Über die Kongruenzverbände der Verbände

Von E. T. SCHMIDT (Budapest)

Es bezeichne V einen Verband. Es ist bekannt, dass alle Kongruenzrelationen von V einen Verband, den Kongruenzverband $\Theta(V)$ von V bilden. Die Bestimmung derjenigen Verbände, die mit einem Kongruenzverband eines Verbandes isomorph sind, ist eine schwierige Aufgabe, und bisher waren nur zwei Sätze bekannt, die hinreichende Bedingungen dafür angaben, daß ein Verband mit einem Kongruenzverband eines Verbandes isomorph sei. Der erste Satz stammt von R. P. DILWORTH (siehe BIRKHOFF [1]) und sagt aus, dass jeder endliche distributive Verband mit einem Kongruenzverband eines endlichen Verbandes isomorph ist. Der zweite Satz stellt die Verbände 2^P — wo P eine teilweise geordnete Menge ist — als Kongruenzverbände dar.

In dieser Arbeit werden wir eine hinreichende Bedingung dafür angeben, daß ein Verband mit dem Kongruenzverband eines Verbandes isomorph sei; wir erhalten so eine weitgehende Verallgemeinerung der oben angeführten Resultate.

Die Ergebnisse enthält § 1, in §§ 2—5 geben wir der Beweis.

§ 1. Ergebnisse

Zuerst wollen wir untersuchen, welche Eigenschaften die Kongruenzverbände der Verbände besitzen.

G. BIRKHOFF und O. FRINK waren die ersten, die die Kongruenzverbände der algebraischen Strukturen untersuchten. In ihrer Arbeit [2] haben sie bewiesen, daß die Kongruenzverbände die folgenden zwei Eigenschaften besitzen:

1. sie sind vollständig;

2. jedes Element ist Vereinigung (endlich oder unendlich vieler) kompakter Elemente, wobei ein Element x des vollständigen Verbandes kompakt heißt, wenn aus $x \leqq \bigvee (x_\lambda;\, \lambda \in \Lambda)$ für eine endliche Teilmenge Λ' von Λ $x \leqq \bigvee (x_\lambda;\, \lambda \in \Lambda')$ folgt.

Die diese zwei Eigenschaften besitzenden Verbände wollen wir *kompakt erzeugte Verbände* nennen.

N. FUNAYAMA und T. NAKAYAMA [3] haben bewiesen, daß die Kongruenzverbände der Verbände distributiv sind; und so erhalten wir mit den BIRKHOFF—FRINKschen Resultaten:

Der Kongruenzverband eines Verbandes ist ein kompakt erzeugter distributiver Verband.

Es läßt sich leicht zeigen, daß in einem kompakt erzeugten, distributiven Verband das sog. unendliche distributive Gesetz

$$a \cap \bigvee_{\in A} b_\alpha = \bigvee_{\alpha \in A} (a \cap b_\alpha)$$

gilt. Das duale unendliche distributive Gesetz

$$(*) \qquad a \cup \bigwedge_{\alpha \in A} b_\alpha = \bigwedge_{\alpha \in A} (a \cup b_\alpha)$$

gilt aber im allgemeinen nicht. Unser Hauptergebnis ist der folgende Satz:

Satz. *Jeder kompakt erzeugte, distributive Verband, in welchem* $(*)$ *gilt, sobald* a *ein kompaktes Element ist, ist isomorph mit einem Kongruenzverband eines Verbandes.*

Korollar 1. (R. P. DILWORTH). *Jeder endliche distributive Verband ist mit einem Kongruenzverband eines endlichen Verbandes isomorph.*

Korollar 2. (GRÄTZER—SCHMIDT [4]). *Es sei* P *eine teilweise geordnete Menge. Dann existiert ein Verband* V *so, daß* $\Theta(V) \cong 2^P$.

§ 2. Kompakt erzeugte distributive Verbände

Zum Beweis des Satzes benötigen wir einige Hilfssätze und Begriffe.

DEFINITION 1. Eine Menge H mit einer zweistelligen, idempotenten, kommutativen und assoziativen Operation, die mit $\cup$ oder $\cap$ bezeichnet wird, heißt in bezug auf diese Operation ein Halbverband. (Die Operation $\cup$ nennen wir Vereinigung und die Operation $\cap$ Durchschnitt). Durch die „$a \leqq b$ $(a, b \in H)$ dann und nur dann, wenn $a \cup b = b$" erklärte Relation wird der Halbverband eine teilweise geordnete Menge. Eine nichtleere Teilmenge I eines Halbverbandes H heißt ein Ideal, wenn aus a und $b \in I$, stets $a \cup b \in I$, und aus $a \in I$ und $b \in H$, $b \leqq a$ stets $b \in I$ folgt. Wenn H ein 0 Element besitzt, so bildet die Gesamtheit der Ideale einen Verband $I(H)$, den Idealverband von H.

Lemma 1. *Der Verband* V *ist dann und nur dann kompakt erzeugt, wenn ein* 0 *Element besitzender Halbverband* H *existiert, so daß der Idealverband von* H *mit* V *isomorph ist.*

Der Beweis ist in [2] und [5] zu finden. Wir bemerken, daß der Halbverband H aus allen kompakten Elementen von V besteht, wo die $\cup$-Operation in H mit der Vereinigungsoperation von V gleich ist.

DEFINITION 2. Der Halbverband H ist distributiv, wenn aus $a, b, c \in H$ und $c \leqq a \cup b$ folgt, daß in H solche $a' \leqq a$, $b' \leqq b$ Elemente existieren, daß $a' \cup b' = c$.

Lemma 2. *Der Halbverband* H *ist dann und nur dann distributiv, wenn* $I(H)$ *ein distributiver Verband ist.*

Zum Beweis siehe [6].

Nach Lemma 1 und Lemma 2 sind die kompakt erzeugten distributiven Verbände in der Form $I(H)$ darstellbar — wo H ein distributiver Halbverband mit 0 Element ist.

Definition 3. Der Halbverband H heißt dual-relativpseudokomplementär, wenn zu jedes $a, b \in H$, $a \leqq b$ ein Element $c \in H$ existiert, so daß in H $a \cup x \geqq b$ dann und nur dann, wenn $x \geqq c$. Das Element c heißt das dual-relativpseudokomplement von a bezüglich b, und wird mit $a * b$ bezeichnet.

Lemma 3. *In dem kompakt erzeugten distributiven Verband $I(H)$ ist $(*)$ — wo a ein kompaktes Element ist — dann und nur dann erfüllt, wenn H dual-relativpseudokomplementär ist.*

Beweis. Es sei in $I(H)$ $(*)$ erfüllt, sooft nur a kompakt ist, und es sei $a, b \in H$, $a \leqq b$. Betrachten wir alle diejenigen Elemente $a_\alpha \in I(H)$, für die $a_\alpha \cup a \geqq b$. Es sei $c = \bigwedge_{\alpha \in A} a_\alpha$. Nach Lemma 2. ist H distributiv und so gilt $x \cup a \geqq b$ dann und nur dann, wenn $x \geqq c$ ist. Wir behaupten, daß c kompakt ist, also $c \in H$. Wenn $c \leqq \bigvee_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ so ist $b \leqq \bigvee_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma \cup a$, d. h. da $b \in H$, so besteht $b \leqq \bigvee_{\gamma \in \Gamma'} x_\gamma \cup a$, wo Γ' eine endliche Teilmenge von Γ ist. So gewinnen wir, daß $b = \bigvee_{\gamma \in \Gamma'} x_\gamma \cup a$, d. h. $\bigvee_{\gamma \in \Gamma'} x_\gamma \geqq c$. Damit haben wir bewiesen, daß c kompakt ist, und $c = a * b$, also ist H dual-relativpseudokomplementär.

Es sei H ein dual-relativpseudokomplementärer, distributiver Halbverband mit 0 Element. Wir müssen nachweisen, daß in $I(H)$ $(*)$ erfüllt, wo a kompakt ist. Die Elemente aus H werden mit kleinen lateinischen Buchstaben, die Ideale mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Wir müssen zeigen, daß $\bigwedge_{\alpha \in A} B_\alpha \cup (a] = \bigwedge_{\alpha \in A} (B_\alpha \cup (a])$ gilt ($(a]$ bezeichnet das von a erzeugte Ideal).

Es ist klar, daß $\bigwedge_{\alpha \in A} B_\alpha \cup (a] \subseteqq \bigwedge_{\alpha \in A} (B_\alpha \cup (a])$, und so bleibt nur zu zeigen, daß $\bigwedge_{\alpha \in A} B_\alpha \cup (a] \supseteqq \bigwedge_{\alpha \in A} (B_\alpha \cup (a])$. Wenn $x \in \bigwedge_{\alpha \in A} (B_\alpha \cup (a])$, so $x \in B_\alpha \cup (a]$ für alle $\alpha \in A$. Man kann anehmen, daß $x \geqq a$ und so folgt aus $x \in B_\alpha \cup (a]$ auch $x = a \cup b_\alpha$ für ein $b_\alpha \in B_\alpha$. (Es besteht nämlich die Vereinigung zweier Ideale I und J eines distributiven Halbverbandes aus den Elementen $x \cup y$, wo $x \in I$ und $y \in J$). Weil H dual-relativpseudokomplementär ist, so besteht für $c = a * x$ auch $c \leqq b_\alpha$, d. h. $c \in B_\alpha$ für alle $\alpha \in A$, und so $c \in \bigwedge_{\alpha \in A} B_\alpha$. Hieraus ergibt sich wegen $x = a \cup c$, daß $x \in \bigwedge_{\alpha \in A} B_\alpha \cup (a]$, was wir zeigen wollten.

In den folgenden drei Hilfssätzen beschäftigen wir uns mit dual-relativpseudokomplementären distributiven Halbverbänden.

Lemma 4. *Es sei H ein dual-relativpseudokomplementärer, distributiver Halbverband mit 0 und 1 Elementen. Dann bilden diejenigen Elemente aus H, die sich in der Form $a * 1$ schreiben lassen — bezüglich derselben Ordnungsrelation, die in H gilt — einen Booleschen Verband B. B ist bezüglich der Vereinigung ein Teilhalbverband von H.*

Beweis: siehe in [1], Kap. IX, § 12.

Im folgenden benötigen wir einen Begriff:

DEFINITION 4. Wir nennen den in Lemma 4 gewonnenen Booleschen Verband den Zerlegungsbooleschen Verband[1]) von H.

Es bezeichne ferner H einen dual-relativpseudokomplementären, distributiven Halbverband, mit 0 Element. So ist für beliebiges $a \in H$ das Hauptideal $(a]$ ein 0 und 1 besitzender, dual-relativpseudokomplementärer Halbverband, d. h. nach Lemma 4 existiert der Zerlegungsboolesche Verband des Halbverbandes $(a]$, welcher mit $B(a)$ bezeichnet wird.

Lemma 5. *Es sei H ein dual-relativpseudokomplementärer, distributiver Halbverband mit 0 Element, und a ein beliebiges Element aus H. Dann kann man zu jedes $x \in H$ ein größtes $x(a) \in B(a)$ finden, so daß $x \geqq x(a)$.*

BEWEIS. Wir behaupten, daß das Element $x(a) = (x * (a \cup x)) * a$ dem Hilfssatz entspricht.

Bezeichne y das Element $x * (a \cup x)$, so ist $x(a) = y * a$. In dem Hauptideal $(a \cup x]$ ist a ein dual-Halbkomplement von x, und so gilt wegen der Definition des Dual-relativpseudokomplementes $y \leqq a$. Daraus folgt, daß $x(a) = y * a \in B(a)$.

Wir wollen einsehen, daß $x(a) \leqq x$. Das Hauptideal $(a \cup x]$ ist ein distributiver Halbverband und $a \cup x = y \cup x \geqq a$, also existieren Elemente $y' \leqq y$ und $x' \leqq x$ so, daß $y' \cup x' = a$. Wegen $a \geqq y$ können wir annehmen, daß $y' = y$, d. h. $y \cup x' = a$. Wir haben erhalten, daß in dem Ideal $(a]$ x' ein dual-Halbkomplement von y ist, und so $y * a \leqq x' \leqq x$, d. h. $x(a) \leqq x$.

Man muß beweisen, daß $x(a)$ maximal ist in $B(a)$, so daß $x \geqq x(a)$. Wenn für ein $z \in B(a)$ $x \geqq z \geqq x(a)$ gilt, so ist $z * a \leqq x(a) * a \leqq y$, und daraus folgt $x \cup (z * a) = (x \cup z) \cup (z * a) = x \cup (z \cup (z * a)) = x \cup a$, d. h. $z * a \geqq y$ und so $z * a = x(a) * a = y$, folglich auch $z = x(a)$. D. h. $x(a)$ ist in $B(a)$ mit der Eigenschaft $x \geqq x(a)$ maximal. Q. e. d.

Betrachten wir nun in H die Booleschen Verbände $B(a)$ und $B(b)$ $(a, b \in H)$. Wir wissen, daß diese in H Teilhalbverbände bilden. Wir werden im folgenden einen distributiven Verband $B(a, b)$ definieren, welcher von $B(a)$ und $B(b)$ erzeugt wird. Bezeichne $\cup$ die Operation in H, und $\wedge_a$ bzw. $\wedge_b$ die Durchschnittsoperation in $B(a)$ bzw. $B(b)$.

Die Elemente von $B(a, b)$ sind diejenigen Elemente von H, welche sich in Form $x \cup y$ schreiben lassen, wo $x \in B(a)$ und $y \in B(b)$.

Die Ordnungsrelation stimmt mit der Ordnungsrelation in H überein.

Lemma 6. *$B(a, b)$ ist auf Grund der gegebenen Ordnungsrelation ein distributiver Verband. Die Vereinigungsoperation ist gleich der Operation in H, $B(a)$ und $B(b)$ sind bezüglich der $\cup$ — Operation Teilhalbverbände. Der Durchschnitt in $B(a, b)$ ist definiert durch*

$$\begin{aligned}(x \cup y) \cap (x' \cup y') = {} & (x \wedge_a x') \cup (x \wedge_a y'(a)) \cup (x' \wedge_a y(a)) \cup \\ & \cup (y(a) \wedge_a y'(a)) \cup (x(b) \wedge_b x'(b)) \cup (x(b) \wedge_b y') \cup \\ & \cup (x'(b) \wedge_b y) \cup (y \wedge_b y') \qquad (x, x' \in B(a),\ y, y' \in B(b)).\end{aligned}$$

[1]) Der Zerlegungsboolsche Verband wird in einem vom GRÄTZER und vom Verf. später erschienenen Arbeit studiert. Die Untersuchung dieser Verbände hat eben die Untersuchung der Kongruenzverbände aufgeworfen.

BEWEIS. Zuerst werden wir zeigen, daß $B(a, b)$ auf der $\cup$-Operation ein distributiver Halbverband ist, d. h. wenn $z \leqq z_1 \cup z_2$ $(z, z_1, z_2 \in B(a, b))$ so $z = z_1' \cup z_2'$, wo $z_1' \leqq z_1$, $z_2' \leqq z_2$ und $z_1', z_2' \in B(a, b)$. Dazu beweisen wir zwei Identitäten:

1. *Wenn u zu $B(a, b)$ gehört, so ist* $u = u(a) \cup u(b)$, nämlich wegen der Definition von $B(a, b)$ ist $u = x \cup y$, wo $x \in B(a)$ und $y \in B(b)$, so ist $x \leqq u(a)$, $y \leqq u(b)$, d. h. $u = x \cup y \leqq u(a) \cup u(b) \leqq u$, also $u = u(a) \cup u(b)$. So können wir schreiben: $z = z(a) \cup z(b)$, $z_1 = z_1(a) \cup z_1(b)$, $z_2 = z_2(a) \cup z_2(b)$.

2. *Es gilt* $(z_1 \cup z_2)(a) = z_1(a) \cup z_2(a)$. Es ist klar, daß $(z_1 \cup z_2)(a) \leqq z_1 \cup z_2$ und so, da H distributiv ist, existieren $u_1 \leqq z_1$ und $u_2 \leqq z_2$, so daß $(z_1 \cup z_2)(a) = u_1 \cup u_2$. $t_1 = u_2 * ((z_1 \cup z_2)(a)) \in B(a)$, da $(z_1 \cup z_2)(a) \in B(a)$ und ebenso $t_2 = u_1 * ((z_1 \cup z_2)(a)) \in B(a)$. Es gilt $t_1 \cup t_2 = (z_1 \cup z_2)(a)$ und $t_1 \leqq z_1$, $t_2 \leqq z_2$, $t_1, t_2 \in B(a)$ und so trivialerweise $(z_1 \cup z_2)(a) = t_1 \cup t_2 \leqq z_1(a) \cup z_2(a)$. Es ist offensichtlich, daß $(z_1 \cup z_2)(a) \geqq z_1(a) \cup z_2(a)$, folglich $(z_1 \cup z_2)(a) = z_1(a) \cup z_2(a)$.

Es ist $z_1 \cup z_2 \geqq z$ und so auch $(z_1 \cup z_2)(a) \geqq z(a)$, d. h. $(z_1 \cup z_2)(a) = z_1(a) \cup z_2(a) \geqq z(a)$. $B(a)$ ist aber ein distributiver Verband, folglich existieren die Elemente $x_1, x_2 \in B(a)$, so daß $x_1 \leqq z_1(a) \leqq z_1$, $x_2 \leqq z_2(a) \leqq z_2$ und $x_1 \cup x_2 = z(a)$.

Ganz analog erhalten wir, daß $z(b) = y_1 \cup y_2$, wo $y_1 \leqq z_1$, $y_2 \leqq z_2$ und y_1, $y_2 \in B(b)$.

Es seien $z_1' = x_1 \cup y_1 \leqq z_1$ und $z_2' = x_2 \cup y_2 \leqq z_2$, dann gilt $z_1' \cup z_2' = (x_1 \cup y_1) \cup (x_2 \cup y_2) = (x_1 \cup x_2) \cup (y_1 \cup y_2) = z(a) \cup z(b) = z$ und damit haben wir bewiesen, daß $B(a, b)$ ein distributiver Halbverband ist.

Wir beweisen nun, daß $B(a, b)$ ein Verband ist, d. h. es existiert die größte untere Schranke zweier Elemente in $B(a, b)$. Zuerst zeigen wir, daß die größte untere Schranke für die Elemente x, $x' \in B(a)$ existiert; genauer gesagt, daß $x \cap x' = (x \wedge_a x') \cup (x(b) \wedge_b x'(b))$. Wenn $x, x' \geqq z \in B(a, b)$ und $z = x'' \cup y''$, wo $x'' \in B(a)$ und $y'' \in B(b)$, so x, $x' \geqq z \geqq x''$, d. h. $x \wedge_a x' \geqq x''$. Anderseits gilt wegen $x \geqq y''$, $x(b) \geqq y''$ und analog $x'(b) \geqq y''$, also $x(b) \wedge_b x'(b) \geqq y''$. So bekommen wir, daß $(x \wedge_a x') \cup (x(b) \wedge_b x'(b)) \geqq x'' \cup y'' = z$. Damit haben wir bewiesen, dass die größte untere Schranke von x und x' existiert und gleich $(x \wedge_a x') \cup (x(b) \wedge_b x'(b))$ ist. Ebenso bekommen wir $y \cap y' = (y \wedge_a y') \cup (y(a) \wedge_a y'(a)) (y, y' \in B(b))$.

Es sein $z_1, z_2 \in B(a, b)$. Wenn $z_1, z_2 \geqq z$, so $z_1(a), z_2(a) \geqq z(a)$ und $z_1(b), z_2(b) \geqq z(b)$. Da $z_1(a)$, $z_2(a) \in B(a)$, so existiert der Durchschnitt dieser Elemente, das Element $z_1(a) \cap z_2(a)$, und es gilt $z(a) \leqq z_1(a) \cap z_2(a) \leqq z_1, z_2$. Ebenso $z(b) \leqq z_1(b) \cap z_2(b) \leqq z_1, z_2$. Hieraus ergibt sich, daß $z = z(a) \cup z(b) \leqq \{z_1(a) \cap z_2(a)\} \cup \{z_1(b) \cap z_2(b)\} \leqq z_1, z_2$, also existiert $z_1 \cap z_2$; $z_1 \cap z_2 = \{z_1(a) \cap z_2(a)\} \cup \{z_1(b) \cap z_2(b)\}$. Wenn wir z_1 und z_2 in Form $z_1 = x \cup y$ und $z_2 = x' \cup y'$ schreiben, so bekommen wir $z_1 \cap z_2$ in der im Hilfssatz gegebenen Form. $B(a, b)$ ist also ein Verband, und bezüglich der $\cup$-Operation ein distributiver Halbverband d. h., $B(a, b)$ ist ein distributiver Verband.

§ 3. Vorbereitende Konstruktionen

DEFINITION 6. Es sei V_1 ein Verband, welcher bezüglich der $\cup$-Operation von V ein Teilhalbverband von V ist. Wir sagen, dass die Kongruenzrelation $\Theta \in \Theta(V_1)$ auf den Verband V erweitbar ist, wenn in $\Theta(V)$ eine kleinste Kongruenzrelation $\overline{\Theta}$ so existiert, daß $x \equiv y(\overline{\Theta})$, $x, y \in V_1$ dann und nur dann, wenn $x \equiv y(\Theta)$.

V ist eine natürliche Erweiterung von V_1, wenn jedes $\Theta \in \Theta(V_1)$ auf V erweitbar ist, und die Abbildung $\Theta \to \overline{\Theta}$ ein Isomorphismus zwischen $\Theta(V_1)$ und $\Theta(V)$ ist.

Lemma 7. *Zu einem beliebigen, distributiven Verband V mit 0-Element und zu jeder natürlichen Zahl $n \geqq 3$ existiert ein O Element besitzender Verband W mit den folgenden zwei Eigenschaften:*

(i) *W hat n mit V isomorphe Ideale: $V_1, V_2, \ldots, V_n$, so daß wenn $x \in V_i$, $y \in V_j$, $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, dann $x \cap y = 0$;*

(ii) *W ist eine natürliche Erweiterung jedes V_i.*

Beweis. Betrachten wir n paarweise disjunkte, mit V isomorphe Verbände: $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Es sei K das direkte Produkt dieser Verbände, also $K = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$. Es entspreche dem Element $x \in V$ im Isomorphismus $V \cong V_i$ das Element x_i; so besteht K aus den Elementen $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)})$, wo $x_i^{(i)} \in V_i$, $x^{(i)} \in V$. Wir können annehmen, daß V_i ein Teilverband von K ist, d. h. $x_i^{(i)} = (0, 0, \ldots, 0, x_i^{(i)}, 0, \ldots, 0)$.

Den gesuchten Verband W werden wir als eine Teilmenge von K herstellen. Das Element $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)}) \in K$ nennen wir *normal*, wenn für alle Indizes $i \neq j$, $k \neq l$, $1 \leqq i, j, k, l \leqq n$, $x^{(i)} \cap x^{(j)} = x^{(k)} \cap x^{(l)}$ besteht. Die Menge aller normalen Elemente bezeichnen wir mit W. W ist — bezüglich der Ordnungsrelation in K — eine teilweise geordnete Menge. Zuerst werden wir zeigen, daß W ein Verband ist.

I. Es sei $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)})$ ein beliebiges Element aus K. Das Element $([x^{(1)} \cup \bigvee_{1 \leqq i,j \leqq n} (x^{(i)} \cap x^{(j)})]_1, [x^{(2)} \cup \bigvee_{1 \leqq i,j \leqq n} (x^{(i)} \cap x^{(j)})]_2, \ldots)$ ist größer als $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)})$, und es ist normal. Wegen der Distributivität von V besteht nämlich

$$\big(x^{(k)} \cup \bigvee_{1 \leqq i,\, j \leqq n} (x^{(i)} \wedge x^{(j)})\big) \cap \big(x^{(l)} \cup \bigvee_{1 \geqq i,\, j \leqq n} (x^{(i)} \wedge x^{(j)})\big) = \bigvee_{1 \leqq i,\, j \leqq n} (x^{(i)} \cap x^{(j)})$$

und $\bigvee_{1 \leqq i,\, j \leqq n} (x^{(i)} \cup x^{(j)})$ ist von k, l unabhängig; das bedeutet, daß dieses Element normal ist. Dieses Element ist aber das kleinste Element, welches größer ist als $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)})$, da im Falle $(z_1^{(1)}, z_2^{(2)}, \ldots, z_n^{(n)}) \geqq (x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)})$, wo $(z_1^{(1)}, z_2^{(2)}, \ldots, z_n^{(n)})$ ein normales Element ist, $x^{(k)} \cup \bigvee_{i,j} (x^{(i)} \cap x^{(j)}) \leqq z^{(k)} \cup \bigvee_{i,j} (z^{(i)} \cap z^{(j)}) = z^{(k)}$ gilt, d. h. $(z_1^{(1)}, z_2^{(2)}, \ldots, z_n^{(n)}) \geqq ([x^{(1)} \cup \bigvee_{i,j} (x^{(i)} \cap {}^{(j)})]_1, \ldots)$ Damit haben wir bewiesen, daß in W zu jedem Element $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)})$ ein kleinstes normales Element existiert, welches größer (oder gleich) $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)})$ ist. Es seien $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)})$ und $(y_1^{(1)}, y_2^{(2)}, \ldots, y_n^{(n)})$ zwei normale Elemente. Dann enthält $((x^{(1)} \cup y^{(1)})_1, (x^{(2)} \cup y^{(2)})_2, \ldots, (x^{(n)} \cup y^{(n)})_n)$ ein kleinstes normales Element, welches offensichtlich die Vereinigung von $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)})$ und $(y_1^{(1)}, y_2^{(2)}, \ldots, y_n^{(n)})$ in W ist; also existiert in W die Vereinigung.

II. Der Durchschnitt zweier normaler Elemente ist auch normal. Es seien nämlich $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)})$ und $(y_1^{(1)}, y_2^{(2)}, \ldots, y_n^{(n)})$ normal, d. h. $x^{(i)} \cap x^{(j)} = x^{(k)} \cap x^{(l)}$ und $y^{(i)} \cap y^{(j)} = y^{(k)} \cap y^{(l)}$ $(i \neq j,\ k \neq l)$. Hieraus ergibt sich $(x^{(i)} \cap y^{(i)}) \cap (x^{(j)} \cap y^{(j)}) = (x^{(k)} \cap y^{(k)}) \cup (x^{(l)} \cap y^{(l)})$, was bedeutet, daß $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)}) \cap (y_1^{(1)}, y_2^{(2)}, \ldots, y_n^{(n)}) =$

$=((x^{(1)}\cap y^{(1)})_1, (x^{(2)}\cap y^{(2)})_2, \ldots, (x^{(n)}\cap y^{(n)})_n)$ normal ist. Damit haben wir bewiesen, daß in W der Durchschnitt existiert (und gleich dem Durchschnitt in K ist). W ist also ein Verband.

Nun werden wir die Eigenschaften (i) und (ii) nachweisen.

(i) V_i ist ein Teilverband (Ideal) von K, bestehend aus den Elementen $(0, 0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)$ aus K. Diese Elemente sind aber offensichtlich normal, d. h. V_i ist auch in W ein Ideal. Die Eigenschaft $x\cap y=0$, $x\in V_i$, $y\in V_j$ $(i\neq j)$ ist trivial.

(ii) Der Einfachheit halber schreiben wir statt $(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)$ nur x_i, und so können wir statt $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)})$ auch $\bigvee_{i=1}^{n} x_i^{(i)}$ schreiben. Es sei Φ eine beliebige Kongruenzrelation von W, und $x_i\equiv y_i(\Phi)$ $(x>y)$. Es sei $1\leqq j\leqq n$ ein weiterer index. Dann können wir, da $n\geqq 3$, eine Zahl $1\leqq k\leqq n$ finden, so daß $k\neq i, j$. So folgt aus $x_i\equiv y_i(\Phi)$, $x_i\cup x_k\equiv y_i\cup x_k(\Phi)$. Es ist jedoch $x_i\cup x_k=\bigvee_{l=1}^{n} x_l$ und $y_i\cup x_k=x_k\cup \bigvee_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} y_l$, d. h. $\bigvee_{l=1}^{n} x_l\equiv x_k\cup \bigvee_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} y_l$ (Φ). Daraus folgt $x_j=x_j\cap\left(\bigvee_{l=1}^{n} x_l\right)\equiv x_j\cap$ $\cap\left(x_k\cup\bigvee_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} y_l\right)=y_j(\Phi)$. Wir haben gewonnen, daß Φ auf allen Idealen V_i dieselbe Kongruenzrelation induziert.

Wenn $(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(n)})\equiv(y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(n)})$ (Φ) $(x^{(i)}\geqq y^{(i)})$, so besteht $x_j^{(j)}=x_j^{(j)}\cap$ $\cap\left(\bigvee_{i=1}^{n} x_i^{(i)}\right)\equiv x_j^{(j)}\cap\left(\bigvee_{i=1}^{n} y_i^{(i)}\right)=y_j^{(j)}(\Phi)$ für beliebige $1\leqq j\leqq n$, also besteht $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)})\equiv(y_1^{(1)}, y_2^{(2)}, \ldots, y_n^{(n)})(\Phi)$ dann und nur dann, wenn $x_i^{(i)}\equiv y_i^{(i)}(\Phi)$ für alle $1\leqq i\leqq n$. Das bedeutet — zusammen mit den vorher Gesagten — daß $x_j^{(i)}\equiv y_j^{(i)}(\Phi)$ für alle i, j also ist Φ durch diejenige Kongruenzrelation von V_j, welche von Φ auf V_j induziert wird, eindeutig bestimmt. (D. h. $x_j\equiv y_j(\Phi_j)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_j\equiv y_j(\Phi)$).

Anderseits, wenn Θ eine beliebige Kongruenzrelation von V ist, so sei bei dem Isomorphismus $V\cong V_i$ die entsprechende Kongruenzrelation $\Theta_i\in\Theta(V_i)$; also gilt $x_i\equiv y_i(\Theta_i)$ dann und nur dann, wenn $x\equiv y(\Theta)$ in V.

$\bar\Theta$ sei die folgende Äquivalenzrelation auf W: $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)})\equiv(y_1^{(1)}, \ldots$ $\ldots, y_n^{(n)})(\bar\Theta)$ dann und nur dann, wenn $x_i^{(i)}\equiv y_i^{(i)}(\Theta_i)$ für alle $1\leqq i\leqq n$. Zuerst zeigen wir, daß $\bar\Theta$ eine Kongruenzrelation ist. Es sei $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)})\equiv$ $\equiv(y_1^{(1)}, y_2^{(2)}, \ldots, y_n^{(n)})(\bar\Theta)$ und $(z_1^{(1)}, z_2^{(2)}, \ldots, z_n^{(n)})\in W$. Dann ist $x_i^{(i)}\equiv y_i^{(i)}(\Theta_i)$, folglich $(x^{(i)}\cap z^{(i)})_i\equiv(y^{(i)}\cap z^{(i)})_i(\Theta_i)$, d. h. $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)})\cap(z_1^{(1)}, z_2^{(2)}, \ldots, z_n^{(n)})\equiv$ $\equiv(y_1^{(1)}, y_2^{(2)}, \ldots, y_n^{(n)})\cap(z_1^{(1)}, \ldots, z_n^{(1)})(\bar\Theta)$.

Aus $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)})\equiv(y_1^{(1)}, y_2^{(2)}, \ldots, y_n^{(n)})(\bar\Theta)$ folgt $x_i^{(j)}\equiv y_i^{(j)}(\Theta_i)$ $1\leqq i, j\leqq n)$ und $x_i^{(j)}\cup z_i^{(j)}\equiv y_i^{(j)}\cup z_i^{(j)}(\Theta_i)$. Daraus ergibt sich, daß $((x^{(i)}\cup z^{(i)})\cup\bigvee_{j,k}[(x^{(j)}\cup z^{(j)})\cap$ $\cap(x^{(k)}\cup z^{(k)})])_i\equiv((y^{(i)}\cup z^{(i)})\cup\bigvee_{j,k}[(y^{(j)}\cup z^{(j)})\cap(x^{(k)}\cup z^{(k)})])_i(\Theta_i)$ für alle $1\leqq i\leqq n$, d. h. $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots x_n^{(n)})\cup(z_1^{(1)}, z_2^{(2)}, \ldots, z_n^{(n)})\equiv(y_1^{(1)}, y_2^{(2)}, \ldots, y_n^{(n)})\cup(z_1^{(1)}, z_2^{(2)}, \ldots, z_n^{(n)})(\bar\Theta)$, al-

Θ ist $\bar{\Theta}$ eine Kongruenzrelation. $\bar{\Theta}$ ist offensichtlich die Erweiterung von so$_i \in \Theta(V_i)$ auf W, daß bedeutet, daß jede Kongruenzrelation auf W erweitbar ist. Vorher haben wir gesehen, daß jede Kongruenzrelation sich in Form $\bar{\Theta}$ schreiben läßt, also ist die Abbildung $\Theta_i \to \bar{\Theta}$ ein Isomorphismus zwischen $\Theta(V_i)$ und $\Theta(W)$.

Lemma 8. *Jede Kongruenzrelation $\Theta(a)$ von $B(a)$ ist auf $B(a, b)$ erweitbar: $\Theta(a, b)$, und $\Theta(a, b)$ induziert auf $B(b)$ eine Kongruenzrelation $\Theta(b)$.*

Beweis. Es sei $\Theta(a) \in \Theta(B(a))$. $B(a)$ ist ein Boolscher Verband, und so ist $\Theta(a)$ durch den Kern I eindeutig bestimmt: $x \equiv y\ (\Theta(a))\ (x \geqq y,\ x, y \in B(a))$ dann und nur dann, wenn ein $z \in I$ existiert, daß $x = z \cup y$ (s. [7]). I ist ein Ideal in $B(a)$ und ist auf $B(a, b)$ erweitbar. Es sei nämlich das Ideal $\bar{I}$ von $B(a, b)$ bestimmt durch „$t \in \bar{I}\ \big(t \in B(a, b)\big)$ dann und nur dann, wenn ein $y \in I \subseteqq B(a)$ mit $y \geqq t$ existiert". Es ist klar, daß $\bar{I} \wedge B(a) = I$. Nach Lemma 7 ist $B(a, b)$ ein distributiver Verband, so existiert eine kleinste Kongruenzrelation $\Theta(a, b)$ mit dem Kern $\bar{I}$, und $x \equiv y$ $(\Theta(a, b))\ \big(x \geqq y,\ x, y \in B(a, b)\big)$ dann und nur dann, wenn es ein $z \in \bar{I}$ gibt, so dass $x = z \cup y$. (s. [7]). Daraus folgt, daß $\Theta(a, b)$ eine Erweiterung von $\Theta(a)$ ist. $J = \bar{I} \wedge$ $\wedge B(b)$ ist ein Ideal in $B(b)$, und so gehört zu J eine minimale Kongruenzrelation $\Theta(b)$ in $B(b)$ mit dem Kern J. Es ist klar, dass $y_1 \equiv y_2(\Theta(b))$, $y_1, y_2 \in B(b)$ äquivalent ist mit $y_1 \equiv y_2\big(\Theta(a, b)\big)$.

Lemma 9. *Es sei H ein dual relativ-pseudokomplementärer, distributiver Halbverband mit 0 und 1, und es sei $a\ (\neq 1)$ ein beliebiges Element aus H. Es existiert ein 0 Element besitzender Verband L mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) *L hat zwei Ideale I_1 und I_2, so daß $I_1 \cong B(1)$, $\big[x_1 \to \bar{x}_1\big(x_1 \in I_1,\ \bar{x}_1 \in B(1)\big)\big]$, $I_2 \cong B(a)$, $\big[x_2 \to \bar{x}_2\big(x_2 \in I_2,\ \bar{x}_2 \in B(a)\big)\big]$, und wenn $x_1 \in I_1$, $y_2 \in I_2$ so $x_1 \cap y_2 = 0$;*

(ii) *Jede Kongruenzrelation Θ_1 von I_1 und Θ_2 von I_2 ist auf L erweitbar: $\bar{\Theta}_1$, $\bar{\Theta}_2$; und jedes $\Phi \in \Theta(L)$ ist in Form $\Phi = \bar{\Theta}_1 \cup \bar{\Theta}_2$ darstellbar;*

(iii) *$\bar{\Theta}_{x_i 0} \geqq \bar{\Theta}_{y_j 0}$ $(i, j = 1, 2)$ dann und nur dann, wenn in $B(1, a)$ $\bar{x}_i \geqq \bar{y}_j$.*

Beweis. Betrachten wir den Verband $V \cong B(1, a)$. Nach Lemma 7 existiert zu V und $n = 4$ ein Verband W mit den in Lemma 7 angegebenen Eigenschaften. W hat die Ideale $V_i \cong V$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Wir werden den Isomorphismus $V_i \cong B(1, a)$ mit $x_i \to \bar{x}_i$ $\big(x_i \in V_i,\ \bar{x}_i \in B(1, a)\big)$ bezeichnen.

Lassen wir von W die Elemente weg, die in Form $(x_1^{(1)}, 0, 0, 0)$ oder $(0, x_2^{(2)}, 0, 0)$ schreibbar sind, wo $\bar{x}_1^{(1)} \notin B(1)$ und $\bar{x}_2^{(2)} \notin B(a)$. Die übrigbleibenden Elemente von W bilden — mit der Ordnungsrelation von W — eine teilweise geordnete Menge L. Wir werden zeigen, daß L ein Verband mit den Eigenschaften (i)—(iii) ist. Es seien $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}, x_4^{(4)})$ und $(y_1^{(1)}, y_2^{(2)}, y_3^{(3)}, y_4^{(4)}) \in L$. Die Vereinigung dieser Elemente kann nur dann ein weggelassenes Element von W sein, wenn entweder $x_2^{(2)} = x_3^{(3)} = x_4^{(4)} = y_2^{(2)} = y_3^{(3)} = y_4^{(4)} = 0$, oder $x_1^{(1)} = x_3^{(3)} = x_4^{(4)} = y_1^{(1)} = y_3^{(3)} = y_4^{(4)} = 0$. So ist in W $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}, x^{(4)}_4) \cup$ $\cup (y_1^{(1)}, y_2^{(2)}, y_3^{(3)}, y_4^{(4)}) = \big((x^{(1)} \cup y^{(1)})_1, 0, 0, 0\big)$, bzw. $\big(0, (x^{(2)} \cup y^{(2)})_2, 0, 0\big)$. Aber wir wissen aus Lemma 6, daß wenn $\bar{x}_1^{(1)}, \bar{y}_1^{(1)} \in B(1)$, so $\overline{x^{(1)} \cup y^{(1)}} \in B(1)$, also $((x^{(1)} \cup y)^{(1)}{}_1, 0, 0, 0) \in L$. Ebenso $(0, (x^{(2)} \cup y^{(2)})_2, 0, 0) \in L$, d. h. L ist bezüglich der $\cup$-Operation ein Halbverband.

Wenn $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}, x_4^{(4)})$, $(y_1^{(1)}, y_2^{(2)}, y_3^{(3)}, y_4^{(4)}) \in L$, so ist der Durchschnitt dieser Elemente in W gleich $((x^{(1)} \cap y^{(1)})_1, (x^{(2)} \cap y^{(2)})_2, (x^{(3)} \cap y^{(3)})_3, (x^{(4)} \cap y^{(4)})_4)$. Das ist dann ein weggelassenes Element, wenn entweder $x^{(2)} \cap y^{(2)} = x^{(3)} \cap y^{(3)} = x^{(4)} \cap y^{(4)} = 0$ oder $x^{(1)} \cap y^{(1)} = x^{(3)} \cap y^{(3)} = x^{(4)} \cap y^{(4)}$ und $(\overline{x^{(1)} \cap y^{(1)}})_1 \notin B(1)$, bzw. $(\overline{x^{(2)} \cap y^{(2)}})_2 \notin B(a)$. Nach Lemma 5 existieren aber $(x^{(1)} \cap y^{(1)})(1)$ und $(x^{(2)} \cap y^{(2)})(a)$, so daß $([(x^{(1)} \cap y^{(1)})(1)]_1, 0, 0, 0)$ bzw. $(0, [(x^{(2)} \cap y^{(2)})(a)]_2, 0, 0)$ der Durchschnitt von $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}, x_4^{(4)})$ und $(y_1^{(1)}, y_2^{(2)}, y_3^{(3)}, y_4^{(4)})$ ist, d. h. L ist ein Verband.

Jetzt weisen wir die Eigenschaften (i)—(iii) nach:

(i) Ein $(x_1, 0, 0, 0) \in W$ ist dann und nur dann in L, wenn $\bar{x} \in B(1)$, also bilden alle in L liegenden Elemente der Form $(x_1, 0, 0, 0)$ ein mit $B(1)$ isomorphes Ideal. Bezeichnen wir dieses Ideal mit I_1. Ebenso bilden die Elemente $(0, x_2, 0, 0)$ ein Ideal $I_2 \cong B(a)$. Es ist trivial, dass $x_1 \cap y_2 = 0$.

(ii) Es sei $\Theta_1 \in \Theta(I_1)$. Nach dem Isomorphismus $I_1 \cong B(1)$ $(\subseteq B(1, a))$ entspricht Θ_1 eine Kongruenzrelation $\Theta(1) \in \Theta(B(1))$. Nach Lemma 8 ist $\Theta(1)$ auf $B(1, a)$ erweitbar: $\Theta(1, a)$. $\Theta(1, a)$ induziert nach Lemma 8 eine Kongruenzrelation $\Theta(a)$ auf $B(a)$. Bezeichben wir mit Θ_2 die der Kongruenzrelation $\Theta(a)$ entsprechende Kongruenzrelation bei $I_2 \cong B(a)$. Weiterhin entspricht beim Isomorphismus $V_i \cong B(1, a)$ $(i = 3, 4)$, $\Theta(1, a)$ $\Theta_3 \in \Theta(V_3)$ bzw. $\Theta_4 \in \Theta(V_4)$.

Die Kongruenzrelation Θ_3 ist nach Lemma 7 auf W erweitbar: $\bar{\Theta}_3$. Da $L \subseteq W$, so iduziert $\bar{\Theta}_3$ auf L eine Äquivalenzrelation $\bar{\Theta}$. Es sei nämlich $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}, x_4^{(4)}) \equiv (y_1^{(1)}, y_2^{(2)}, y_3^{(3)}, y_4^{(4)})$ $(\bar{\Theta})$ dann und nur dann, wenn $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}, x_4^{(4)}) \equiv (y_1^{(1)}, y_2^{(2)}, y_3^{(3)}, y_4^{(4)}) (\bar{\Theta}_3)$ $((x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}, x_4^{(4)}), (y_1^{(1)}, y_2^{(2)}, y_3^{(3)}, y_4^{(4)}) \in L)$. $\bar{\Theta}$ induziert auf I_1: Θ_1, auf I_i: Θ_2 und auf V_3, V_4: Θ_3 bzw. Θ_4. Wir müssen einsehen, daß $\bar{\Theta}$ eine Kongruenzrelation ist. Da L bezüglich der $\cup$-Operation ein Teilhalbverband von W ist, ist es klar, daß aus $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}, x_4^{(4)}) \equiv (y_1^{(1)}, y_2^{(2)}, y_3^{(3)}, y_4^{(4)})$ $(\bar{\Theta})$ $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}, x_4^{(4)}) \cup (z_1^{(1)}, z_2^{(2)}, z_3^{(3)}, z_4^{(4)}) \equiv (y_1^{(1)}, y_2^{(2)}, y_3^{(3)}, y_4^{(4)}) \cup (z_1^{(1)}, z_2^{(2)}, z_3^{(3)}, z_4^{(4)})$ $(\bar{\Theta})$ folgt. Es sei $x = (x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}, x_4^{(4)}) \equiv (y_1^{(1)}, y_2^{(2)}, y_3^{(3)}, y_4^{(4)}) = y$ $(\bar{\Theta})$ und es bezeichne $\cap$ die Durchschnittsoperation in W, $\wedge$ diejenige in L. Wir müssen nachweisen, daß für ein beliebiges $z = (z_1^{(1)}, z_2^{(2)}, z_3^{(3)}, z_3^{(4)}) \in L$ $x \wedge z \equiv y \wedge z$ $(\bar{\Theta})$ gilt. Dazu müssen wir vier Fälle betrachten, da aber drei davon auf gleiche Weise sich beweisen lassen, werden wir nur zwei Fälle diskutieren.

a) Es seien $x \cap z, y \cap z \in L$. Wenn $x \cap z \in L$, so $x \cap z = x \wedge z$. Ebenso folgt aus $y \cap z \in L$ $y \cap z = y \wedge z$, und so ergibt sich $x \wedge z = x \cap z \equiv y \cap z = y \wedge z$ (Θ), da $\bar{\Theta}$ auf W eine Kongruenzrelation ist.

b) Es seien $x \cap z \notin L$ und $y \cap z \in L$, d. h. $y \cap z = y \wedge z$. Aus $x \cap z \notin L$ folgt, daß $x \wedge z = ([(x^{(1)} \cap z^{(1)})(1)]_1, 0, 0, 0)$ und $x^{(2)} \wedge z^{(2)} = x^{(3)} \cap z^{(3)} = x^{(4)} \cap z^{(4)}$. (Oder $x \wedge z = (0, [(x^{(2)} \cap z^{(2)})(a)]_2, 0, 0)$, dieser Fall läßt sich aber ebenso behandeln.) Aus $x \equiv y(\Theta)$ folgt $x_i^{(i)} \equiv y_i^{(i)}(\Theta)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, d. h. $(x^{(i)} \cap z^{(i)})_i \equiv (y^{(i)} \cap z^{(i)})_i (\Theta)$.

Nach Lemma 8 ist $\bar{\Theta}$ auf I_1 eine Kongruenzrelation, d. h. $[(x^{(1)}\cap z^{(1)})(1)]_1 \equiv [(y^{(1)}\cap z^{(1)})(1)]_1 = (y^{(1)}\cap z^{(1)})_1(\bar{\Theta})$.[2]) Daraus ergibt sich, daß $x \wedge z \equiv y \wedge z(\bar{\Theta})$. Damit haben wir bewiesen, dass jedes $\Theta_1 \in \Theta(I_1)$ auf L erweitbar ist. Analogerweise geht der Beweis auf $\Theta_2 \in \Theta(I_2)$.

Es sei Φ eine beliebige Kongruenzrelation von L. Ebenso wie in Lemma 7, kann man beweisen, dass $\Phi = \Phi_3$, wo Φ_3 eine Kongruenzrelation von V_3 ist. Es sei $(0, 0, x_3, 0) \equiv (0, 0, y_3, 0)$ (Φ) $(x_3 > y_3)$. Daraus ergibt sich — wenn wir beide Seiten mit $(0, 0, 0, x_4)$ vereinigen — daß $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, x_3, 0) \cup (0, 0, 0, x_4) \equiv$ $\equiv (0, 0, y_3, 0) \cup (0, 0, 0, x_4) = (y_1, y_2, y_3, x_4)(\Phi)$, folglich $(x(1)_1, 0, 0, 0) =$ $= (x(1)_1, 0, 0, 0) \wedge (x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (x(1)_1, 0, 0, 0) \wedge (y_1, y_2, y_3, x_4) = (y(1)_1, 0, 0, 0)$ (Φ). Ebenso gewinnen wir, dass auch $(0, x(a)_2, 0, 0) \equiv (0, y(a)_2, 0, 0)(\Phi)$, d. h. $\Phi = \bar{\Theta}_1 \cup \bar{\Theta}_2$, wo $\Theta_i \in \Theta(I_1)$, $\Theta_1 = \bigvee_{x_3 \equiv y_1(\Phi)} \Theta_{x(1), y(1)}$ und $\Theta_2 \in \Theta(I_2)$, $\Theta_2 = \bigvee_{x_3 \equiv y_3(\Phi)} \Theta_{x(a), y(a)}$

(iii) Es sei z. B. $\bar{x}_1 \geqq \bar{y}_2$ in $B(1, a)$. $(x_1, 0, 0, 0) \equiv (0, 0, 0, 0)$ $(\bar{\Theta}_{x_1 0})$. Beiden Seiten mit $(0, 0, x_3, 0)$ vereinigt: $(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (0, 0, x_3, 0)$ $(\bar{\Theta}_{x_1 0})$, also $(0, x(a)_2, 0, 0) = (0, x(a)_2, 0, 0) \wedge (x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (0, x(a)_2, 0, 0) \wedge (0, 0, x_3, 0) =$ $= (0, 0, 0, 0)$ $(\bar{\Theta}_{x_1 0})$. Da $\bar{x}_1 > \bar{y}_2$, folgt $(0, x(a)_2, 0, 0) \geqq (0, y_2, 0, 0)$, d. h. $(0, y_2, 0, 0) \equiv (0, 0, 0, 0)$ $(\bar{\Theta}_{x_1 0})$, also $\bar{\Theta}_{x_1 0} \geqq \bar{\Theta}_{y_2 0}$. Ebenso geht der Beweis, wenn $\bar{x}_1 \leqq \bar{y}_1$. Umgekehrt — wenn z. B. $\bar{\Theta}_{x_1 0} \geqq \bar{\Theta}_{y_2 0}$ — so ist offensichtlich $\bar{x}_1 \geqq \bar{y}_2$ q. e. d.

Definition 7. Es sei H ein $\cap$-Halbverband, und zu gewissen Paaren $a, b \in H$ existiere die kleinste obere Schranke, d. h. $a \cup b$. Dann nennen wir H einen $\cup$-partiellen Verband.

Die Kongruenzrelationen ein H sind die folgenden Äquivalenzrelationen Θ: wenn $a \equiv b(\Theta)$, so $a \cap c \equiv b \cap c(\Theta)$ für alle $c \in H$ und wenn für ein $d \in H$ $a \cup d$ und $b \cup d$ existieren, so auch $a \cup d \equiv b \cup d(\Theta)$. Die Kongruenzrelationen von H bilden einen Verband $\Theta(H)$, den Kongruenzverband von H.

Es sei L ein Verband und es sei H ein $\cap$-Teilhalbverband von L, so daß wenn $a \cup b$ $(a, b \in H)$ in H existiert, dann ist es gleich $a \cup b$ in L.

Definition 8. Wenn kein solcher echter Teilverband von L existiert, welcher H umfaßt, so sagen wir, daß L ein durch H erzeugter Verband ist.

Lemma 10. *Es sei H ein $\cup$-partieller Verband mit 0 Element, und es existiere in H eine Teilmenge $\{b_\alpha\}_{\alpha \in A}$, so daß die Elemente b_α maximal sind, und zu jedes $x \in H$ mindestens ein $b_\alpha \in \{b_\alpha\}_{\alpha \in A}$ $x \leqq b_\alpha$ gibt: weiterhin ist jedes Intervall $[0, b_\alpha]$ ein Verband (d. h. ein Ideal). Es existiert ein durch H erzeugter Verband L, so daß jedes $\Theta \in \Theta(H)$ auf L erweitbar ist: $\bar{\Theta}$; und die Abbildung $\Theta \to \bar{\Theta}$ ein Isomorphismus zwischen $\Theta(H)$ und $\Theta(L)$ ist.*

Beweis. I ist ein p-Ideal von H wenn:

1. aus $a \in I$ und $b \leqq a$ $b \in I$ folgt;
2. wenn $a, c \in I$ und $a \cup c$ existiert, so stets $a \cup c \in I$.

---

[2]) Nämlich, wenn $x \equiv y(\Theta(a, b))$, $x \geqq y$, $x, y \in B(a, b)$, so $x = y \cup t$, wo $t \equiv 0$ $(\Theta(a, b))$. Aber so gilt (siehe den Beweis von Lemma 6) $x(a) = y(a) \cup t(a)$ d. h. $x(a) \equiv y(a)(\Theta(a, b))$.

Wir werden zeigen, daß alle endlich erzeugten p-Ideale einen Verband bilden. Es sei $I=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ein endlich erzeugtes p-Ideal. Zu jedes $b_\alpha \in \{b_\alpha\}_{\alpha\in A}$ betrachten wir diejenigen Elemente y_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, welche kleiner oder gleich b_α sind, z. B. $y_1, y_2, y_3 \leqq b_\alpha$ und $y_i \nleqq b_\alpha (0>3)$. Dann betrachten wir das Element $x_\alpha = \bigvee_{i=1}^{3} y_i$. Wenn wir dieses Verfahren auf alle Elemente $b_\alpha \in \{b_\alpha\}_{\alpha\in A}$ anwenden, so bekommen wir die Menge $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Es ist klar, daß alle Elemente x_α I erzeugen, d. h. $I=(x_\alpha)_{\alpha\in A}$. Da aber I endlich erzeugt ist, d. h. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nur endlich viele Elemente sind, ist es offensichtlich, daß unter den Elementen x_α nur endlich viele voneinander verschiedene sind. Betrachten wir unter den Elementen x_α die maximalen Elemente $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k}$. Es ist klar, daß $I=(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_k})$ und diese Darstellung von I ist eindeutig. So werden wir sagen, daß die Darstellung $I=(x_1, \ldots, x_k)$ von I eine *reguläre Darstellung* ist, wenn $x_i \cup x_k (1 \leqq i, j \leqq k)$ in H nicht existiert.

Die Vereinigung zweier endlich erzeugten p-Ideale I und J ist offensichtlich ebenfalls endlich erzeugt, und als Generatoren können wir die Gesamtheit der Generatoren von I und J nehmen.

Es seien I und J zwei endlich erzeugten p-Ideale in regulärer Darstellung: $I=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $J=(y_1, y_2, \ldots, y_k)$. Das p-Ideal $K=(x_i \cap y_j)_{\substack{1\leqq i\leqq k\\ 1\leqq j\leqq n}}$ ist offensichtlich endlich erzeugt, und $K \subseteq I \cap J$. Wenn $z \in I$ und J, so bestehen offensichtlich $z \leqq x_i$ und $z \leqq y_j$ für gewisse Indizes i und j, d. h. $z \leqq x_i \cap y_j$. Daraus ergibt sich, daß $z \in K$, also $K = I \cap J$, d. h. K ist endlich erzeugt. Damit haben wir bewiesen, daß die endlich erzeugten p-Ideale von H einen Verband bilden. Bezeichnen wir diesen Verband mit L. Der partielle Verband H ist in L durch die Abbildung $a \to (a]$ $(a \in H)$ einbettbar, und trivialerweise ist die Vereinigung zweier Elemente aus H (wenn sie existiert) gleich der Vereinigung in L. Weiterhin ist L durch H erzeugt, nämlich ist jedes Element von L Vereinigung von Elementen aus H. $((y_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{i=1}^{n} (x_i]$ und $(x_i] \in H$.).

Es sei Θ eine Kongruenzrelation von H. Wir definieren die folgende Äquivalenzrelation $\bar{\Theta}$ auf L: $a=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (y_1, y_2, \ldots y_k) = b$ $(\bar{\Theta})$ dann und nur dann, wenn für alle $b_\alpha \in \{b_\alpha\}_{\alpha\in A}$ $a \cap b_\alpha \equiv b \cap b_\alpha (\Theta)$.

(Damit diese Definition einen Sinn hat, müssen wir zeigen, daß $a \cap b_\alpha, b \cap b_\alpha \in H$. Wenn aber z. B. $a=(x_1, \ldots, x_n)$ regulärer Form ist, so $a \cap b_\alpha = (x_1 \cap b_\alpha, x_2 \cap b_\alpha, \ldots, x_n \cap b_\alpha)$ (das ist nicht unbedingt eine reguläre Form!), d. h. $a \cap b_\alpha = \bigvee_{i=1}^{n} (x_i \cap b_\alpha) \in H$. Weiterhin, da a endlich erzeugt ist, ist es klar, daß unter den $a \cap b_\alpha$ nur endlich viele von einander verschieden sind.)

Wir müssen zunächst beweisen, daß $\bar{\Theta}$ eine Kongruenzrelation ist. Es sei $a \equiv b(\bar{\Theta})$ und $c=(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in H$ ein beliebiges Element. Aus $a \cap b_\alpha \equiv b \cap b_\alpha (\bar{\Theta})$ folgt $(a \cap c) \cap b_\alpha \equiv (b \cap c) \cap b_\alpha (\Theta)$, also $a \cap c \equiv b \cap c (\bar{\Theta})$. Weiterhin ergibt sich aus $a \cap b_\alpha \equiv b \cap b_\alpha (\Theta)$, daß $(a \cap b_\alpha) \cup (c \cap b_\alpha) \equiv (b \cap b_\alpha) \cup (c \cap b_\alpha)(\Theta)$. Aber $(a \cap b_\alpha) \cup (c \cap b_\alpha) = (a \cup c) \cap b_\alpha$ ebenso $(b \cap b_\alpha) \cup (c \cap b_\alpha) = (b \cup c) \cap b_\alpha$, d. h. $a \cup c \equiv b \cup c$ $(\bar{\Theta})$. Damit haben wir bewiesen, daß $\bar{\Theta}$ eine Kongruenzrelation ist. Es ist klar, daß $\bar{\Theta}$ eine Erweiterung von Θ ist. Man kann ganz leicht einsehen, daß $\Theta(H)$ und $\Theta(L)$ isomorph sind. Nämlich folgt aus $a \equiv b(\Phi)$ $(\Phi \in \Theta(L))$ $a \cap b_\alpha \equiv b \cap b_\alpha (\Phi)$ für alle $b_\alpha \in \{b_2\}$, und es ist klar, daß $\Theta_{ab} = \bigvee_{\alpha} \Theta_{a\cap b_\alpha,\, b\cap b_\alpha}$; q. e. d.

§ 4. Beweis des Satzes

Es sei V ein kompakt erzeugter, distributiver Verband, in welchem $(*)$ erfüllt ist, sooft nur a ein kompaktes Elements ist. Nach Lemma 3 ist V isomorph mit $I(H)$, wo H ein 0 element besitzender, distributiver dual-relativpseudokomplementärer Halbverband ist.

Betrachten wir zu jedes $h \in H$ den $B(h)$ zerlegungsboolschen Verband. Es sei $E(h) \cong B(h)$ $(\bar{x} \to x, \bar{x} \in E(h), x \in B(h))$ so, dass die Verbände $E(h)$ disjunkt sind, also wenn $h_1 \neq h_2$, so $E(h_1) \wedge E(h_2) = \emptyset$. Wenn ein $x \in H$, $x \in B(h)$, so bezeichnen wir $\bar{x}$ mit $\bar{x}(h)$. Betrachten wir nun die Menge aller $E(h)$ $(h \in H)$ und identifizieren wir alle 0 Elemente d. h. $\bar{0}(h_1) = \bar{0}(h_2) = 0$. Bezeichnen wir diese Menge zusammen mit den in $E(h)$ existierenden Ordnungsrelationen mit K_1. So ist K_1 ein $\cup$-partieller Verband: $\bar{x}(h) \cap \bar{y}(h) = (\overline{x \cap y})(h)$, $\bar{x}(h) \cap \bar{y}(k) = 0$ $(h \neq k,\ h, k \in H)$ und $\bar{x}(h) \cup \bar{y}(k)$ existiert dann und nur dann, wenn $h = k$, und dann $\bar{x}(h) \cup \bar{y}(h) = (\overline{x \cup y})(h)$.

Wir werden den $\cup$-partiellen Verband K_1 zu einem $\cup$-partiellen Verband K erweitern. Es sei $h > k$ in H. $E(h) \vee E(k)$ ist ein p-Ideal in K_1 und es gilt $\bar{x}(h) \cap \bar{y}(k) = 0$. So existiert nach Lemma 9 ein Verband L derart, daß $E(h)$ $(= I_1)$ und $E(k)$ $(= I_2)$ Ideale von L sind. Bezeichnen wir dieses L mit $L(h, k)$ und betrachten wir die Menge

$$K = \bigvee_{\substack{h, k \in H \\ h > k}} L(h, k).$$

K ist ein $\cup$-partieller Verband: wenn $x, y \in L(h_1, k_1)$, so existiert $x \cap y$, da $L(h_1, k_1)$ ein Verband ist; wenn $x \in L(h_1, k_1)$, $y \in L(h_2, k_2)$ und $h_1 \neq h_2, k_2$; $k_1 \neq h_2, k_2$ so $x \cap y = 0$; wenn aber z. B. $k_1 = k_2$ so $x \cap y \in E(k_1) \subseteq L(h_1, k_1)$. Schlißlich existiert $x \cup y$, wenn x und y in demselben $L(h, k)$ liegen. Die in Lemma 10 vorkommenden Elemente $\{b_\alpha\}$ sind die Einheitselemente von $L(h, k)$.

Wenn wir zeigen, daß $\Theta(K)$ mit V isomorph ist, so sind wir nach Lemma 10 mit unserem Beweis fertig.

Es sei $\Theta \in \Theta(K)$. Wenn $\bar{h}(h) \equiv 0$ (Θ), so gilt nach Lemma 9 in $L(h, k) \subseteq K$, $\bar{k}(k) \equiv 0$ (Θ) für alle Elemente $k \leq h$. Weiterhin, wenn $\bar{h}_1(h_1) \equiv 0$ (Θ) und $\bar{h}_2(h_2) \equiv 0$ (Θ), so gilt wegen $k_1 = h_2 * (h_1 \cup h_2) \leq h_1$ und $k_2 = h_1 * (h_1 \cup h_2) \leq h_2$ $\bar{k}_1(k_1) \equiv 0(\Theta)$ und $\bar{k}_2(k_2) \equiv 0(\Theta)$. Aber dann besteht $k_1, k_2 \in B(h_1 \cup h_2)$, d. h. es existieren in $E(\overline{h_1 \cup h_2})$ die Elemente $\bar{k}_1(h_1 \cup h_2)$, $\bar{k}_2(h_1 \cup h_2)$ so, daß $\bar{k}_1(h_1 \cup h_2) \cup \bar{k}_2(h_1 \cup h_2) = (h_1 \cup h_2)(h_1 \cup h_2)$. Nach Lemma 10 folgt in $L(h_1 \cup h_2, k_1)$ aus $\bar{k}_1(k_1) \equiv 0(\Theta)$ $\bar{k}_1(h_1 \cup h_2) \equiv 0(\Theta)$ und ebenso $\bar{k}_2(h_1 \cup h_2) \equiv 0(\Theta)$, d. h. $(\overline{h_1 \cup h_2})(h_1 \cup h_2) = \bar{k}_1(h_1 \cup h_2) \cup \bar{k}_2(h_1 \cup h_2) \equiv 0(\Theta)$. Damit haben wir bewiesen, daß jede Kongruenzrelation $\Theta \in \Theta(K)$ auf der Menge $\{\overline{h(h)}\}$ eine solche Äquivalenzrelation Θ^* bildet, wo $\bar{h}(h) \equiv \bar{k}(k)$ (Θ^*) dann und nur dann besteht, wenn $h, k \in I$ für ein Ideal in H.

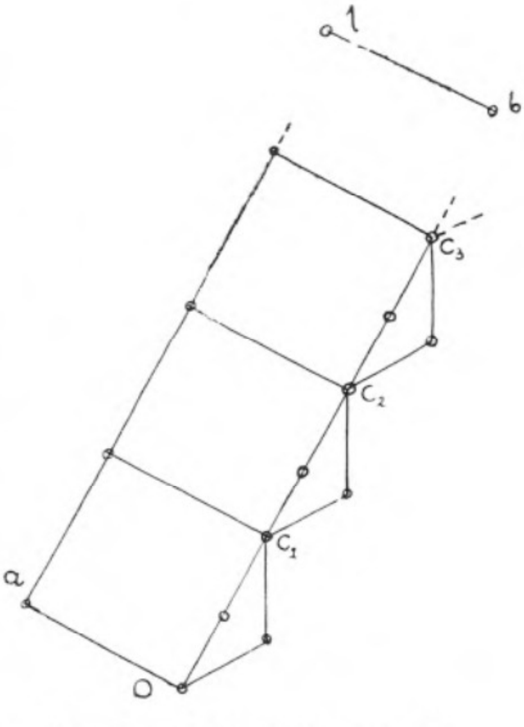
Zuletzt müssen wir zu $I(H) \cong \Theta(K)$ zeigen, daß wenn I ein beliebiges Ideal von H ist, so genau eine Kongruenzrelation von K derart existiert, daß $\bar{h}(h) \equiv \bar{k}(k)(\Theta)$ dann und nur dann, wenn $h, k \in I$. Diese Behauptung ist aber aus den Eigenschaften (ii) und (iii) des Lemmas 9 klar, q. e. d.

§ 5. Folgerungen und Probleme

Zuerst beweisen wir die zwei Korollare, die wir in § 1 erwähnt haben.

Beweis von Korollar 1. Jeder endliche distributive Verband V ist trivialerweise auch kompakt erzeugt und erfüllt ($\ast$) für beliebiges kompaktes Element a (offensichtlich sind in diesem Fall alle Elemente kompakt). So existiert nach dem Satz der Verband L mit $\Theta(L) \cong V$. Daß L auch endlich ist, können wir aus den Beweisen der Lemmata 7, 9 und 10 sehen.

Beweis von Korollar 2. In [4] ist es bewiesen, daß $2^P \cong I(F)$, wo F ein distributiver Halbverband mit 0 Element, und jedes Element die Vereinigung endlich vieler $\cup$ – irreduziblen Elemente ist. Es sei $a > b$, $a, b \in F$. Nach der Distributivität von F gilt $a = x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n$ und $b = x_1 \cup \ldots \cup x_k$ $(k < n)$, wo die x_i irreduziblen Elemente sind. Das Element $c = \bigvee_{i=k+1}^{n} x_i$ ist offensichtlich das dual-relativ Pseudokomplement $a \ast b$, also F ist dual-relativpseudokomplementär.



Wir haben gesehen, daß ($\ast$) — wo a ein kompaktes Element ist — eine hinreichende Bedingung darstellt, damit ein kompakt erzeugter distributiver Verband mit einem Kongruenzverband eines Verbandes isomorph sei. Daß diese Bedingung nicht notwendig ist, zeigt das folgende Beispiel: Es sei $\Theta = \Theta_{a0}$, $\Theta_i = \Theta_{c_i b}$, dann $\Theta \cup \bigwedge_i \Theta_i < \bigwedge (\Theta \cup \Theta_i)$.

Problem 1. Es sei V ein kompakt erzeugter, distributiver Verband, in welchem ($\ast$) gilt, sobald nur a ein kompaktes Element ist. Existiert dann ein abschnittkomplementärer Verband L so, daß $V \cong \Theta(L)$?

Problem 2. Suche hinreichende und notwendige Bedingungen dafür, daß in einem kompakt erzeugten distributiven Verband V eine Kette von Teilverbänden V_α existiere so, daß V_α ein kompakt erzeugter, distributiver Verband sei in welchem ($\ast$) gilt sobald nur a ein kompaktes Element ist, und $\bigvee_\alpha V_\alpha = V$.

Literatur

[1] G. Birkhoff, Lattice theory, *New York*, 1948.
[2] G. Birkhoff and O. Frink, Representations of lattices by sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **64** (1948), 299—316.
[3] N. Funayama and T. Nakayama, On the distributivity of a lattice of lattice-congruences, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **18** (1942), 553—554.
[4] G. Grätzer and E. T. Schmidt, On congruence lattice of lattices, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **13** (1962), 179—185.
[5] G. Grätzer and E. T. Schmidt, Characterizations of congruence lattices of abstact algebras, *Acta Sci Math. Szeged*, **24** (1963). (Im Erscheinen.)
[6] G. Grätzer and E. T. Schmidt, On distributive semilattices.
[7] G. Grätzer and E. T. Schmidt, Ideals and congruence relations in lattices, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **9** (1958), 137—175.

(Eingegangen am 28. Februar 1962.)