Über die Form der Fundamentalgrößen gewisser affinen Räume

Von ARTHUR MOÓR (Szeged)

1. Einleitung. Zu Grunde gelegt sei ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem von der Form

$$\frac{d^{M+1}x^i}{ds^{M+1}} + \Gamma^i_{(M+1)}\left(x, \frac{dx}{ds}, \ldots, \frac{d^M x}{ds^M}\right) = 0, \qquad M \geqq 0,\ i = 1, \ldots, n, \tag{1. 1}$$

wo der Parameter s ein ausgezeichneter Parameter ist, da nach einer beliebigen Parametertransformation sich die Funktionen $\Gamma^i_{(M+1)}$ verändern. Wir wollen aber fordern, daß (1. 1) *eine bezüglich einer affinen Parametertransformation im Falle $M \geqq 1$ invariante Form habe.* Die Lösungskurven des Differentialgleichungssystems (1. 1) können als Bahnen einer affinen Geometrie der Linienelemente M-ter Ordnung $(x^i, x'^i, \ldots, x^{(M)i})$ betrachtet werden, falls sich die Form von (1. 1) bei einer Koordinatentransformation

$$\bar{x}^i = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n) \tag{1. 2}$$

mit nicht verschwindender Jacobischen Determinante, nicht verändert. Die geometrischen Eigenschaften der durch (1. 1) bestimmten affinen Räume wurden schon von vielen Mathematikern untersucht, von denen wir nur D. KOSAMBI, J. DOUGLAS und L. BERWALD erwähnen wollen (vgl. [2]—[5]), und die in gewissen Richtungen die geometrischen Fundamentaltheorien dieser Räume entwickelt haben.[1])

Die Koordinatentransformation (1. 2) bestimmt für die Größen $\Gamma^i_{(M+1)}$ in (1. 1) eine Transformationsformel, die auf Grund der Transformationsformel von $\dfrac{d^{M+1}x^i}{ds^{M+1}}$ leicht bestimmt werden kann. Es entsteht aber die Frage, wie ein geeignetes $\Gamma^i_{(M+1)}$ aus anderen Größen — möglichst aus Vektoren und Tensoren, bzw. aus verschiedenen geometrischen Objekten — zusammengesetzt werden kann.

Wir wollen im folgenden für $M=0$, 1 und 2 untersuchen, wie ein $\Gamma^i_{(M+1)}$ aus $\Gamma^i_{(M)}$, bzw. aus den partiellen Ableitungen dieser Größe zusammengesetzt werden kann. Wir bemerken schon hier, daß $\Gamma^i_{(1)}$ ein kontravarianter Vektor ist, während die $\Gamma^i_{(2)}, \ldots, \Gamma^i_{(M)}$, geometrische Objekte der Linienelementmannigfaltigkaiten höherer Ordnung sind. Bei der Bestimmung der $\Gamma^i_{(M+1)}$ $(M=0, 1, 2)$ wollen wir die

[1]) Den Fall $M > 1$ für (1. 1) hat als erster D. KOSAMBI untersucht (vgl. [5]).

in der Theorie der geometrischen Objekte oft verwandte Methode der Funktionalgleichungssysteme benützen (vgl. [1]). Es wird sich zeigen, daß es zweckmäßig ist, den Vektor $\Gamma^i_{(1)}$ als Grundgröße zu betrachten. Unsere Hauptergebnisse sind durch die Formeln (3. 13) und (4. 15), (4. 16) angegeben. Diese Formeln bestimmen die explizite Form von $\Gamma^i_{(2)}$ und $\Gamma^i_{(3)}$.

2. Der Fall $M=0$. Das zu Grunde gelegte Differentialgleichungssystem ist jetzt nach (1. 1):

$$\frac{dx^i}{ds}+\Gamma^i_{(1)}(x)=0. \tag{2. 1}$$

Da nach einer zulässigen Koordinatentransformation (1. 2)[2])

$$\frac{d\bar{x}^i}{ds}=\bar{A}^i_k\frac{dx^k}{ds}, \qquad \bar{A}^i_k \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \tag{2. 2}$$

gilt, und die Form von (2. 1) koordinateninvariant sein soll, muß

$$\bar{\Gamma}^i_{(1)}(\bar{x})=\bar{A}^i_k\Gamma^k_{(1)}(x) \tag{2. 3}$$

gelten, d. h. $\Gamma^i_{(1)}$ *ist ein kontravarianter Vektor.*

Das Differentialgleichungssystem (2. 1) ist gegenüber der Parametertransformationen

$$s^*=s+a \qquad (a\text{: } \textit{Konstante})$$

und nur für diese invariant.

3. Der Fall $M=1$. Aus (1. 1) folgt, daß jetzt das fundamentale Differentialgleichungssystem die Form

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma^i_{(2)}(x,x')=0, \qquad x'^i \overset{\text{def}}{=} \frac{dx^i}{ds} \tag{3. 1}$$

hat. Die Forderung, daß (3. 1) bezüglich einer affinen Parametertransformation

$$s^*=as+b \qquad (a,b\text{: } \textit{Konstante}) \tag{3. 2}$$

invariant sei, ergibt, daß $\Gamma^i_{(1)}(x,x')$ in den x'^i homogen von zweiter Dimension sein muß.

Nach einer zulässigen Koordinatentransformation (1. 2) gilt

$$\frac{d^2\bar{x}^i}{ds^2}=\frac{d^2x^r}{ds^2}\bar{A}^i_r+\bar{A}^i_{rs}x'^rx'^s, \qquad \bar{A}^i_{rs} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2\bar{x}^i}{\partial x^r\partial x^s}, \tag{3. 3}$$

und somit folgt aus der Forderung der Koordinateninvarianz von (3. 1)

$$\bar{\Gamma}^i_{(2)}(\bar{x},\bar{x}')=\Gamma^r_{(2)}(x,x')\bar{A}^i_r-\bar{A}^i_{rs}x'^rx'^s. \tag{3. 4}$$

[2]) Die Koordinatentransformation (1. 2) ist zulässig, wenn die f^i für das gegebene Problem hinreichend oft differnzierbar sind und die Jacobische Determinante nicht verschwindet.

Nehmen wir jetzt an, daß $\Gamma^i_{(2)}$ eine Funktion von $\Gamma^j_{(1)}, \dfrac{\partial \Gamma^j_{(1)}}{\partial x^k}$ und x'^j ist, d. h.

$$\Gamma^i_{(2)} = F^i_{(2)}\left(\frac{\partial \Gamma^j_{(1)}}{\partial x^k}, \Gamma^j_{(1)}, x'^j\right). \tag{3. 5}$$

Nach einer zulässigen Koordinatentransformation (1. 2) wird

$$\overline{\Gamma}^i_{(2)} = F^i_{(2)}\left(\frac{\partial \overline{\Gamma}^j_{(1)}}{\partial \overline{x}^k}, \overline{\Gamma}^j_{(1)}, \overline{x}'^j\right) \tag{3. 6}$$

bestehen. Beachten wir jetzt, daß nach (2. 3)

$$\frac{\partial \overline{\Gamma}^j_{(1)}}{\partial \overline{x}^k} = \frac{\partial \Gamma^r_{(1)}}{\partial x^s} \overline{A}^j_r A^s_k + \Gamma^r_{(1)} \overline{A}^j_{rs} A^s_k, \quad A^s_k \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k} \tag{3. 7}$$

besteht, (da die Jacobische Determinante von (1. 2) als von Null verschieden vorausgesetzt wurde, existiert offenbar A^j_s), somit folgt aus (3. 4) — (3. 6) in Hinsicht auf die Transformationsformeln (3. 7), (2. 3) und (2. 2):

$$\begin{aligned} &F^i_{(2)}\left(\frac{\partial \Gamma^r_{(1)}}{\partial x^s} \overline{A}^j_r A^s_k + \Gamma^r_{(1)} \overline{A}^j_{rs} A^s_k, \Gamma^r_{(1)} \overline{A}^j_r, x'^r \overline{A}^j_r\right) = \\ &= F^r_{(2)}\left(\frac{\partial \Gamma^j_{(1)}}{\partial x^k}, \Gamma^j_{(1)}, x'^j\right) \overline{A}^i_r - \overline{A}^i_{rs} x'^r x'^s. \end{aligned} \tag{3. 8}$$

Die Relation (3. 8) muß aber in $\overline{A}^i_r$, $\overline{A}^i_{rs}$ eine Identität sein, falls nur Det $(\overline{A}^i_r) \neq 0$ gilt. Da $\overline{A}^i_j = \delta^i_j$ gesetzt werden kann und somit aus

$$\overline{A}^i_j A^j_k = \delta^i_k \tag{3. 9}$$

auch $A^j_k = \delta^j_k$ folgt, bestimmt (3. 8) für die unbekannten Funktionen $F^i_{(2)}$ das Funktionalgleichungssystem

$$F^i_{(2)}\left(\frac{\partial \Gamma^j_{(1)}}{\partial x^k} + \Gamma^r_{(1)} \overline{A}^j_{rk}, \Gamma^j_{(1)}, x'^j\right) = F^i_{(2)}\left(\frac{\partial \Gamma^j_{(1)}}{\partial x^k}, \Gamma^j_{(1)}, x'^j\right) - \overline{A}^i_{sr} x'^r x'^s, \tag{3. 10}$$

in dem die $\overline{A}^j_{rk}$ die Veränderlichen sind. Offenbar ist (3. 8) ebenfalls ein Funktionalgleichungssystem für die Funktionen $F^i_{(2)}$, wo die Veränderlichen die $\overline{A}^j_r$, $\overline{A}^j_{rs}$ sind, die $\overline{A}^j_r$ sind aber wegen Det $(\overline{A}^j_r) \neq 0$ von einander nicht vollständig unabhängig.

Das Gleichungssystem

$$\Gamma^r_{(1)} z^j_{rk} = -\frac{\partial \Gamma^j_{(1)}}{\partial x^k}, \qquad z^j_{rk} = z^j_{kr} \tag{3. 11}$$

ist im allgemeinen auf z^j_{rk} auflösbar, da (3. 11) aus n^2 Gleichungen mit insgesamt $\frac{1}{2}n^2(n+1)$ Unbekannten besteht. Es sei

$$z^j_{rk} = G^j_{rk}(x)$$

eine Lösung von (3. 11) und wählen wir in (3. 10) $\overline{A}^j_{rk} = G^j_{rk}$. Da jetzt

$$\Gamma^r_{(1)} G^j_{rk} = -\frac{\partial \Gamma^j_{(1)}}{\partial x^k} \tag{3. 12}$$

besteht, wird aus (3. 10) und (3. 5)

$$\Gamma^i_{(2)} = G^i_{rs}(x)x'^r x'^s + H^i_2(\Gamma^j_{(1)}, x'^j) \tag{3.13}$$

mit

$$H^i_2(\Gamma^j_{(1)}, x'^j) \overset{\text{def}}{=} F^i_{(2)}(0, \Gamma^j_{(1)}, x'^j).$$

Unsere Resultate bezüglich der Form von $\Gamma^i_{(2)}$ können wir im folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 1. *Die allgemeinste Form von* $\Gamma^i_{(2)}$ *die aus den* $\Gamma^i_{(1)}$ *gebildet sind, ist durch* (3. 12) *und* (3. 13) *festgelegt. Die* $H^i_2(\Gamma_{(1)}, x')$ *sind im Koordinatensystem* x^i *in den* x'^i *von zweiter Dimension homogene Funktionen. (Es ist auch* $H^i_2 \equiv 0$ *möglich.)*

Die Transformationsformeln von G^i_{rs} und H^i_2 sind aber selbstverständlich auf Grund von (3. 4) nicht beliebig. Wir beweisen den

Satz 1a. *Ist* (3. 12) *gültig, so ist*

$$\bar{\Gamma}^s_{(1)}\bar{G}^j_{sk} = \Gamma^s_{(1)}(G^a_{sb}\bar{A}^j_a A^b_k - \bar{A}^j_{sb}A^b_k). \tag{3.14}$$

Beweis. Es ist nach (3. 12) und nach der Transformationsformel (3. 7)

$$\bar{\Gamma}^r_{(1)}\bar{G}^j_{rk} = -\frac{\partial\bar{\Gamma}^j_{(1)}}{\partial\bar{x}^k} = -\frac{\partial\Gamma^a_{(1)}}{\partial x^b}\bar{A}^j_a A^b_k - \Gamma^s_{(1)}\bar{A}^j_{sb}A^b_k.$$

Beachten wir nun wieder die Formel (3. 12), so erhält man unmittelbar die Formel (3. 14), w. z. b. w.

Bemerkung. Es kann leicht verifiziert werden, daß (3. 14) erfüllt ist, falls G^j_{rs} der gewöhnlichen Transformationsformel der affinen Übertragungsparameter genügt. In diesem Falle muß H^i_2 in (3. 13) ein kontravarianter Vektor sein, wie das in Hinblick auf (3. 4) leicht folgt, da jetzt die Transformationsformel von $\Gamma^j_{(2)} - G^j_{rs}x'^r x'^s$ mit der Transformationsformel eines Vektors übereinstimmt. Da aber G^j_{rs} nicht eindeutig festgelegt war, ist selbstverständlich auch seine Transformationsformel durch die Definitionsgleichung (3. 12) noch nicht vollständig bestimmt; die Transformationsformel von G^j_{rs} kann aber nur so gewählt werden, daß (3. 14) gültig sei.

Die Formel (3. 12) zeigt, daß aus $\dfrac{\partial\Gamma^j_{(1)}}{\partial x^k}$, $\Gamma^j_{(1)}$ und x'^j eine Größe $\Gamma^j_{(2)}$ mit der Transformationsformel (3. 4) gebildet werden kann. Wir beweisen jetzt den folgenden

Satz 2. *Aus* $\dfrac{\partial\Gamma^j_{(1)}}{\partial x^k}$, x'^j *kann keine Größe* $\Gamma^i_{(2)}(x, x')$ *gebildet werden so, daß* $\Gamma^i_{(2)}(x, x')$ *in den* x'^j *homogen von zweiter Dimension sei und* (3. 4) *bestehe.*

Beweis. Angenommen, daß statt der Formel (3. 5)

$$\Gamma^i_{(2)} = F^i_{(2)}\left(\frac{\partial\Gamma^j_{(1)}}{\partial x^k}, x'^j\right)$$

gelte, würde man statt (3. 8) das Funktionalgleichungssystem

$$(3.15)\quad F^i_{(2)}\left(\frac{\partial\Gamma^r_{(1)}}{\partial x^s}\overline{A}^j_r A^s_k + \Gamma^r_{(1)}\overline{A}^j_{rs}A^s_k,\ x'^r\overline{A}^j_r\right) = F^r_{(2)}\left(\frac{\partial\Gamma^j_{(1)}}{\partial x^k},\ x'^j\right)\overline{A}^j_r - \overline{A}^i_{rs}x'^r x'^s$$

bekommen. Für $\overline{A}^j_{rs}=0$, $\overline{A}^j_r=\varrho\delta^j_r$ würde man wegen $A^r_k=\varrho^{-1}\delta^r_k$ aus (3.15)

$$F^i_{(2)}\left(\frac{\partial\Gamma^j_{(1)}}{\partial x^k},\ \varrho x'^j\right) = \varrho F^i_{(2)}\left(\frac{\partial\Gamma^j_{(1)}}{\partial x^k},\ x'^j\right)$$

bekommen. $\Gamma^i_{(2)}$ wäre somit in x'^j homogen von erster Dimension; das ist aber ein Widerspruch zu unserer Annahme.

4. Der Fall M = 2. Das fundamentale Differentialgleichungssystem hat jetzt die Form:

$$(4.1)\qquad \frac{d^3x^i}{ds^3}+\Gamma^i_{(3)}(x,x',x'')=0,\quad x'^i \overset{\text{def}}{=} \frac{dx^i}{ds},\quad x''^i \overset{\text{def}}{=} \frac{d^2x^i}{ds^2}.$$

Da (4. 1) bezüglich einer zulässigen Koordinatentransformation (1. 2) invariante Form haben soll, und

$$(4.2)\qquad \frac{d^3\overline{x}^i}{ds^3} = \overline{A}^i_r\frac{d^3x^r}{ds^3} + 3\overline{A}^i_{rs}x''^r x'^s + \overline{A}^i_{rst}x'^r x'^s x'^t$$

besteht, muß $\Gamma^i_{(3)}$ der Transformationsformel

$$(4.3)\qquad \overline{\Gamma}^i_{(3)}(\overline{x},\overline{x}',\overline{x}'') = \overline{A}^i_r\Gamma^r_{(3)}(x,x',x'') - 3\overline{A}^i_{rs}x''^r x'^s - \overline{A}^i_{rst}x'^r x'^s x'^t$$

genügen, wo $\overline{A}^i_r$, $\overline{A}^i_{rs}$, $\overline{A}^i_{rst}$ — wie gewöhnlich — die partielle Ableitungen von $\overline{x}^i(x)$ nach x^r, (x^r, x^s), bzw. (x^r, x^s, x^t) bedeuten.

Setzen wir jetzt voraus, daß $\Gamma^i_{(3)}$ eine Funktion von x'^j, x''^j, $\Gamma^j_{(2)}$ und seiner partiellen Ableitungen ist, d. h.:

$$(4.4)\qquad \Gamma^i_{(3)} = F^i_{(3)}\left(\frac{\partial\Gamma^j_{(2)}}{\partial x^k},\frac{\partial\Gamma^j_{(2)}}{\partial x'^k},\Gamma^j_{(2)},x'^j,x''^j\right).$$

Die entsprechenden Transformationsformeln dieser Größen erhält man aus (2. 2), (3. 3) und (3. 4). Nach partiellen Ableitungen von (3. 4) bekommt man wegen[3])

$$(4.5)\qquad \frac{\partial x'^s}{\partial\overline{x}^k} = -\overline{A}^t_{rm}A^m_k A^s_t x'^r,\quad \frac{\partial x'^s}{\partial\overline{x}'^k} = A^s_k$$

---

[3]) Die Transformationsformeln (4. 5) erhält man durch partielle Ableitung der Transformationsformel

$$x'^s = A^s_k\overline{x}'^k$$

der kontravarianten Vektoren in Hinsicht auf die Formel (3. 9).

die Transformationsformeln:

$$\frac{\partial \overline{\Gamma}^i_{(2)}}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial \Gamma^r_{(2)}}{\partial x^s} \bar{A}^i_r A^s_k - \frac{\partial \Gamma^r_{(2)}}{\partial x'^s} \bar{A}^i_r \bar{A}^t_{pm} A^m_k A^s_t x'^p + \tag{4. 6}$$
$$+ \Gamma^r_{(2)} \bar{A}^i_{rs} A^s_k - \bar{A}^i_{rst} A^t_k x'^r x'^s + 2 \bar{A}^i_{rs} \bar{A}^t_{pm} A^m_k A^r_t x'^p x'^s,$$

$$\frac{\partial \overline{\Gamma}^i_{(2)}}{\partial \bar{x}'^k} = \frac{\partial \Gamma^r_{(2)}}{\partial x'^s} \bar{A}^i_r A^s_k - 2 \bar{A}^i_{rs} x'^r A^s_k. \tag{4. 7}$$

Das charakteristische Funktionalgleichungssystem von $\Gamma^i_{(3)} = F^i_3$ erhält man, wenn einerseits (4. 3), andererseits die aus (4. 4) folgende Transformationsformel

$$\overline{\Gamma}^i_{(3)} = F^i_{(3)}\left(\frac{\partial \overline{\Gamma}^j_{(2)}}{\partial \bar{x}^k}, \frac{\partial \overline{\Gamma}^j_{(2)}}{\partial \bar{x}'^k}, \overline{\Gamma}^j_{(2)}, \bar{x}'^j, \bar{x}''^j \right)$$

beachtet wird. Man erhält

$$F^i_{(3)}\left(\frac{\partial \overline{\Gamma}^j_{(2)}}{\partial \bar{x}^k}, \frac{\partial \overline{\Gamma}^j_{(2)}}{\partial \bar{x}'^k}, \overline{\Gamma}^j_{(2)}, \bar{x}'^j, \bar{x}''^j \right) = \tag{4. 8}$$
$$= \bar{A}^i_r F^r_{(3)}\left(\frac{\partial \Gamma^j_{(2)}}{\partial x^k}, \frac{\partial \Gamma^j_{(2)}}{\partial x'^k}, \Gamma^j_{(2)}, x'^j, x''^j \right) - 3 \bar{A}^i_{rs} x''^r x'^s - \bar{A}^i_{rst} x'^r x'^s x'^t,$$

wo auf der linken Seite für die entsprechenden Größen (4. 6), (4. 7) (3. 4), (2. 2) und (3. 3) beachtet werden müßten.

Im folgenden wählen wir solche zulässige Koordinatentransformationen, für die $\bar{A}^i_t = A^i_t = \delta^i_t$ ist. Aus (4. 8) wird dann:

$$F^i_{(3)}\left(\frac{\partial \Gamma^j_{(2)}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^j_{(2)}}{\partial x'^s} \bar{A}^s_{pk} x'^p + \Gamma^r_{(2)} \bar{A}^j_{rk} - \bar{A}^j_{rsk} x'^r x'^s + \right.$$
$$+ 2 \bar{A}^j_{ts} x'^s \bar{A}^t_{pk} x'^p, \frac{\partial \Gamma^j_{(2)}}{\partial x'^k} - 2 \bar{A}^j_{rk} x'^r, \Gamma^j_{(2)} - \bar{A}^j_{rs} x'^r x'^s, x'^j, x''^j + \tag{4. 9}$$
$$\left. + \bar{A}^j_{rs} x'^r x'^s \right) = F^i_{(3)}\left(\frac{\partial \Gamma^j_{(2)}}{\partial x^k}, \frac{\partial \Gamma^j_{(2)}}{\partial x'^k}, \Gamma^j_{(2)}, x'^j, x''^j \right) -$$
$$- 3 \bar{A}^i_{rs} x''^r x'^s - \bar{A}^i_{rst} x'^r x'^s x'^t.$$

$\bar{A}^i_{rs}$, bzw. $\bar{A}^i_{rst}$ sollen nun die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme sein:

$$\frac{\partial \Gamma^j_{(2)}}{\partial x'^k} - 2 \bar{A}^j_{rk} x'^r = 0, \tag{4. 10}$$

$$\frac{\partial \Gamma^j_{(2)}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^j_{(2)}}{\partial x'^s} \bar{A}^s_{pk} x'^p + \Gamma^r_{(2)} \bar{A}^j_{rk} - \bar{A}^j_{rsk} x'^r x'^s + 2 \bar{A}^j_{ts} x'^s \bar{A}^t_{pk} x'^p = 0. \tag{4. 11}$$

Aus (4. 10) ist $\bar{A}^j_{rk}$ nicht eindeutig bestimmt, da (4. 10) nur aus n^2 Gleichungen besteht mit $\frac{1}{2} n^2(n+1)$ Unbekannten. Es sei $\bar{A}^j_{rk} = G^j_{rk}$ eine Lösung von (4. 10), dann ist nach (4. 10)

$$G^j_{rk}x'^r \equiv \bar{A}^j_{rk}x'^r = \frac{1}{2}\frac{\partial \Gamma^j_{(2)}}{\partial x'^k}, \qquad G^j_{rk} = G^j_{kr}. \tag{4. 12}$$

Substituiert man das in (4. 11), so wird:

$$\bar{A}^j_{rsk}x'^r x'^s = \frac{\partial \Gamma^j_{(2)}}{\partial x^k} + \Gamma^r_{(2)}G^j_{rk}. \tag{4. 13}$$

Setzen wir nun in (4. 9) $\bar{A}^j_{rs} = G^j_{rs}$, $\bar{A}^j_{rsk}x'^r x'^s$ aus (4. 13) ein, so wird unter Beachtung von (4. 12):

$$\Gamma^i_{(3)} \equiv F^i_{(3)} = \frac{3}{2}\frac{\partial \Gamma^i_{(2)}}{\partial x'^r}x''^r + \frac{\partial \Gamma^i_{(2)}}{\partial x^t}x'^t + \frac{1}{2}\Gamma^r_{(2)}\frac{\partial \Gamma^i_{(2)}}{\partial x'^r} + H^i_3, \tag{4. 14}$$

wo

$$H^i_3 = F^i_{(3)}\left(0, 0, \Gamma^j_{(2)} - \frac{1}{2}\frac{\partial \Gamma^j_{(2)}}{\partial x'^s}x''^s, x'^j, x''^j + \frac{1}{2}\frac{\partial \Gamma^j_{(2)}}{\partial x'^s}x'^s\right)$$

bedeutet.

Wir beweisen den folgenden

Satz 3. *Die durch*

$$\Gamma^{*i}_{(3)} \overset{\text{def}}{=} \frac{3}{2}\frac{\partial \Gamma^i_{(2)}}{\partial x'^r}x''^r + \frac{\partial \Gamma^i_{(2)}}{\partial x^t}x'^t + \frac{1}{2}\Gamma^r_{(2)}\frac{\partial \Gamma^i_{(2)}}{\partial x'^r} \tag{4. 15}$$

bestimmte Größe genügt dem Transformationsgesetzt (4. 3).

Beweis. Es ist auf Grund von (4. 15)

$$\bar{\Gamma}^{*i}_{(3)} = \frac{3}{2}\frac{\partial \bar{\Gamma}^i_{(2)}}{\partial \bar{x}'^r}\bar{x}''^r + \frac{\partial \bar{\Gamma}^i_{(2)}}{\partial \bar{x}^t}\bar{x}'^t + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}^r_{(2)}\frac{\partial \bar{\Gamma}^i_{(2)}}{\partial \bar{x}'^r}.$$

Wir müssen jetzt nur der Reihe nach die Transformationsformeln (4. 7), (3. 3), (4. 6), (2. 2) und (3. 4) beachten, so bekommt man nach elementaren Rechnungen wegen

$$A^s_r \bar{A}^r_p = \delta^s_p,$$

und in Hinsicht auf die Definitionsformel (4. 15) die Formel:

$$\bar{\Gamma}^{*i}_{(3)} = \Gamma^{*t}_{(3)}\bar{A}^i_t - 3\bar{A}^i_{tp}x'^t x''^p - \bar{A}^i_{rst}x'^r x'^s x'^t.$$

Vergleichen wir das mit (4. 3), so folgt unmittelbar die Richtigkeit des Satzes.

Aus (4. 14) und (4. 15) folgt auf Grund von Satz 3 der

Satz 4. *Die allgemeinste Form von $\Gamma^i_{(3)}$ ist durch*

$$\Gamma^i_{(3)} = \Gamma^{*i}_{(3)} + H^i_3 \tag{4. 16}$$

angegeben, wo H^i_3 einen Vektor bedeutet.

Wir haben also durch (4. 15) und (4. 16) $\Gamma^i_{(3)}$ aus $\Gamma^i_{(2)}$ und aus seinen partiellen Ableitungen bis auf einen Vektor bestimmt.

Nehmen wir nun an, daß in der Formel (4. 16) $H_3^i \equiv 0$ ist. Auf Grund von (4. 15) geht jetzt das fundamentale Differentialgleichungssystem (4. 1) in

$$\frac{d^3x^i}{ds^3} + \frac{3}{2}\frac{\partial\Gamma^i_{(2)}}{\partial x'^r}x''^r + \frac{\partial\Gamma^i_{(2)}}{\partial x^t}x'^t + \frac{1}{2}\Gamma^r_{(2)}\frac{\partial\Gamma^i_{(2)}}{\partial x'^r} = 0 \tag{4. 17}$$

über. Es gilt nun der folgende

Satz 5. *Die Form von* (4. 17) *ist bezüglich einer affinen Parametertransformation* (3. 2) *invariant.*

Beweis. $\Gamma^i_{(2)}(x, x')$ ist in den x'^i homogen von zweiter Dimension. Dasselbe gilt auch für $\dfrac{\partial\Gamma^i_{(2)}}{\partial x^t}$. Es ist aber $\dfrac{\partial\Gamma^i_{(2)}}{\partial x'^t}$ offenbar in den x'^i homogen von erster Dimension. Aus den Formeln:

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{dx^i}{ds^*}a, \quad \frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{d^2x^i}{ds^{*2}}a^2, \quad \frac{d^3x^i}{ds^3} = \frac{d^3x^i}{ds^{*3}}a^3$$

und aus der Homogenität von $\Gamma^i_{(2)}$ folgt nun aus (4. 17) unmittelbar die Behauptung des Satzes.

Satz 6. *Jede Lösungskurve* $x^i = x^i(s)$ *des Differentialgleichungssystems* (3. 1) *genügt auch dem Differentialgleichungssystem* (4. 17).

Beweis. Nach (3. 1) ist

$$\Gamma^r_{(2)}(x, x') = -\frac{d^2x^r}{ds^2} \equiv -x''^r.$$

Das Differentialgleichungssystem (4. 17) geht somit in

$$\frac{d^3x^i}{ds^3} + \frac{\partial\Gamma^i_{(2)}}{\partial x^t}x'^t + \frac{\partial\Gamma^i_{(2)}}{\partial x'^t}x''^t = 0$$

über, was man in der Form

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{(2)}(x, x')\right) = 0 \tag{4. 18}$$

schreiben kann. Da $x^i(s)$ eine Lösung von (3. 1) war, ist auch (4. 18) erfüllt, und das beweist den Satz.

5. Schlußbemerkungen. In den Paragraphen 3 und 4 haben wir die entsprechenden Größen $\Gamma^i_{(M+1)}$ — die durch die Differentialgleichungssysteme (3. 1), bzw. (4. 1) die Bahnen der affinen Geometrie bestimmen — aus den Größen $\Gamma^i_{(M)}$ $(M = 1, 2)$ und aus deren partiellen Ableitungen aufgebaut. (Vgl. die Formeln (3. 13) und (4. 14).) $\Gamma^i_{(1)}$ war nach der Transformationsformel (2. 3) ein kontravarianter Vektor, den wir als „a-priori" gegeben vorausgesetzt haben. Die Größen $\Gamma^i_{(2)}$ mit dem Transformationsgesetz (3. 4) können bekanntlich leicht aus einem symmetrischen rein kovarianten Tensor zweiter Stufe $\gamma_{ik}(x)$ gebildet werden; es wird:

$$\Gamma^i_{(2)} = \left\{ {i \atop jk} \right\}_{(\gamma)} x'^j x'^k, \tag{5. 1}$$

wo $\left\{ {i \atop jk} \right\}_{(\gamma)}$ die zum Tensor γ_{ik} gehörigen Christoffelschen Symbole (s. etwa [6]) bedeuten. Für $H^i_2 \equiv 0$ gibt (3. 13)

$$\Gamma^i_{(2)} = G^i_{rs}(x) x'^r x'^s, \tag{5. 2}$$

wo G^i_{rs} der Gleichung (3. 12) genügt. Es ist aber zwischen $\left\{ {i \atop jk} \right\}_{(\gamma)}$ und G^i_{jk} ein wesentlicher Unterschied, denn $\left\{ {i \atop jk} \right\}_{(\gamma)}$ ist durch die γ_{ik}, $\partial_k \gamma_{ij}$ vollständig bestimmt, während G^i_{jk} durch die Gleichungen (3. 12) noch nicht vollständig bestimmt ist, da das Gleichungssystem (3. 12), wie wir schon bemerkt haben, aus n^2 Gleichungen für die $\frac{1}{2} n^2 (n+1)$ unbekannten G^i_{rs} besteht.

Aus den Definitionsgleichungen (3. 12) kann aber gefolgert werden, daß die G^j_{rs} nur von den x^i abhängig sind. Die durch (3. 13) festgelegten Größen $\Gamma^i_{(2)}$ haben somit einen ziemlich speziellen Charakter.

Bezüglich der Größen $\Gamma^i_{(3)}$, die durch die Formel (4. 15) bestimmt sind, wollen wir bemerken, daß diese durch die $\Gamma^i_{(2)}(x, x')$ bzw. deren partiellen Ableitungen vollständig festgelegt sind.

Bei der Herleitung der Formel (4. 15) *waren nur die Transformationsformeln* (3. 4), (4. 6) *und* (4. 7) *benützt, die* $\Gamma^i_{(2)}(x, x')$ *waren sonst beliebig.*

Die Berwaldschen $\Gamma^i(x, x')$ (vgl. [2], Formel (1. 4)) können also auch für die Bestimmung von $\Gamma^{*i}_{(3)}$ benützt werden; $\Gamma^i_{(2)}$ braucht also nicht die Form (3. 13) haben.

Literatur

[1] J. Aczél und S. Gołąb, Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte, *Warszawa*, 1960.

[2] L. Berwald, Über Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . ., *Annals of Math.* **48** (1947), 193—215.

[3] J. Douglas, The general geometry of paths, *Annals of Math.* (2) **29** (1928), 143—168.

[4] D. Kosambi, Parallelism and path-spaces, *Math. Z.* **37** (1933), 608—622.

[5] D. Kosambi, Path-spaces of higher order, *Quart. J. of Math.* (Oxford series) **7** (1936), 97—104.

[6] J. A. Schouten, Ricci—Calculus, *Berlin*, 1954.

(Eingegangen am 28. Juni 1962.)