Zu einem Satz von Huppert betreffend überauflösbare Gruppen

Von G. PAZDERSKI (Halle/Saale)

B. HUPPERT hat in [4] die Gleichwertigkeit folgender Eigenschaften für eine endliche Gruppe G bewiesen:

1. G ist überauflösbar (d. h. G besitzt nur Primzahlen als Hauptindizes).
2. Jede maximale Untergruppe von G hat unter G Primzahlindex.
3. $G/\Phi(G)$ ist überauflösbar.

Der Begriff der Überauflösbarkeit wurde dann von R. BAER in [1] erweitert durch Einführung des Begriffs der überauflösbaren Einbettung: Ein Normalteiler N der Gruppe G heißt *überauflösbar eingebettet in* G, wenn durch N eine Hauptreihe von G gelegt werden kann, deren unterhalb N gelegenes Stück nur Primzahlen als Indizes hat oder wenn N die Ordnung 1 besitzt. A. a. O. bewies BAER u. a. die folgende Verallgemeinerung von 1.$\leftrightarrow$3.:

Ein Normalteiler N der Gruppe G ist genau dann überauflösbar eingebettet in G, wenn $N/\Phi(N)$ in $G/\Phi(N)$ überauflösbar eingebettet ist.

In dieser Note geben wir unter Benutzung des BAERschen Resultats eine Verallgemeinerung von 1.$\leftrightarrow$2. an, indem wir die überauflösbare Einbettung gewisser Normalteiler N in der Gruppe G charakterisieren durch Aussagen über die Indizes derjenigen maximalen Untergruppen von G, die N nicht enthalten (Satz 3). Ferner beweisen wir eine weitere Verallgemeinerung von 1.$\leftrightarrow$3., deren wesentlicher Teil besagt, daß die Überauflösbarkeit eines beliebigen Normalteilers N der Gruppe G bereits aus der Überauflösbarkeit von $N/N\cap\Phi(G)$ folgt (Satz 4). Hierzu sei bemerkt, daß $\Phi(N)$ stets in $N\cap\Phi(G)$ liegt, jedoch beide Gruppen i. a. nicht zusammenfallen.

Bezeichnungen. $G=$ Gruppe (alle betrachteten Gruppen seien endlich); $N(K)=$ Normalisator des Komplexes K in G; $C(K)=$ Zentralisator des Komplexes K in G; $G'=$ Kommutatorgruppe von G; $\Phi(G)=$ Frattini-Untergruppe von $G=$ Durschnitt aller maximalen Untergruppen von G; $K\subset L$: K ist echte Teilmenge von L; $N\trianglelefteq G$: N ist Normalteiler von G; $|G|=$ Ordnung von G; $|G:U|=$ Index der Untergruppe U in G; $E=$ Gruppe der Ordnung 1; p bezeichnet stets eine Primzahl; $F_p(G)=$ $=$ größter p-nilpotenter (s. u.) Normalteiler von G. Sind N, M Normalteiler von G und ist N/M überauflösbar eingebettet in G/M, so wollen wir, um eine kurze Ausdruckweise zu haben, in Anlehnung an den von BAER in [1] eingeführten Begriff des überauflösbaren Paares von der Gruppe M/N sagen, sie sei *G-überauflösbar* oder *überauflösbar bzgl. G*.

Definitionen. Unter einer *Hall*schen Untergruppe von G versteht man jede Untergruppe U, für welche $|G:U|$ zu $|U|$ teilfremd ist.

G heißt *p-nilpotent*, wenn ein Normalteiler N in G existiert, derart daß $|G:N|$ eine p-Potenz und $|N|$ zu p teilerfremd ist.

Man sagt von einer Gruppe G, sie habe einen *Sylowturm* (bzw. einen *geordneten Sylowturm*), wenn ein beliebiger von E verschiedener Normalteiler N von G p-nilpotent ist für einen (bzw. für den kleinsten) Primteiler p von $|N|$.

G heißt *p-auflösbar* (bzw. *p-überauflösbar*), wenn jeder durch p teilbare Hauptindex von G p-Potenzordnung (bzw. die Ordnung p) hat.

I

Satz 1. *Sei N ein solcher Normalteiler von G, daß jede N nicht enthaltende maximale Untergruppe von G unter G Primzahlindex hat. Dann besitzt N einen geordneten Sylowturm.*

Beweis. Wir benutzen vollständige Induktion nach $|N|$. Wenn $|N|=1$, so ist die Behauptung trivial. Sei $|N|>1$. Es genügt zu zeigen, daß eine Sylowgruppe P von N, die zum größten Primteiler p von N gehört, in G normal ist. Wäre $N(P)\neq G$, so läge $N(P)$ in einer maximalen Untergruppe U von G. Es wäre $P\subseteqq N(P)\cap N\subseteqq$ $\subseteqq U\cap N\subseteqq N$ und dabei $N(P)\cap N$ der Normalisator von P sowohl in N als auch in $U\cap N$. Daraus folgte $|N:U\cap N|\equiv 1$, (p). Da $N(P)\,N=G$ (s. z. B. Zassenhaus [7], S. 115), so läge N nicht in U. Mithin gälte $|N:U\cap N|=|G:U|$, und diese Zahl wäre nach Voraussetzung eine Primzahl q. Man hätte $q<p$, $q\equiv 1$, (p), was offenbar nicht möglich ist.

Hilfssatz 1. *L, M, N seien Normalteiler von G und dabei $M\subseteqq N$. Aus der G-Überauflösbarkeit von N/M folgt die von LN/LM und die von $L\cap N/L\cap M$.*

Der Beweis ergibt sich ohne Schwierigkeit.

Satz 2. *Sei N Normalteiler von G und $D=N\cap\Phi(G)$. Genau dann hat jede N nicht enthaltende maximale Untergruppe von G Primzahlindex, wenn N/D überauflösbar eingebettet ist in G/D.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $D=E$ annehmen. Da für $N=E$ nichts zu beweisen ist, sei im weiteren $N\neq E$.

N sei überauflösbar eingebettet in G. Dann kann man durch N eine Hauptreihe von G legen, für deren unterhalb N gelegenes Stück $N=N_0\supset N_1\supset\ldots\supset N_k=E$ die Indizes $|N_{i-1}:N_i|$ $(i=1,\ldots,k)$ sämtlich Primzahlen sind. Sei U eine maximale Untergruppe von G, welche N nicht umfaßt, ferner j der kleinste Index mit $U\supseteqq N_j$. Dann ist $j>0$ und $UN_{j-1}=G$, $U\cap N_{j-1}=N_j$. Es folgt $|G:U|=|N_{j-1}:N_j|$. Also ist $|G:U|$ Primzahl.

Nun habe umgekehrt jede N nicht umfassende maximale Untergruppe von G Primzahlindex. Nach Satz 1 besitzt N einen geordneten Sylowturm und ist daher auflösbar. Es bezeichne F den größten nilpotenten Normalteiler von N. Da F in G normal ist, gilt nach Gaschütz [3], Satz 5 $\Phi(F)\subseteqq\Phi(G)$. Somit ist $\Phi(F)\subseteqq$ $\subseteqq N\cap\Phi(G)=E$. Wegen der Nilpotenz von F ist $F'\subseteqq\Phi(F)$. Demnach hat man $F'=E$. Wir beweisen zunächst die G-Überauflösbarkeit von F. Sei L ein in F gelegener Normalteiler von G und $L\neq E$. Dann ist $L\nsubseteqq\Phi(G)$ und daher eine maximale Untergruppe U von G vorhanden, die L nicht enthält. U kann nicht N enthalten, weshalb voraussetzungsgemäß $|G:U|$ eine Primzahl ist. Setzen wir $U \cap L = M$, so ist M in U normal. Wegen der Kommutativität von L ist M auch in L normal. Somit ist $M \trianglelefteq UL = G$ und weiterhin $|L:M| = |G:U|$ Primzahl. Aus dem soeben bewiesenen ergibt sich die G-Überauflösbarkeit von F. Aus dieser folgt weiter die G-Überauflösbarkeit von $G/C(F)$ (s. HUPPERT [4], Satz 12), die ihrerseits die G-Überauflösbarkeit von $N/N \cap C(F)$ nach sich zieht (s. Hilfssatz 1). $N \cap C(F)$ ist der Zentralisator von F in N. Wegen der Auflösbarkeit von N gilt $N \cap C(F) \subseteqq F$ (s. FITTING [2], S. 107). Demnach ist N/F auch G-überauflösbar. Aus der G-Überauflösbarkeit von F und der von N/F folgt diejenige von N.

Bemerkung zu Satz 2. Da $\Phi(N) \subseteqq \Phi(G)$ (s. GASCHÜTZ [3]), so ist $\Phi(N) \subseteqq$ $\subseteqq N \cap \Phi(G)$, wobei $\Phi(N)$ nicht immer mit $N \cap \Phi(G)$ zusammenfällt. Daher folgt aus der G-Überauflösbarkeit von $N/N \cap \Phi(G)$ nicht notwendig die von $N/\Phi(N)$ (und damit die von N). Als Gegenbeispiel braucht man nur $N = \Phi(G)$ zu wählen und für G eine Gruppe zu nehmen, in der $\Phi(G)$ nicht überauflösbar eingebettet ist, wie z. B. die folgende:

$$a^3 = b_1^4 = b_2^4 = 1, \quad b_1 b_2 = b_2 b_1,$$
$$a^{-1} b_1 a = b_2, \quad a^{-1} b_2 a = b_1^{-1} b_2^{-1}.$$

Hier wird die Φ-Untergruppe aus b_1^2, b_2^2 erzeugt (man beachte nachstehenden Hilfssatz 2) und ist offenbar nicht überauflösbar eingebettet in der ganzen Gruppe.

Hilfssatz 2. *Sei N zugleich Sylowturmgruppe und Hallscher Normalteiler von G. Dann ist* $\Phi(N) = N \cap \Phi(G)$.

BEWEIS. Wir setzen $N \cap \Phi(G) = D$. Nach GASCHÜTZ [3] ist $\Phi(N) \subseteqq D$. Angenommen es wäre $\Phi(N) \subset D$. Dann könnten wir M als Hallschen Normalteiler von N minimal so wählen, daß der größte gemeinsame Teiler von $|M|$ und $|D:\Phi(N)|$ größer als 1 wäre. Dieser größte gemeinsame Teiler müßte Potenz einer Primzahl p sein und M enthielte einen Normalteiler K, dessen Faktorgruppe M/K isomorph wäre zu einer p-Sylowgruppe P von M. Die p-Sylowgruppe P_0 von D wäre wegen der Nilpotenz von D normal in G und läge in M. Wir setzen $K\,\Phi(P) = L$, $LP_0 = R$. Bezüglich der Lage von P_0 zu L wären zwei Fälle möglich.

$P_0 \subseteqq L$. Dann läge P_0 in einer Konjugierten von $\Phi(P)$ und damit in $\Phi(N)$ (s. GASCHÜTZ [3], Satz 5) im Widerspruch zur Annahme $p / |D:\Phi(N)|$.

$P_0 \nsubseteq L$. Auf Grund des Satzes von SCHUR über die Komplementierbarkeit Hallscher Normalteiler (s. z. B. ZASSENHAUS [7], S. 125) gäbe es in G eine Untergruppe V mit $MV = G$, $M \cap V = E$. Da die Faktorgruppe M/L elementar abelsche p-Gruppe wäre, könnte man sie in üblicher Weise als Darstellungsmodul von V über $GF(p)$ auffassen. Wegen $p \nmid |V|$ existierte nach dem Satz von MASCHKE (s. z. B. VAN DER WAERDEN [6], S. 182) zu R eine für V invariante Untergruppe R_1, so daß $R\ R_1 = M$, $R \cap R_1 = L$. Wegen $L \subset R$ wäre $R_1 \subset M$ und daher $R_1 V$ echte Untergruppe von G. $R_1 V$ läge in einer maximalen Untergruppe U von G. Da U auch L und P_0 enthielte, so ergäbe sich $LP_0 R_1 V = RR_1 V = MV = G \subseteqq U$, und das ist unmöglich.

Wir kommen nun zu der eingangs angekündigten Verallgemeinerung der Aussage 1.→2. des HUPPERTschen Satzes.

Satz 3. *Sei N Hallscher Normalteiler von G. Genau dann ist N überauflösbar eingebettet in G, wenn jede N nicht enthaltende maximale Untergruppe von G Primzahlindex hat.*

Beweis. Hat jede N nicht enthaltende maximale Untergruppe von G Primzahlindex, so ergibt sich mittels Satz 1, Hilfssatz 2 und Satz 2, daß $N/\Phi(N)$ überauflösbar eingebettet ist in $G/\Phi(N)$. Dies hat nach dem anfangs erwähnten Satz von Baer zur Folge, daß N überauflösbar eingebettet ist in G.

Ist umgekehrt N überauflösbar bzgl. G, so auch $N/N \cap \Phi(G)$. Daraus folgt mittels Satz 2, daß jede N nicht enthaltende maximale Untergruppe von G Primzahlindex hat.

II

Bevor wir die zweite der angekündigten Verallgemeinerungen herleiten, wollen wir noch einige Hilfssätze beweisen.

Folgender Hilfssatz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von Gaschütz ([3], Satz 10). Dabei verstehen wir für eine Primzahlmenge π unter einer π-Sylowgruppe von G jede Untergruppe U, in deren Ordnung $|U|$ nur Primzahlen aus π aufgehen und deren Index $|G:U|$ zu jeder Primzahl aus π teilerfremd ist.

Hilfssatz 3. *Seien M, N Normalteiler von G mit $M \subseteq N$. Besitzt $N/M(N \cap \Phi(G))$ eine normale π-Sylowgruppe, so auch N/M.*

Beweis. Wir setzen $M(N \cap \Phi(G)) = L$. Sei H/L eine normale π-Sylowgruppe von N/L. Da L/M offenbar nilpotent ist, gibt es einen zwischen L und M gelegenen Normalteiler K von G, derart daß L/K zu einer π-Sylowgruppe von L/M isomorph ist. Dann ist K/M Hallscher Normalteiler von H/M. Nach dem schon benutzten Satz von Schur (s. Zassenhaus [7], S. 125) existiert zu K/M eine Untergruppe P/M von H/M, derart daß $KP = H$, $K \cap P = M$. P/M ist π-Sylowgruppe von H/M. Eine der beiden Gruppen K/M und P/M hat ungerade Ordnung und ist daher nach einem Satz von Thompson und Feit auflösbar. Folglich sind nach Zassenhaus [7], S. 126 innerhalb H/M alle Untergruppen der Ordnung $|P:M|$ zu P/M konjugiert. Hieraus ergibt sich in üblicher Weise die Beziehung $G = N(P)K$. Es folgt $G = N(P)K = N(P)L = N(P)\,M(N \cap \Phi(G)) = N(P)\,M = N(P)$. Also ist P/M normale π-Sylowgruppe von H/M.

Bemerkung zu Hilfssatz 3. Der Satz von Thompson und Feit wird beim Beweis nicht benötigt, wenn die Auflösbarkeit einer der Gruppen K/M oder P/M unmittelbar einzusehen ist. Dies tritt z. B. ein, wenn π nur aus einer Primzahl p besteht (Existenz einer normalen p-Sylowgruppe) oder wenn π alle Primzahlen außer p enthält (p-Nilpotenz). Wir wollen diese Spezialfälle mitsamt einigen Folgerungen in einem gesonderten Hilfssatz zusammenfassen und uns bei den weiteren Betrachtungen nur auf diesen berufen.

Hilfssatz 4. *Sind M, N Normalteiler von G mit $M \subseteq N$, so überträgt sich jede der nachstehenden Eigenschaften* a)–e) *von $N/M(N \cap \Phi(G))$ auf N/M:* a) *eine normale p-Sylowgruppe zu haben*; b) *p-nilpotent zu sein*; c) *einen Sylowturm zu haben*; d) *einen geordneten Sylowturm zu haben*; e) *nilpotent zu sein.*

Der folgende Hilfssatz ist eine allgemeine Fassung eines (auf H. WIELANDT) zurückgehenden Hilfssatzes von HUPPERT ([4], S. 417, Hilfssatz 5).

Hilfssatz 5. *Sei G' p-nilpotent, $H_1, \ldots, H_k$ ein System irgendwelcher Hauptfaktoren von G, $|H_i| = p^{n_i}$, C_i der Zentralisator von H_i in G und schließlich $D = \bigcap_{i=1}^{k} C_i$. Sind nun die H_i so beschaffen, daß G/D keinen kleineren Exponenten hat als $G/F_p(G)$, dann ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der n_i teilbar durch jede Zahl n, für die p^n Hauptindex von G ist.*

BEWEIS. Wir beginnen mit folgender

Bemerkung. Besitzt eine abelsche Gruppe der Ordnung h eine treue irreduzible Darstellung n-ten Grades über dem Galoisfeld $GF(p)$, so ist die Gruppe zyklischund es ist n die Ordnung von p mod h. Dies ergibt sich aus HUPPERT [4], S. 416, Hilfssatz 4.

Die p-Nilpotenz von G' hat die p-Auflösbarkeit von G zur Folge. Sei H ein beliebiger p-Hauptfaktor von G und C sein Zentralisator in G, also C der Kern der Darstellung, die G auf H erleidet. Die Ordnung von H sei p^n. Nach HUPPERT [5], S. 513, Hilfssatz 6 ist $C \supseteq F_p(G)$ sowie $D \supseteq F_p(G)$. Weil G' p-nilpotent ist, gilt $F_p(G) \supseteq G'$. Mithin ist G/C abelsch. Da G/C auf H eine treue irreduzible Darstellung über $GF(p)$ vom Gerade n erfährt, so ist zufolge obiger Bemerkung G/C zyklisch und n die Ordnung von p mod $|G/C|$. Ebenso folgt für jedes $i = 1, \ldots, k$, daß G/C_i zyklisch und n_i die Ordnung von p mod $|G/C_i|$ ist. Wir setzen nun voraus, daß der Exponent von G/D nicht kleiner als der von $G/F_p(G)$ ist. Dann haben G/D und $G/F_p(G)$ wegen $D \supseteq F_p(G)$ sogar denselben Exponenten. Bezeichne g das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der n_i. Ist $q^t / |G/C|$ mit einer Primzahl q, so gibt es unter den H_i einen solchen Hauptfaktor H_j, daß $q^t / |G/C_j|$. Wegen $|G/C_j| / p^{n_j} - 1$ haben wir $q^t | q^{n_j} - 1 | q^g - 1$. Es folgt, daß $|G/C| / p^g - 1$ ist. Andererseits war n die Ordnung von p mod $|G/C|$. Also gilt $n | g$.

Hilfssatz 6. *Ist G p-überauflösbar, so ist G' p-nilpotent.*

BEWEIS. Ist G p-überauflösbar, so erfährt G auf jedem seiner p-Hauptfaktoren eine Darstellung ersten Grades, also eine Darstellung als abelsche Gruppe. Bezeichnet D den Durchschnitt der Zentralisatoren aller p-Hauptfaktoren von G, so ist mithin G/D abelsch, also $G' \subseteq D$. Nach HUPPERT [5], S. 513 fällt aber D mit dem größten p-nilpotenten Normalteiler $F_p(G)$ von G zusammen. Aus $G' \subseteq F_p(G)$ folgt, daß G' p-nilpotent ist.

Satz 4. *Ein Normalteiler N von G ist genau dann überauflösbar, wenn $N/N \cap \Phi(G)$ überauflösbar ist.*

Dieser Satz ergibt sich mittels des folgenden Hilfssatzes:

Hilfssatz 7. *Seien M, N Normalteiler von G mit $M \subseteq N$. Ist $N/M(N \cap \Phi(G))$ p-überauflösbar, so auch N/M.*

BEWEIS. Wir setzen $M(N \cap \Phi(G)) = L$. Die Gruppe N/L sei p-überauflösbar. Dann ist ihre Kommutatorgruppe $(N/L)' = N'L/L$ nach Hilfssatz 6 p-nilpotent. Da

$$(*) \qquad M(N \cap \Phi(G)) = M(N'L \cap \Phi(G))$$

gilt, so folgt mittels Hilfssatz 4, daß $N'L/M$ p-nilpotent ist, was wiederum die p-Nilpotenz von $N'M/M = (N/M)'$ nach sich zieht. Wir wollen auf N/M Hilfssatz 5 anwenden. Der größte p-nilpotente Normalteiler von N/M werde mit F_p/M bezeichnet. $H_1, \ldots, H_k$ seien alle zwischen N/M und L/M gelegenen p-Hauptfaktoren von N/M, und C_i/M sei jeweils der Zentralisator von H_i in N/M. Setzen wir $D = \bigcap_{i=1}^{k} C_i$, so ist D/L der Durschnitt der Zentralisatoren aller p-Hauptfaktoren von N/L und daher nach Huppert [5], S. 513 (N/M ist offenbar p-auflösbar) D/L der größte p-nilpotente Normalteiler von N/L. Da $N'L/L$ p-nilpotent ist, so gilt $N'L \subseteqq D$. Dies ergibt mit ($*$) $L \subseteqq (MD \cap \Phi(G))$. Also ist auch $D/M(D \cap \Phi(G))$ p-nilpotent. Hieraus folgt nach Hilfssatz 4 die p-Nilpotenz von D/M. Es ist somit $D \subseteqq F_p$. Nun ergibt sich mittels Hilfssatz 5, da alle H_i die Ordnung p haben, daß jeder beliebige p-Hauptfaktor von N/M die Ordnung p besitzt, w. z. b. w.

Literatur

[1] R. Baer, Supersoluble immersion, *Canadian J. Math.* **11** (1959), 353–369.
[2] H. Fitting, Beiträge zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung, *Jber. dtsch. Math. Ver.* **48** (1938), 77–141.
[3] W. Gaschütz, Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen, *Math. Z.* **58** (1953), 160–170.
[4] B. Huppert, Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen, *Math. Z.* **60** (1954), 409–434.
[5] B. Huppert, Lineare auflösbare Gruppen, *Math. Z.* **67** (1957), 479–518.
[6] B. L. v. d. Waerden, Algebra II. (3. Aufl.), *Berlin–Göttingen–Heidelberg*, 1955.
[7] H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie I, *Leipzig–Berlin*, 1937.

(Eingegangen am 22. Juni 1962.)