Eine Bemerkung über die linear abhängigen Funktionen

Von STEFAN FENYŐ (Budapest)

Bezeichnen wir mit C die Menge aller auf der Halbgeraden $0 \leqq t < \infty$ erklärten, komplexwertigen und stetigen Funktionen. Das Addieren von zwei Elementen aus C, sowie das Multiplizieren einer Funktion aus C mit einer Konstante sei wie üblich definiert; die Faltung von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ — bezeichnet durch $f * g$ — ist die folgende Funktion

$$f * g = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau.$$

Es ist bekannt, daß die Faltung eine kommutative Operation ist, und, daß C mit der üblichen Addition und Faltungsbildung ein nullteilerfreier Ring ist. C kann also zu einem Quotientenkörper erweitert werden den wir mit M bezeichnen wollen (der Mikusinskische Operatorkörper). Die Elemente aus M seien durch f/g $(f, g \in C)$ bezeichnet, man nennt sie Operatoren. Das Einheitselement dieses Körpers M ist der sog. Diracsche Operator: $\delta = f/f$ (f beliebig aus C).

J. MIKUSINSKI hat in seinem bekannten Buche über Operatorenrechnung [1] den Begriff der „algebraischen Ableitung" in C folgendermaßen eingeführt:

$$Df = -tf(t).$$

Die algebraische Ableitung besitzt folgende Eigenschaften:

$$D(f * g) = Df * g + f * Dg,$$

$D(\alpha f) = \alpha Df$ (α Konstant), sowie

$$D(f/g) = (Df * g - f * Dg)/g^2,$$

wobei $g^2 = g * g$ ist. Damit haben wir zugleich die Definitions von Din M. Es sei noch bemerkt, daß

$$D\delta = 0$$

ist.

Vor kurzem hat J. MIKUSINSKI [2, S. 188.] die Umgehrung dieser letzteren Behauptung bewiesen: ist $x \in M$ ein solches Element, für welches

$$Dx = 0$$

gültig ist, dann folgt $x = \alpha\delta$, wobei α eine beliebige Konstante ist. (Es ist auf Grund der Definition der algebraischen Ableitung klar, daß aus der Gültigkeit der Relation $Dy = 0$ für ein Element y aus C das Bestehen von $y \equiv 0$ folgt).

Der Satz von MIKUSINSKI ist mit der Aussage äquivalent, wonach für die lineare Unabhängigkeit von f und g aus C das identische Verschwinden der „Wronskischen Determinante"

$$f * Dg - g * Df \tag{1}$$

notwendig und hinreichend ist. Denn sind f und g linear abhängig, so ist

$$g/f = \alpha\delta$$

(wobei α eine Konstante ist) und deswegen ist

$$(f * Dg - g * Df)/f^2 = D(g/f) = D\alpha\delta = \alpha D\delta = 0,$$

woraus das Verschwinden der „Wronskischen Determinante" (1) folgt. Umgekehrt, falls (1) identisch verschwindet, dann ist (angenommen, daß $f \not\equiv 0$ ist)

$$D(g/f) = 0$$

woraus gemäß des Mikusinskischen Satzes

$$g/f = \alpha\delta$$

folgt, d. h. f und g sind linear abhängig.

Die Festestllung von J. MIKUSINSKI ist auch in einer verallgemeinteren Form richtig: *notwendig und hinreichend dafür, daß die Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ aus C abhängig seien, ist das identische Verschwinden der „Wronskischen Determinante"*

$$W_*(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ Df_1 & Df_2 & \cdots & Df_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D^{n-1}f_1 & D^{n-1}f_2, & \cdots & D^{n-2}f_n \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Die Determinante W_* wird im Ring C gebildet, d. h. die im Laufe der Berechnung von W_* auftretenden Multiplikationen müssen durch die Faltung ersetzt werden. D bedeutet natürlich die Operation der algebraischen Ableitung.

Wenn wir den Ring C zu dem Mikusinskischen Operatorenkörper M erweitern, dann kann er als ein Differentialfeld mit der algebraischen Ableitung betrachtet werden. Er enthält eine Teilmenge, welcher in Bezug der Addition und Multiplikation isomorph mit der Menge der reellen Zahlen ist. Die Elemente dieser Teilmenge haben die Gestalt $\lambda\delta$, wobei λ eine beliebige reelle Zahl ist. Gemäß eines allgemeinen Satzes [3. S. 34] über Differentialfelder gilt unsere Behauptung.*)

Unser Ziel ist einen elementaren und kurzen Beweis für die oben formulierte *notwendige* Bedingung der Abhängigkeit von n Funktionen ohne Anwendung der tiefgehenden Theorie der Differentialfelder zu geben.

Es ist allgemein bekannt s. z. B. [4. S. 121], daß notwendig und hinreichend für die lineare Abhängigkeit der Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ das Bestehen folgender

*) Diese Bemerkung verdanke ich Herrn E. GESZTELYI, der meine Aufmerksamkeit auf das Buch von J. F. RITT geleitet hat.

Identität ist:

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) f_2(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) f_2(x_2) & \dots & f_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_n) f_2(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix} = 0$$

wobei $x_1, x_2, \dots, x_n$ beliebige unabhängige Veränderliche sind ($0 \leqq x_i < \infty$). Daraus folgt

$$0 = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-2}} (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)^2 \dots (t_{n-2} - t_{n-1})^{n-2} t_{n-1}^{n-1} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} f_1(t-t_1) & f_2(t-t_1) & \dots & f_n(t-t_1) \\ f_1(t_1-t_2) & f_2(t_1-t_2) & \dots & f_n(t_1-t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(t_{n-2}-t_{n-1}) & f_2(t_{n-2}-t_{n-1}) & \dots & f_n(t_{n-2}-t_{n-1}) \\ f_1(t_{n-1}) & f_2(t_{n-2}) & \dots & f_n(t_{n-1}) \end{vmatrix} dt, dt_2 \dots dt_{n-1} =$$

$$= (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-2}} (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)^2 \dots (t_{n-2} - t_{n-1})^{n-2} t_{n-1}^{n-1} \times$$

$$\times \sum (-1)^k f_{k_1}(t-t_1) f_{k_2}(t_1-t_2) \dots (f_{k_{n-1}})(t_{n-2}-t_{n-1}) f_{k_n}(t_{n-1}) dt_1 \, dt_2 \dots dt_{n-1} =$$

$$= (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum (-1)^k f_{k_1} * (t f_{k_2}) * \dots * (t^{n-1} f_{k_n}) =$$

$$= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ -tf_1 & -tf_2 & \dots & -tf_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n-2} t^{n-1} f_1 & (-1)^{n-1} t^{n-1} f_1 & \dots & (-1)^{n-1} t^{n-1} f_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ Df_1 & Df_2 & \dots & Df_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D^{n-1} f_1 & D^{n-1} f_2 & \dots & D^{n-2} f_n \end{vmatrix} =$$

$$= W_*(f_1, f_2, \dots, f_n).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Literatur

[1] J. Mikusiński, Operational calculus, *New York—London—Paris—Los Angeles—Warszawa*, 1959.

[2] J. Mikusiński, Remarks on the algebraic derivative in the Operator Calculus, *Studia Math.* **19** (1960), 187—192.

[3] J. F. Ritt, Differential Algebra, (Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. XXXIII) *New York*, 1950.

[4] H. Kiesewetter, Struktur linearer Funktionalgleichungen in Zusammenhang mit dem Abelschen Theorem, *J. Reine Angew. Math.* **206** (1961), 113—171.

(Eingegangen am 10. Februar 1962.; in veränderter Form am 20. April 1962.)