ausdrücken bestehen ferner folgende Gleichungen:

$$\frac{\sin(P_1P_2)}{\cos(P_1P_2)} = \operatorname{tg}(P_1P_2), \tag{7}$$

$$\sin^2(P_1P_2)+\cos^2(P_1P_2) = 1; \tag{8}$$

$$\frac{\sin(g_1g_2)}{\cos(g_1g_2)} = \operatorname{tg}(g_1g_2), \tag{9}$$

$$\sin^2(g_1g_2)+\cos^2(g_1g_2) = 1. \tag{10}$$

Zwei Strecken, welche die beiden Endpunkte gemein haben, und eine gerade Linie bilden, heißen *Nebenstrecken*. Es seien P_1 und P_2 zwei Punkte; wir bezeichnen eine der beiden durch diejenigen Punkten bestimmten Strecken mit $\overline{P_1P_2}$ und setzen:

$$\cos(\overline{P_1P_2}) = \pm\cos(P_1P_2),$$
$$\sin(\overline{P_1P_2}) = \sin(P_1P_2),$$
$$\operatorname{tg}(\overline{P_1P_2}) = \pm\operatorname{tg}(P_1P_2),$$

wobei die oberen oder unteren Vorzeichen gelten, je nachdem $\overline{P_1P_2}$ kleiner oder größer ist als ihre Nebenstrecke; sind P_1 und P_2 konjugierte Punkte, d. h. ist $\overline{P_1P_2}$ ihrer Nebenstrecke gleich, so soll $\cos(\overline{P_1P_2}) = \cos(P_1P_2) = 0$ und $\operatorname{tg}(\overline{P_1P_2}) = \operatorname{tg}(P_1P_2) = \infty$ sein. Es sei ferner $\sphericalangle(P_1P_0P_2)$ ein beliebiger Winkel; wir setzen:

$$\cos(P_1P_0P_2) = \pm\cos(P_0P_1, P_0P_2),$$
$$\sin(P_1P_0P_2) = \sin(P_0P_1, P_0P_2),$$
$$\operatorname{tg}(P_1P_0P_2) = \pm\operatorname{tg}(P_0P_1, P_0P_2),$$

wo die oberen oder unteren Vorzeichen gelten, je nachdem $\sphericalangle P_1P_0P_2$ kleiner oder größer als sein Nebenwinkel ist; ist $\sphericalangle P_1P_0P_2$ ein rechter Winkel, d. h. seinem Nebenwinkel gleich, so soll $\cos(P_1P_0P_2) = \cos(P_0P_1, P_0P_2) = 0$ und $\operatorname{tg}(P_1P_0P_2) = \operatorname{tg}(P_0P_1, P_0P_2) = \infty$ sein.

Unter diesen Festsetzungen sind wir nunmehr im stande die Grundformeln der Trigonometrie abzuleiten. Zu dem Zwecke sei $P=(x, y)$ ein beliebiger Punkt außerhalb der x-Achse, dessen Ordinate nicht negativ ist. Wir bezeichnen den Punkt $(1, 0)$ mit E, ferner die Strecke, deren Endpunkte O und P sind, und die nicht größer als ihre Nebenstrecke ist, und auf derselben Seite der x-Achse wie die positive Halbgerade der y-Achse liegt[6]), mit OP und den von dem positiven Halbstrahle der x-Achse und der Strecke OP eingeschlossenen Winkel mit $\sphericalangle POE$; dann ist nach den Formeln (4), (5) und (3)

$$\cos(POE) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin(POE) = \frac{y}{x^2+y^2}, \tag{11}$$
$$\operatorname{tg}(OP) = x^2+y^2.$$

Wir setzen im folgenden voraus, daß auch die Abszisse von P nicht negativ ist und bezeichnen den Fußpunkt des von dem Punkte P auf die x-Achse gefällten Lotes mit P'; es ist dann $P' = (x, 0)$ und somit ist nach der Formel (2)

$$\sin(PP') = \frac{y}{x^2+y^2+1}, \quad \sin(OP) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}.$$

Hieraus ergibt sich nach der zweiten der Formeln (11) die Gleichung:

$$\sin(PP') = \sin(OP)\cdot\sin(POP'). \tag{I}$$

[6]) Die x-Achse und die Polare vom Punkte O teilen die Ebene in zwei Winkelfelder; wir sagen: zwei Strecken, die außerhalb der x-Achse liegen, nicht größer als eine Halbgerade sind und den Punkte O als Endpunkt gemein haben, liegen *auf ein und derselben Seite der x-Achse* oder *auf verschiedenen Seiten* derselben, je nachdem diejenigen Strecken zu ein und demselben Winkelfeld oder zu verschiedenen Winkelfeldern gehören.

Drei Punkte, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, bestimmen vier Dreiecke; in wenigstens einem von denselben sind die Seiten nicht größer als eine Halbgerade. Irgend zwei von diesen Dreiecken heißen *Nebendreiecke.* In zwei Nebendreiecken ist eine Seite gemeinsam, und je zwei entsprechende Seiten sind Nebenstrecken; in den beiden Nebendreiecken sind die entsprechenden Winkel an der gemeinsamen Seite stets Nebenwinkel und die derselben Seite gegenüberliegenden Scheitelwinkel. Da ferner die Sinus von zwei Nebenwinkeln sowie zweier Nebenstrecken eienander gleich sind, so gilt die Gleichung (I) für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse OP, der Kathete PP' und dem dieser gegenüberliegenden Winkel POP'.

Es seien nun $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ drei Punkte, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen. Die Punkte P_0, P_1, P_2 bestimmen zu zweien, je zwei Strecken; wir bezeichnen je eine dieser beiden Strecken, die nicht größer sind als ihre Nebenstrecken, bzw. mit P_0P_1, P_0P_2, P_1P_2 und den von den Strecken P_0P_1 und P_0P_2 eingeschlossenen Winkel mit $\sphericalangle P_1P_0P_2$. Wir wählen das Koordinatensystem so, daß O mit dem Punkte P_0 zusammenfällt, die Seite P_0P_1 auf dem positiven Halbstrahl der x-Achse und P_0P_2 auf derselben Seite der x-Achse wie der positive Halbstrahl der y-Achse liegt; es ist dann $x_0 = y_0 = y_1 = 0$ und somit nach der Formel (3)

$$x_1 = \operatorname{tg}(P_0P_1),$$

ferner aus den Gleichungen (11)

$$x_2 = \operatorname{tg}(P_0P_2)\cos(P_1P_0P_2),$$
$$y_2 = \operatorname{tg}(P_0P_2)\sin(P_1P_0P_2).$$

Hieraus ergibt sich nach der Formel (1) mit Rücksicht auf die Gleichung (7) und (8) der erste Kosinussatz:

$$\text{(II)} \quad \cos(P_1P_2) = \cos(P_0P_1)\cdot\cos(P_0P_2) + \sin(P_0P_1)\cdot\sin(P_0P_2)\cdot\cos(P_1P_0P_2).$$

In dieser Gleichung können wir nach unseren Voraussetzungen die Seiten und die Winkel des betrachteten Dreieicks zyklisch vertauschen. Da ferner in den beiden Nebendreiecken, die die Seite P_1P_2 gemein haben, die Winkel bei P_0 Scheitelwinkel sind und die Seiten von denen diese Winkel eingeschlossen werden zu je zweien eine gerade Linie bilden und, da überdies die Sinus zweier Nebenstrecke einander gleich und ihre Kosinus entgegengesetzt gleich sind, so gilt die Gleichung (II) für ein beliebiges Dreieck mit den Seiten P_0P_1, P_0P_2, P_1P_2 und dem dieser letzteren gegenüberliegenden Winkeln $P_1P_0P_2$.

Aus diesen beiden Grundformeln (I) und (II) folgt nun das ganze Formelsystem der Trigonometrie, und somit haben wir unsere Aufgabe erledigt.

(Eingegangen am 10. Februar 1962.)