Über verallgemeinerte Lamésche Funktionen

Von HANS TRIEBEL (Jena)

1. Einleitung. Die Arbeit beschäftigt sich mit speziellen Lösungen der Differentialgleichung

$$(1)\qquad 4\prod_{i=1}^{n}(a_i^2+\lambda)\Lambda''(\lambda)+2\left[\frac{d}{d\lambda}\prod_{i=1}^{n}(a_i^2+\lambda)\right]\Lambda'(\lambda)+\sum_{j=0}^{n-2}b_j\lambda^j\cdot\Lambda(\lambda)=0.$$

Dabei sind die a_i^2 $(i=1, \ldots, n)$ fest vorgegebene positive reelle Zahlen, $a_1^2>a_2^2>\ldots$ $\ldots>a_n^2>0$. n ist eine natürliche Zahl größer oder gleich 2. Die Größen b_j $(j=0, 1, \ldots,$ $\ldots, n-2)$ sind komplexe Parameter. λ reell, $-\infty<\lambda<+\infty$. Für $n=3$ erhält man die bekannte algebraische Form der Laméschen Differentialgleichung mit den beiden Parametern b_0 und b_1. Analog zu diesem Fall wird nach Lösungen der Differentialgleichung gefragt, die die Gestalt $\Lambda(\lambda) = g_p(\lambda)\sqrt{P_l(\lambda)}$ aufweisen. Dabei soll g_p ein (normiertes) Polynom p-ten Grades in λ und P_l $(0\leqq l\leqq n)$ ein Polynom l-ten Grades der Form $P_l = \prod_{i=1}^{n}(\lambda+a_i^2)^{\mu_i}$, ($\mu_i$ gleich 0 oder 1), bedeuten, wobei l μ_i-Werte gleich 1 und $n-l$ μ_i-Werte gleich 0 sind. Die Lösung des Problems wird durch das Wechselspiel zweier Gleichungssysteme erzielt, wobei das erste Gleichungssystem durch den Ansatz

$$(2)\qquad g_p = \lambda^p+\sum_{j=1}^{p}d_j\lambda^{p-j}$$ [1]

und das zweite Gleichungssystem durch den Ansatz

$$(3)\qquad g_p=\prod_{i=1}^{p}(\lambda-c_i)$$

gewonnen wird.

Das Ziel der Arbeit ist der Beweis des folgenden Satzes.

Satz. *Zu vorgegebenem P_l gibt es genau $\binom{p+n-2}{n-2}$ normierte Polynome g_p mit der Eigenschaft, daß $\Lambda(\lambda)=\sqrt{P_l}\,g_p$ bei geeignet gewählten Parametern $b_0, b_1, \ldots, b_{n-2}$ eine Lösung der Differentialgleichung* (1) *darstellt. Dabei sind sämtliche Koeffizienten d_i und sämtliche Nullstellen c_j von g_p reell. Ferner sind die zu diesen Lösungen gehörigen Parameterwerte reell. Die Nullstellen liegen innerhalb der $n-1$ Intervalle*

[1] Diesen Ansatz und das daraus folgende Gleichungssystem (8) findet man bereits bei E. HEINE ([2]).

$-a_i^2 < \lambda_i < -a_{i+1}^2$ $(i=1, \ldots, n-1)$. *Zu jeder möglichen Nullstellenverteilung der p Nullstellen von g_p auf die $n-1$ Intervalle gibt es genau ein normiertes Polynom g_p, so daß $\sqrt{P_l}\, g_p$ der Gleichung* (1) *genügt.*

Setzt man $n=3$, so findet man die bekannten Aussagen über Lamésche Funktionen wieder.

Da es genau $\binom{p+n-2}{n-2}$ Möglichkeiten gibt, p Nullstellen auf $n-1$ Intervalle zu verteilen, so ist die Aussage über die Anzahl der Polynome g_p bewiesen, wenn die Behauptung über die Nullstellenverteilung als richtig erkannt wurde.

Der Fall $n=2$ kann elementar behandelt werden.

2. Beziehungen zur Potentialtheorie. Bevor mit dem Beweis des Satzes begonnen wird, soll kurz die Entstehung des Problems aus potentialtheoretischen Fragen geschildert werden.

Man geht im n-dimensionalen euklidischen Raum mit den kartesischen Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$ in „hyperelliptischen" Koordinaten aus, die mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ bezeichnet werden sollen. Diese Koordinaten gewinnt man durch Betrachtung der Hyperflächenschar

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2+\lambda} = 1, \qquad a_1^2 > a_2^2 > \ldots > a_n^2 > 0.$$

Dabei gilt für die Koordinaten $-a_i^2 < \lambda_i < -a_{i+1}^2$. $(i=1, \ldots, n;\ -a_{n+1}^2 = \infty)$. Von Interesse sind diejenigen im ganzen endlichen Raum regulären Potentialfunktionen, die einen Separationsansatz

$$u = \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i(\lambda_i) \tag{4}$$

in hyperelliptischen Koordinaten gestatten. Geht man mit diesem Ansatz in die Laplacesche Differentialgleichung ein, so erhält man nach einer längeren Rechnung das Differentialgleichungssystem

$$4 \prod_{i=1}^{n} (a_i^2+\lambda_k)\Lambda_k'' + 2\left[\frac{d}{d\lambda} \prod_{i=1}^{n} (a_i^2+\lambda_k)\right]\Lambda_k' + \sum_{j=0}^{n-2} b_j \lambda_k^j \cdot \Lambda_k = 0, \tag{5}$$

$(k=1, \ldots, n)$. (Die b_j sind in diesem Zusammenhang reelle Parameter). Man kann nun nachweisen, daß eine Potentialfunktion, die dem Separationsansatz (4) genügt, genau dann im ganzen endlichen Raum regulär ist, wenn die Separationsfaktoren die Gestalt

$$\Lambda_i(\lambda_i) = \Lambda(\lambda_i) = \sqrt{P_l(\lambda_i)}\, g_p(\lambda_i)$$

haben, wobei man von multiplikativen Konstanten absehen kann. Da sämtliche Separationsfaktoren die gleiche Gestalt haben, so führt die Bestimmung der Faktoren $\Lambda_i(\lambda_i)$ auf das in Abschnitt 1 geschilderte Problem zurück. Der dort angegebene Satz gibt somit auch einen Überblick über sämtliche im n-dimensionalen euklidischen Raum regulären Potentialfunktionen, die in hyperelliptischen Koordinaten separierbar sind. Derartige Potentialfunktionen sind im übrigen stets Polynome in $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$.

3. Erster Beweisschritt. p und l werden als fest vorgegebene nicht negative ganze Zahlen angesehen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit soll P_l die Form $P_l = \prod_{i=1}^{l} (\lambda + a_i^2)$ haben. Verwendet man für g_p den Ansatz (2), so folgt, wenn man $\Lambda(\lambda) = \sqrt{P_l}\, g_p$ in (1) einsetzt, nach einer kurzen Zwischenrechnung

$$
\begin{aligned}
&g_p \left[2P_l'' \prod_{i=l+1}^{n} (a_i^2 + \lambda) + P_l' \frac{d}{d\lambda} \prod_{i=l+1}^{n} (a_i^2 + \lambda) + \sum_{j=0}^{n-2} b_j \lambda^j \right] + \\
&+ g_p' \left[6P_l' \prod_{i=l+1}^{n} (a_i^2 + \lambda) + 2P_l \frac{d}{d\lambda} \prod_{i=l+1}^{n} (a_i^2 + \lambda) \right] + g_p'' 4P_l \prod_{i=l+1}^{n} (a_i^2 + \lambda) = 0.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Die linke Seite von (6) ist ein Polynom vom Grade $n+p-2$, das identisch verschwinden muß. Der Koeffizient bei λ^{n+p-2} gibt zu einer eindeutigen Bestimmung des Parameters b_{n-2} Anlaß:

$$
b_{n-2} = -(l+2p)(l+2p+n-2). \tag{7}
$$

Denkt man sich den eben bestimmten Wert von b_{n-2} in (6) eingetragen, so folgt durch Koeffizientenvergleich bei den übrigen λ-Potenzen das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
&b_{n-3} + d_1 k_1 + S_1 = 0 \\
&b_{n-4} + d_1 [b_{n-3} + S_2] + d_2 k_2 + S_3 = 0 \\
&\vdots \\
&b_0 + d_1 [b_1 + S_1'] + d_2 [b_2 + S_2'] + \ldots + d_{n-2} k_{n-2} + S_3' = 0 \\
&\quad d_1 [b_0 + S_4'] + d_2 [b_1 + S_5'] + \ldots + d_{n-1} k_{n-1} + S_6' = 0 \\
&\qquad \ddots \\
&\qquad\quad d_{p-2} S_1'' + d_{p-1} S_2'' + d_p [b_0 + S_3''] + S_4'' = 0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Man erhält ein Gleichungssystem für die $n+p-2$ Unbekannten $b_0, b_1, \ldots, b_{n-3}$, $d_1, \ldots, d_p$. Die Größen $S_1, \ldots, S_4''$ sind ebenso wie die k_i reelle Konstanten. ($k_i = 0$ für $i > p$, $d_i = 0$ für $i > p$). Die k_i sind von Null verschieden, denn es ergibt sich

$$
k_i = -i\big(6l + 2(n-l)\big) + 4[(p-i)(p-i-1) - p(p-1)] < 0.
$$

Daraus folgt, daß bei Kenntnis von $b_0, b_1, \ldots, b_{n-3}$ das Gleichungssystem (8) eindeutig nach $d_1, \ldots, d_p$ aufgelöst werden kann und umgekehrt.

Von Interesse sind sämtliche (reellen oder komplexen) Lösungssysteme von (8).

Als erstes soll gezeigt werden, daß (8) nur reelle Lösungen haben kann. Die Annahme eines nicht-reellen Lösungssystems hat

$$
\sum_{j=0}^{n-2} |b_j - \bar{b}_j| > 0 \tag{9}
$$

zur Folge. Mit $\Lambda(\lambda)$ ist dann auch $\bar{\Lambda}(\lambda)$ eine Lösung von (1). Zur Lösung $\bar{\Lambda}$ gehören die Parameterwerte $\overline{b}_j$ ($j=0, \ldots, n-2$). Es gilt

$$4\frac{d}{d\lambda}\left(\Lambda' \sqrt{\prod_{i=1}^{n}(a_i^2+\lambda)}\right)\overline{\Lambda} = -\frac{\sum_{j=0}^{n-2} b_j\lambda^j}{\sqrt{\prod_{i=1}^{n}(a_i^2+\lambda)}}\Lambda\overline{\Lambda}.$$

Subtrahiert man diesen Ausdruck von dem entsprechenden, in dem Λ und $\overline{\Lambda}$ vertauscht und die Parameter b_j durch $\overline{b_j}$ ersetzt sind, und integriert man zwischen den Grenzen $-a_k^2 \leqq \lambda_k \leqq -a_{k+1}^2$ ($k=1, \ldots, n-1$), so erhält man

$$\sum_{j=0}^{n-2}(b_j-\overline{b}_j)\int_{-a_k^2}^{-a_{k+1}^2}\lambda_k^j\Lambda(\lambda_k)\overline{\Lambda}(\lambda_k)\frac{d\lambda_k}{\sqrt{\prod_{i=1}^{n}(a_i^2+\lambda_k)}} = 0.$$

Wegen (9) muß die Koeffizientendeterminante dieses Gleichungssystems verschwinden. Berücksichtigt man noch, daß die entstehende Vandermondsche Determinante den Wert $\prod_{\substack{j>k\\1,\ldots,n-1}}(\lambda_j-\lambda_k)\neq o$ hat, so folgt

$$\int\limits_{\substack{-a_k^2\leqq\lambda_k\leqq -a_{k+1}^2\\k=1,\ldots,n-1}}\prod_{j>s}^{1,\ldots,n-1}(\lambda_j-\lambda_s)\prod_{k=1}^{n}\left[\Lambda(\lambda_k)\overline{\Lambda}(\lambda_k)\frac{d\lambda_k}{\sqrt{\prod_{i=1}^{n}(a_i^2+\lambda_k)}}\right] = 0.$$

Das ist ein Widerspruch.

Ferner erkennt man, daß (8) nur endlich viele verschiedene Lösungssysteme $(b_0,\ldots, b_{n-3}, d_1,\ldots, d_p)$ besitzen kann. Zwei Lösungssysteme $(b_0^{(1)}, \ldots, b_{n-3}^{(1)}, d_1^{(1)}, \ldots, d_p^{(1)})$ und $(b_0^{(2)}, \ldots, b_{n-3}^{(2)}, d_1^{(2)}, \ldots, d_p^{(2)})$ heißen verschieden, wenn

$$\sum_{j=0}^{n-3}|b_j^{(1)}-b_j^{(2)}|+\sum_{i=1}^{p}|d_i^{(1)}-d_i^{(2)}|>0$$

ist, was sofort

$$\sum_{j=0}^{n-3}|b_j^{(1)}-b_j^{(2)}|>0$$

zur Folge hat. Die Annahme von unendlich vielen verschiedenen Lösungen hat die Existenz von nicht-reellen Lösungen zur Folge, was nicht sein kann. Der Satz von Bezout gestattet jetzt eine Abschätzung der Anzahl der verschiedenen Lösungen $(b_0, \ldots, b_{n-3}, d_1, \ldots, d_p)$ von (8). Das wird uns in Abschnitt 5 zum endgültigen Beweis des Satzes führen, nachdem wir uns im nächsten Abschnitt über die Existenz von Lösungen Klarheit verschafft haben.

4. Zweiter Beweisschritt. Wir gehen mit der Darstellung (3) für g_p in die Gleichung (6) ein und setzen dort speziell $\lambda = c_j$ $(j=1, \dots, p)$ und erhalten

$$g'_p(c_j)\left[3\left(\frac{d}{d\lambda}\prod_{i=1}^{l}(\lambda+a_i^2)\right)_{\lambda=c_j}\prod_{i=l+1}^{n}(c_j+a_i^2)+\prod_{i=1}^{l}(c_j+a_i^2)\left(\frac{d}{d\lambda}\prod_{i=l+1}^{n}(\lambda+a_i^2)\right)_{\lambda=c_j}\right]+$$

$$+2g''_p(c_j)\prod_{i=1}^{n}(c_j+a_i^2) = 0.$$

Dividiert man diesen Ausdruck durch

$$\prod_{k=1}^{n}(c_j+a_k^2)\prod_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{p}(c_j-c_s)\neq 0,$$

so erhält man, wenn man noch zur Abkürzung setzt

$$[c_j]=3\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{c_j+a_k^2}+\sum_{k=l+1}^{n}\frac{1}{c_j+a_k^2},$$

das Gleichungssystem

$$[c_j]+4\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{p}\frac{1}{c_j-c_s}=0, \qquad (j=1, \dots, p). \tag{10}$$

Für Gleichungssysteme von der Gestalt (10) kann man folgenden Hilfssatz beweisen:

Hilfssatz. *Es sei*

$$[c_j]^* = \sum_{s=1}^{n}\frac{\varkappa_s}{c_j+a_s^2},$$

$\varkappa_s$ *reelle positive Zahlen,* $a_1^2 > a_2^2 > \dots > a_n^2 > 0$. *Deutet man die* c_j $(j=1, \dots, p)$ *als kartesische Koordinaten eines p-dimensionalen Raumes, so besitzt das System*

$$[c_j]^* + \sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{p}\frac{\tau_s}{c_j-c_s}=0, \tag{11}$$

$$(j=1, \dots, p), \quad \tau_s > 0, \quad (s=1, \dots, p),$$

innerhalb des Würfels

$$[-a_{k_j}^2 < c_j < -a_{k_j+1}^2]; \quad (j=1, \dots, p); \quad (1\leqq k_p \leqq k_{p-1} \leqq \dots \leqq k_1 \leqq n-1), \tag{12}$$

genau eine Lösung mit $c_1 > c_2 > \dots > c_p$.

Den Beweis dieses wichtigen Hilfssatzes werde ich nicht in allen Einzelheiten vorführen, sondern mich auf eine Schilderung der wesentlichen Punkte des Beweisganges beschränken. Man kann den Hilfssatz durch vollständige Induktion nach p beweisen. Für $p=1$ lautet das System $[c_1]^*=0$, der Satz ist offensichtlich richtig.

Wir setzen den Hilfssatz für $p-1$ als richtig voraus und schreiben (11) in der Form

$$\text{(11a)} \qquad \overline{[c_j]}^* + \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq j}}^{p-1} \frac{\tau_s}{c_j - c_s} = 0 \quad \text{mit} \quad \overline{[c_j]}^* = [c_j]^* + \frac{\tau_p}{c_j - c_p} \qquad (j=1, \ldots, p-1)$$

$$\text{(11b)} \qquad [c_p]^* + \sum_{s=1}^{p-1} \frac{\tau_s}{c_p - c_s} = 0.$$

Wählt man für c_p einen festen Wert aus dem Intervall $-a_{k_p}^2 \leqq c_p \leqq -a_{k_p+1}^2$, so kann man auf (11a) die Induktionsvoraussetzung anwenden, und man erhält für jedes c_p aus dem eben genannten Intervall genau ein Lösungssystem mit $c_1 > c_2 > \ldots \ldots > c_{p-1} > c_p$ und $-a_{k_i}^2 < c_i < -a_{k_i+1}^2$. Läßt man c_p innerhalb der Grenzen $-a_{k_p}^2$ und $-a_{k_p+1}^2$ variieren, so erhält man eine stetige „Lösungskurve" $[c_i(c_p), c_p]$, $(i=1, \ldots, p-1)$, innerhalb des Würfels (12). Die Betrachtung von(11 b) lehrt, daß es zu jedem Wertesystem $c_1 > c_2 > \ldots > c_{p-1}$, $-a_{k_i}^2 < c_i < -a_{k_i+1}^2$, $(i=1, \ldots, p-1)$, genau einen Wert c_p mit $c_p < c_{p-1}$ und $-a_{k_p}^2 < c_p < -a_{k_p+1}^2$ gibt, so daß man innerhalb von (12) ein stetiges Hyperflächenstück" erhält. Man kann nun nachweisen daß sich die „Lösungskurve" und das Hyperflächenstück in genau einem Punkte schneiden, was der Aussage des Hilfssatzes entspricht.

5. Dritter Beweisschritt. Nunmehr kann man den Beweis des aufgestellten Satzes schnell beenden. Da die Gleichungen (10) die Gestalt der Gleichungen (11) haben, so kann man den Hilfssatz anwenden. Jeder möglichen Nullstellenverteilung von p Nullstellen auf die $n-1$ Intervalle $-a_i^2 < \lambda_i < -a_{i+1}^2$ $(i=1, \ldots, n-1)$ kann man eindeutig einen Würfel (12) zuordnen und umgekehrt. Der Hilfssatz zeigt: Es gibt Polynome g_p mit der Eigenschaft, daß $\sqrt{P_l}\, g_p$ eine Lösung der Differentialgleichung (1) darstellt. Da es $\binom{n+p-2}{n-2}$ Möglichkeiten gibt, p Nullstellen auf $n-1$ Intervalle zu verteilen, so ist der Satz vollständig bewiesen, wenn man zeigen kann, daß das Gleichungssystem (8) nicht mehr als $\binom{n+p-2}{n-2}$ verschiedene Lösungen besitzen kann; denn sind zwei Lösungssysteme c_i von (10) verschieden, so sind es auch ihre elementarsymmetrischen Funktionen d_i $(i=1, \ldots, p)$. Da die c_i sämtlich negativ sind, so sind die d_i von Null verschieden. Wir ersetzen jetzt in (8) d_i durch $\mathfrak{d}_i^i$ $(i=1, \ldots, p)$ und lösen die ersten $n-2$ Gleichungen nach $b_{n-3}, \ldots, b_0$ auf. Man erhält

$$b_{n-2-i} = Q_i(\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_p), \qquad (i=1, \ldots, n-2),$$

wobei Q_i ein Polynom i-ten Grades in $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_p$ ist. Setzt man diesen Ausdruck in die verbleibenden p Gleichungen ein, so erhält man ein aus Polynomen bestehendes Gleichungssystem für die $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_p$. Diese Polynome haben die Grade $n-1$, $n, \ldots, n+p-2$. Nach dem Satz von BEZOUT und den Bemerkungen in Abschnitt 3 gibt es somit höchstens $(n-1)\, n(n+1) \ldots (n+p-2)$ verschiedene Lösungssysteme $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_p$. Das Gleichungssystem hat aber nach den Überlegungen von Abschnitt 4 mindestens $\binom{n+p-2}{p} \cdot 1 \cdot 2 \ldots \cdot p = (n-1)\, n \ldots (n+p-2)$ verschiedene Lösungen, da die dort auftretenden d_i sämtlich von Null verschieden sind. Damit ist gezeigt, daß (8) genau $\binom{n+p-2}{p}$ verschiedene Lösungssysteme $b_0, b_1, \ldots, b_{n-3}, d_1, \ldots d_p$ besitzt. Zusammen mit dem in Abschnitt 4 aufgezeigten Sachverhalt über die Nullstellenverteilung ergibt das den zu beweisenden Satz.

6. Schluß. Man kann den Satz für die in Abschnitt 2 geschilderten potentialtheoretischen Zusammenhänge nutzbar machen. Berücksichtigt man die Tatsache, daß jede Lamésche Funktion $\Lambda(\lambda) = \sqrt{P_l}\, g_p$ zu einem Polynom in den kartesischen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ Anlaß gibt, dessen Grad $m = l + 2p$ ist, so folgt, daß es genau

$$\sum_{p=0}^{\infty} \binom{p+n-2}{p} \binom{n}{m-2p} = \binom{m+n-2}{n-2} \binom{m+n-3}{n-2}$$

Polynome m-ten Grades gibt, die der Potentialgleichung genügen und in hyperelliptischen Koordinaten separierbar sind. Die angegebene Formel ist richtig, da es zu vorgegebenem l genau $\binom{n}{l} = \binom{n}{m-2p}$ Polynome P_l der in Abschnitt 1 angegebenen Form gibt.

Literatur

[1] W. Brödel, Zur Theorie der Laméschen Funktionen, *Wiss. Z. Friedrich—Schiller—Univ Jena*, **1—2** (1955/56), 151—155.

[2] E. Heine, Theorie der Kugelfunctionen und verwandte Functionen **1**, *Berlin*, 1878.

[3] J. Lense, Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik, *Berlin*, 1953.

(Eingegangen am 14. März 1962.)